现代物理基础丛书 79

现代电磁理论基础

王长清　李明之　编著



现代物理基础丛书 79

现代电磁理论基础

王长清　李明之　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书利用现代数学的理论、观点和方法，系统地论述了宏观电磁场理论的基本问题，在一定程度上反映了现代电磁理论的发展趋势，在通向现代电磁理论前沿的过程中起到了桥梁的作用。本书内容包括以下方面。绪论中回顾了宏观电磁理论发展的主要历史进程，阐述了电磁理论的重要意义，以及现代数学在电磁理论发展中的重要作用。第1章简要总结了宏观电磁场的主要规律，是全书的物理基础。第2章提纲式地阐述了书中用到的现代数学的理论、观点和方法，并着重分析了电磁理论中常用算子的主要特性。第3章主要讨论了描述无界空间中电磁现象的重要方法。第4章则以平面分层介质中的电磁场为对象，论述了二维电磁传输系统中电磁问题的分析方法和电磁场的传输规律。第5～7章是关于典型常用电磁传输和谐振系统中电磁问题分析方法的讨论。第8章集中讨论了电磁场的散射和衍射问题。第9章介绍了有关瞬变电磁场的理论知识。第10章比较全面地阐述了计算电磁学的基本原理，不仅有频域方法，还把时域方法放到了同等重要的地位，这反映了现代计算电磁学的发展趋势。

本书可供高等院校理工类高年级本科生和研究生学习使用，也可供对现代电磁理论有兴趣的科技工作者阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

现代电磁理论基础/王长清，李明之编著. —北京：科学出版社，2017.3

(现代物理基础丛书)

ISBN 978-7-03-052021-0

Ⅰ.①现…　Ⅱ.①王…②李…　Ⅲ.①电磁理论—研究　Ⅳ.①O441

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第047130号

责任编辑：钱　俊／责任校对：邹慧卿
责任印制：张　伟／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京建宏印刷有限公司　印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2017年3月第　一　版　开本：720×1000　1/16
2017年3月第一次印刷　印张：23　1/4
字数：454 000

定价：138.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

虽然麦克斯韦方程问世已经150多年，但电磁理论发展的脚步从来没有停止，它的影响也越来越深广。一个极其明显的事实是，现代科技和人类生活的各个方面无不受到电磁理论发展的深刻影响。在当代，电磁理论仍是一门非常重要的学科，而且仍然具有强大的生命力。

自20世纪60年代以来，电磁理论的发展逐渐表现出新的特点，到现代它已经呈现出一种新的面貌。在我们看来，这种变化主要体现在以下几个方面。首先，现代数学的应用使电磁理论有了更严格、更合理的数学基础，理论的表述更加精确、系统和简洁。其次，电子计算机的发展使计算电磁学成为电磁理论发展的重要方向，其影响面仍在不断扩大。由于电子技术对超带宽信号的应用和对瞬变电磁过程的重视，使解决瞬变电磁场问题显得越来越重要，这促使电磁场的时域分析和计算方法迅速发展。

尽管电磁理论的面貌已经发生了深刻的变化，现有的电磁理论教材却长期保持着老面孔，没有及时地反映这种发展趋势。所幸的是，最近国际上的一些电磁理论出版物已经出现了一种新气象，其内容和表述方法正在发生变化，已经开始表现出现代电磁理论发展的新特点。

本书力图用现代数学的理论、观点和方法系统地阐述电磁理论的基本问题，尽量反映出其发展的趋势。虽然不可能全面地反映现代电磁理论的已有水平，但希望能起到一定的桥梁作用，帮助读者打下一定的基础，以便更容易理解当下电磁理论方面的文献。书中也介绍了一些实用的经典方法，目的在于提高读者数学分析能力和理论素养。

本书第1章简要地总结了宏观电磁场的基本规律，作为全书的物理基础。第2章提纲式地概述了书中用到的主要数学理论、观点和方法，重点分析了电磁理论中常用算子的主要特性。第3章主要讨论了无界空间中电磁现象的主要方法。第4章以平面分层介质中电磁现象为对象，主要论述了二维电磁传输系统中电磁问题的分析方法和电磁场的传输规律。第5~7章是关于典型的常用电磁传输和谐振系统中电磁问题分析方法的讨论。第8章集中讨论了电磁场的散射和衍射问题。第9章介绍了有关瞬变电磁场的理论知识。第10章是计算电磁学原理，

这反映了现代计算电磁学的发展趋势。

原计划为天线问题专设一章，后因篇幅过大而放弃。好在电磁辐射问题已在多处有所讨论。此外，本书没有涉及静态电磁场和运动媒质中的电磁场问题，也没有讨论非线性问题。

本书的写作和出版工作得到了多人的帮助，我要对他们表示衷心的感谢。首先要感谢本书合著者李明之博士，他除了完成自己的写作任务之外，还做了大量的事务性工作，没有他的努力和协作，本书就无法顺利地出版。在本书写作的初期，我们就得到了科学出版社钱俊编辑的鼓励和支持，后来在出版过程中他付出了大量的辛勤劳动，在此特别对他表示感谢。

在旅居美国的写作期间，我在公寓中结识了许多来自中国各地的老年朋友。我们在一起生活得非常融洽，大家互相关心、互相帮助，就像一家人一样，这为本书的写作创造了一个愉快而安逸的环境。因此，我要对所有的老年朋友表示感谢，其中我要特别感谢的是刘龙庆老弟和他的太太刘志芳女士，他们给予的帮助为我们解决了很多生活上的不便。刘志芳女士还发挥她的艺术才能，带领大家学习舞蹈，这大大活跃了我们的老年生活。还要特别感谢的是屠文钦大夫，基于对事物敏锐洞察和深刻分析的能力，她常对我有中肯的批评和鼓励，成为能深入进行思想交流的知心朋友，这有利于我保持正确的生活态度，并以旺盛的精力投入到工作中。

在本书的写作过程中，我曾居住在女儿王海云位于波士顿的家中，她不仅要长期照顾我的生活，还为我的写作做了很多工作。此外，还有一段时间我居住在儿子王海波和儿媳鹿军位于盐湖城的家中，在他们的帮助下我几乎阅读了犹他大学图书馆中所有关于电磁理论的著作，这对我的写作很有益处，在此也要向他们表示感谢。

我还要感谢祝西里教授，她不仅要照顾我的生活、关心我的健康，还为本书的写作和出版做了大量工作。

在我完成本书写作的当天，正好是我八十岁的生日，那一刻的心情是喜悦的，因此这本书对我而言也有了某种特殊的意义。

这本书的写作没有任何大纲可以参考，完全按照我们自己的认识来构思，而且不一定能完全实现最初的设想。这肯定是一次不成熟的尝试，书中的不妥之处恳请读者批评指正，我们会加以改进。

感谢国家自然科学基金（编号：61271052）对本书出版提供的支持。

王长清

2014年10月21日于美国波士顿 Sharon

目　　录

绪　　论

0.1　电磁理论的发展

人类认识电磁现象的历史相当漫长，但将其作为定量学科进行研究只有 250 年左右的时间，而经典电磁理论的最终确立刚满 150 年。时至今日，它不仅有了极其丰富广博的工程实践基础，而且发展出了臻于完备、内容浩瀚的理论体系，并带动了一系列新学科的建立和发展。电磁理论对科学技术发展和人类社会生活的变化起到了无以伦比的作用。

电磁理论构建在精密的科学实验基础之上，又是实验知识的推广和演绎，堪称自然科学理论的典范。

早期的静电作用力实验研究于 1771—1773 年由英国科学家卡文迪什（H. Cavendish，1731—1810）进行，但其结果没有及时发表。对静电力研究做出贡献的还有弗兰克林（Franklin，1706—1790）、普瑞斯特利（Priestley，1733—1804）和罗宾逊（Robinson，1739—1805）等。1785 年法国物理学家库仑（Charles-Auguistin de Coulomb，1736—1806）发表了他的研究成果，证明点电荷之间的作用力与电荷之间的距离平方成反比，后来被称为库仑定律，这是电磁学的基本定律之一。

丹麦物理学家奥斯特（Hans Christian Oersted，1777—1851）最先揭示了电与磁的作用（1820），即电流的磁效应，发现了电与磁的联系，从而开创了电磁学研究的新纪元。接下来由法国物理学家毕奥（Jeans Baptiste Biot，1774—1862）和萨伐尔（Filix Savart，1791—1841）关于载流导线对磁针作用的实验，在拉普拉斯（Laplace）的帮助下得出了电流源对磁极作用力的普遍规律。法国物理学家安培（Andre-Marie Ampere，1775—1836）经过精细的实验和分析，于 1825 年得出了电流元之间作用力的普遍规律，后称为安培定律。它把毕奥-萨伐尔-拉普拉斯（Biot-Savart-Laplace）定律包含在内，成为电磁学的另一个基本定律。

奥斯特的实验建立起了电与磁的联系，并激发了人们新的设想，既然电能有磁效应，那磁能否有电的效应呢？从那之后，不少科学家做了多种实验，包括法拉第（Michael Faraday，1791—1867）的早期实验在内均未获得成功，其原因主要是这些实验都是在静止或恒定的条件下进行的。经过了长达十年的探索，终于于 1831 年 11 月 24 日法拉第在英国皇家学会宣布他发现了电磁感应现象，并指出，电磁感应与静电感应不同，感应电流并不是与源电流有关，而是与源电流的

变化有关，感应电流来源于感应电动势。这就诞生了电磁学的又一个基本定律。

法拉第并没有仅仅满足于电磁感应现象的发现及其实验结果的归纳与分析，而是更深入地探索电磁现象的本质。他的关于力线的学说实际上已经蕴涵着电场和磁场的概念。尤其是1832年他就已经猜测到电磁作用以波动的形式传播。

英国科学家麦克斯韦（James Clerk Maxwell，1831—1879）学习、研究并继承了法拉第的学说，尤其是关于力线的理论和近距作用的思想。他的早期研究成果包含在两篇重要论文中，即“论法拉第力线”（1855—1856）和“论物理力线”（1861—1862）。他的论文“电磁场的动力学理论”于1864年12月8日在英国皇家学会宣读，这标志着麦克斯韦电磁理论的正式诞生。在1865年正式发表的同名论文中，麦克斯韦直接以电磁场为研究对象，建立了普遍地描述电磁运动变化规律的完备方程组。方程组用直角坐标系中的分量形式给出，共20个方程，其中包括20个标量变量，因此在这个意义上是完备的。

麦克斯韦仔细审查了当时已有的电磁学定律的含义和成立条件。通过研究电力线、磁力线和电磁以太，认识了电场和磁场的性质，以及它们之间的内在联系、本质和运动特征，并建立了涡旋电场的概念。在此基础上，明确了建立电磁场普遍规律的方向。又在当时光的波动学说和电磁作用以波动形式传播思想萌芽的启发下明确了创建理论的方向，最后通过引入位移电流实现了自己的愿望。正是有了以上思想基础，就在创立电磁场普遍理论的同时，就预言了电磁波的存在和光的电磁波本质。

但是，由于受他生活时代科学发展水平的限制，麦克斯韦所创立的电磁理论还存在不少问题。最主要的是他接受了以太学说，把电磁场的种种性质都解释为以太的行为。所以，实际上否认电荷、带电粒子，以及电磁场是独立存在的客观实体。由于把一切电磁现象都归结为以太的某种运动状态，以太又充斥整个空间，物质是否存在不影响以太的存在和性质，这样就不存在边界条件问题。所以，麦克斯韦最初的电磁理论实质上是一种关于无限大空间里电磁场运动规律的理论。

麦克斯韦还认为，不论有无物质存在，只要有电场就有以太电荷粒子的电位移，电位移的大小与电场强度成正比。当电荷粒子的电位移随时间变化时，就将形成电流，这就是他所认为的位移电流，它是真实的电流，这种解释现在看来是错误的。

麦克斯韦的电磁理论的另一个缺陷是，他完全忽略了电磁“源”的作用，没有关注电磁场是怎样产生的。虽然他预言了电磁波的存在，但从未关心如何获取电磁波，没有试图通过实验证明电磁波的存在。

尽管如此，麦克斯韦仍然是一位伟大天才的科学家，他的理论开启了电磁学发展的新纪元，为以后的探索指明了方向，使电磁学获得迅速和全面的蓬勃发展，是当代电磁理论宏伟壮丽科学巨厦的牢固根基。

但是，由于当时在科学界机械论和超距作用的影响还很大，很多物理学家对

麦克斯韦的电磁理论持怀疑态度，只有少数物理学家如亥姆霍兹（Helmholtz）和玻尔兹曼（Baltzmann）等认识到这一理论的重要意义并表示支持。1879 年亥姆霍兹建议他的学生赫兹（Heinrich Rudolf Hertz，1857—1894）参与对麦克斯韦电磁理论的验证实验。

实际上，早在 1884 年赫兹就对麦克斯韦的电磁理论作了系统的研究并开始发表论文。从 1885 年秋起就着手开展亥姆霍兹倡导的对电磁波的实验研究工作。到 1887 年赫兹首次通过实验实现了电磁振荡的发射和接收，证实了麦克斯韦所预言的电磁波的存在。此后还研究了电磁波的传播、反射和折射、驻波等电磁波的光学性质。

赫兹的实验完全改变了人们对麦克斯韦电磁理论的态度，大大激发了人们对电磁场研究的热情，带头的也是赫兹。在 1888 年到 1890 年期间他多次发表论文，讨论麦克斯韦方程组的改造问题。参与这方面工作的还有亥维赛德（Heaviside），他们运用自己矢量分析方面的知识，提出了到现在还在广泛采用的麦克斯韦方程组的现代形式。

在 1864 年麦克斯韦提出的方程组中包括了矢量势$\vec{A}$和静电势 ψ，其中$\vec{A}$是在时间中变化的，而 ψ 的传播却是不需要时间的，从而出现了矛盾。赫兹通过引入磁矢势的方法消去了方程中的矢量势。亥维赛德认为电和磁之间应该是对称的，他希望通过对麦克斯韦方程组的改造，清晰地反映出这种对称性。他的这一愿望通过消去$\vec{A}$和引入磁流项而完成。1888 年他引入了旋度（curl）、散度（div）和梯度（grad）等符号，并用黑体字母表示矢量，使麦克斯韦方程组具有了现在通用的形式。

对电磁理论下一步发展做出重大贡献的是洛伦兹（Hendrik Antoon Lorentz，1853—1928），他把麦克斯韦电磁理论提升到一个全新的高度，使人们对电磁场本身及其与物质的相互作用的认识更加深刻，解决了麦克斯韦理论中存在的几个重大问题。早在 1875 年洛伦兹就发表论文《关于光的反射和折射的理论》，认为带电粒子是客观存在的实体，全部的电磁现象除以太外还必须考虑带电的物质粒子的独立作用，这样就把物质的作用与以太的作用完全分开。这与麦克斯韦理论中的观点完全不同，麦克斯韦认为电磁场是以太的某种状态，是从属于以太的，不受物质的影响。在洛伦兹的理论中，由于物质起着独立的作用，那么无论是场的强度量还是极化量在不同物质的界面上就可能是不连续的。这就是说，电磁场理论在解决存在不同物质交界面时的电磁问题时需要考虑边界条件。

到 1878 年洛伦兹发表了第二篇论文《论光的传播速度与媒质密度及结构的关系》，在这篇论文中洛伦兹设想，物质由分子组成，以太充斥于分子之间并与真空中的相同，分子受到周围以太的作用，这种作用与分子的结构有关。介质中的宏观电磁场应包括所有自由电荷产生的场和所有分子产生的束缚电荷所激发的场。在这种假设下也就解释了色散现象。

到 1892 年，洛伦兹发表了重要论文《麦克斯韦的电磁理论及对运动物质的

应用》，标志着经典电子论的创立。在这篇文章中洛伦兹认为，以太是绝对静止的，它与物质在力学上是完全独立的，以太与物质之间只有电磁作用。物质粒子所带电荷使以太的电磁状态发生变化，反过来又使物质粒子受到电磁力的作用。他假定物质分子中包含有传导带电粒子（自由电荷）、极化带电粒子（束缚电荷）等，并在此基础上讨论了电介质的电磁现象。

按照洛伦兹的观点，在微观上普通物质由大量的带正、负电荷的带电粒子构成，大群微观带电粒子的集体行为决定了物质的各种宏观电磁性质。宏观电磁场方程组应该是微观电磁场方程组的平均结果，并假定麦克斯韦方程组在微观尺度上仍然成立。通过这一方法得出了电磁场的本构关系，这样就使新的方程组真正适用于物质存在的情况。

洛伦兹的另一大贡献是研究运动物质中的电磁场，并给出了洛伦兹变换。到1905年爱因斯坦（Albert Einstein，1879—1955）在前人工作的基础上，认定了光速的不变性，并抛弃了时间的绝对性，最后创立了狭义相对论。相对论是电磁理论的合乎逻辑的继续和发展，即诞生了相对论电动力学。到此人们已彻底地否定了以太的存在，并认识到电磁场是物质存在的一种形式。

到20世纪初，逐渐发现量子效应，麦克斯韦电磁理论的局限性也慢慢显现了出来，于是又发展出了量子电动力学，使人类对电磁场的认识达到了一个全新的高度。但是，对解决宏观电磁场问题麦克斯韦方程仍然可作为最基本的出发点。

0.2　电磁理论的重要意义

电磁理论是继牛顿力学理论之后又一最成功、影响最深远且形式最优美的物理理论体系。正如爱因斯坦在麦克斯韦纪念文集中所写到的：“自从牛顿奠定理论物理学的基础以来，物理学的公理基础最伟大的变革是由法拉第和麦克斯韦在电磁现象方面的工作所引起的。”

电磁理论对科学技术影响的深度和广度无以伦比，这是因为一方面它正确地描述了自然界电磁现象的基本规律，也提供了一套认识自然和解决问题的正确方法；另一方面电磁作用也是对自然规律影响范围最广泛的自然力。迄今人类所知道的物质间的基本物理作用共有四种，即引力作用、电磁作用、弱作用和强作用。其中引力作用主要表现在大尺度范围大物体之间，在小物体之间的作用表现相对较弱。弱作用和强作用主要表现在原子核内部。唯独电磁作用既明显地表现在宏观尺度的物理过程中，又表现在原子、分子之间和原子内部的微观尺度内，是固体、液体和气体的一切物理和化学性质的根源。

正是由于以上原因，除了直接发展出相对论电动力学和量子电动力学之外，还派生出了等离子体物理、磁流体物理、无线电物理和电子物理学等新型学科。在工程技术领域，电磁理论的应用和影响更是广泛。电磁理论及其成果的最早期

直接应用是无线电通信和雷达技术，影响到的领域则遍及空间科学、地学、生命科学、材料科学和信息科学等。在军事科学领域，直接的应用有电子战、隐身与反隐身。在技术领域有卫星通信、光通信、导航、遥感等。可以说，没有哪一门科学能像电磁学这样深刻而广泛地影响着人类对自然的认识、科学和生产技术的发展和日常生活的方式。甚至可以说，没有电磁场和电磁波的知识和应用，就没有现代人类的文明。只要我们稍加注意就会发现，当代人类活动的各个方面，从科学探索、技术的开发到各个行业的生产和管理，以及日常生活的各个方面，处处都能看到电磁学的各种应用。

麦克斯韦电磁理论是在总结宏观电磁实验规律的基础上发展出来的，当时不可能认识电磁场本身及微观粒子的量子效应，所以是宏观电磁理论或经典电磁理论。发展到洛伦兹的经典电子论，把电磁波与物质作用的宏观效果反映到麦克斯韦的电磁场方程组中，使之成为完备的描述宏观电磁现象一般规律的方程组，使得通过求解麦克斯韦方程组可预测很多复杂情况下的电磁形态。这时在各种条件下求解麦克斯韦方程组就成了电磁理论的主要发展方向。根据电磁波工程应用的需要，主要发展了电磁振荡和谐振系统理论、电磁波的导波理论、电磁场的辐射（天线）系统理论，以及电磁波的空间传播理论等。正是由于这些理论的发展才使很多工程技术得以实现并不断完善，如雷达技术、微波通信、光通信、卫星通信、计算机技术和互联网技术等。

当前宏观电磁理论的发展主要是与计算机技术的发展相结合，从而诞生了一个新兴分支学科——计算电磁学。

现代技术的许多方面都与电磁场尤其是高频电磁场有关。对复杂的高频电磁系统的分析与综合，以及对高频电磁场与复杂结构系统相互作用的分析与计算，都成为现代技术发展的重要课题。在通信、雷达、物探、电磁防护、电磁兼容、电磁医疗和电磁隐身等战略防御领域中，高频电磁场的传输、辐射、散射和透入等问题都起着非常重要的作用。面对这些复杂的电磁场问题通过分析方法求得麦克斯韦方程的封闭形式的解析解是不可能的。计算电磁学的发展为这些问题的近似求解提供了可能，至少能满足工程所要求的精度。

现代的电磁系统大多是在一个非常复杂的环境中工作，与电磁波相互作用的也往往是形状和结构都极为复杂的系统。例如，很多在飞机、火箭和舰船上使用的雷达系统周围有很多机械或电磁系统，而且它们本身和四周结构一起构成与电磁波作用的复杂环境。首先，这些系统往往是电大的（即其线度往往达数十个工作波长）；其次，其外形往往很不规则，并包含多种形态的构件，还可能包含多种材料成分，以及孔、缝、内腔和负载等各种内部结构。在这样的系统中可能存在非常复杂的电磁现象。要解决这样复杂的电磁问题，对当代计算电磁学也是一种严重的挑战，这些也促使计算电磁学不断向前发展。

在当代，由于核爆炸会产生强大的电磁脉冲，微波武器也使用电磁脉冲信号，人们开始重视瞬变电磁场问题。现代电子技术的发展使电磁瞬变现象显得更

加重要。这种瞬变电磁场是一种宽频带电磁信号，原来只关注稳态简谐电磁场的理论成果已经不能满足要求。为了了解瞬变电磁现象需要在时域求解电磁场问题。这就要把原来只关心边值问题的电磁理论发展为初、边值问题。由于增加了一个时间变量，这使得麦克斯韦方程求解的难度大大增加。在早期的求解中大都是采用积分变换的方法先隐去时间变量，在求解频域解后再进行反变换而获得所需的时域解。这样的解法不仅要求获得封闭形式的频域解，还要求所得频域解能求得逆变换。可想而知，能满足这种要求的只能是一些相对简单的问题。面对电磁工程中提出的许多复杂的瞬变电磁场问题只能依靠数值方法。为适应这种需要，在计算电磁学中发展了一些直接时域方法，在这些方法中，大部分可以依时间步推进进行计算，可以直接求得问题的近似时域解。

由于计算电磁学的发展，许多原来无法求解的电磁场问题可以求解了。可以毫不夸张地说，几乎所有与电磁场有关的科学技术领域无不因为计算电磁学的发展而受益。在这些领域中，凡是需要对有关电磁场问题进行定量分析和精心设计的，往往都需要用计算电磁学的方法加以解决。

从理论研究的角度看，计算电磁学的出现已经改变了电磁理论的面貌，使人们能用统一的方法解决各种复杂的电磁场问题，并更直接地用场的观点去阐述各种电磁现象。可以说，计算电磁学正在成为电磁理论研究的重点，并已大大丰富了电磁理论。

0.3　电磁理论与现代数学

麦克斯韦成功地创立描述电磁场普遍规律的方程组，不仅在于正确地继承并发扬了电磁现象的场的观念和近距作用的原则，以及创造性地提出涡旋电场的观点并以位移电流的形式补充到方程组中，还在于他采用并发展了适合于描述电磁场规律的数学工具。

法拉第提出了力线和场的观念，但由于受数学能力的限制未能把他的研究成果用数学方法概括为精确的定量理论。麦克斯韦正是抱着给法拉第的观念提供数学方法基础的愿望开始了他的具有划时代意义的创造性的电磁理论的研究工作。他曾说：“当我开始研究法拉第时，我发现他考虑问题的方法也是数学的，尽管没有以通常的数学符号的形式来表示；我还发现，它们完全可以用一般的数学形式表示出来，而且可以和专业数学家的方法相媲美。”

事实上，早在 1842 年，伟大的英国物理学家汤姆孙（William Thomson，1824—1907）就以他理论物理学家的素养对法拉第的理论进行了类比研究和数学概括，其成果有力地支持了法拉第通过力线表达出来的近距作用观点，并为麦克斯韦的电磁学理论研究提供了方向和方法上的启示。

1842—1846 年，汤姆孙分析了热在均匀介质中的传递与法拉第感应力在电介质中的传递两种现象的相似性，指出两种现象中热源和电荷、等温面与等势

面、热流分布与电力分布的对应性。通过这种对比使汤姆孙认为法拉第的电力线与热流线的性质类似，这样就出现了热与电的数学理论的对比研究。接着，汤姆孙又研究了电现象与弹性现象的相似性，他指出表示弹性位移的矢量的分布可与静电体系的电力分布类似。后来他得出结论，流体力学的许多定理和研究方法可以移植到电磁学的研究中。后来麦克斯韦把汤姆孙的类比法富有成效地发展成为建立电磁理论的重要方法，充分地运用当时在其他学科尤其是力学中已得到充分发展的数学方法。在这方面他自己认为“所谓物理类比，我认为是一种科学定律与另一种科学定律之间的部分相似性，它使得这两种科学可以互相说明。这样，所有数学的科学都是建立在物理定律和数学定律的基础上，因而精密科学的目的就是要把自然问题简化为通过数学的运算来确定各个量”。

类比研究的成功说明，不同物理现象中物理量之间的一些关系和变化规律可用相同或类似的数学方法来描述，这不仅说明某些物理规律之间所具有的某些内部统一性，也说明数学方法的一种普适性。也就是说，电磁理论的研究可以借用在其他物理领域中，如力学、热学等，已经行之有效的很多数学方法。

事实上，在电磁学快速发展的 18 ~ 19 世纪，伴随着其他物理领域的发展，也是近代数学大发展的时期；或者说，也正是有了近代数学的大发展才保证了同时期物理学的快速发展。这一点从那个时代对数学的发展起了关键作用的数学家同时也是伟大的物理学家就可以看出，比如，欧拉（Leonhard Euler，1707—1783）、拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange，1730—1813）、拉普拉斯（Pierre-Simon Laplace，1749—1827）、傅里叶（Jean Baptiste Joseph Fourier，1768—1830）、高斯（Johann Carl Friedrich Gauss，1777—1855）、格林（George Green，1793—1841）和亥姆霍兹（Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz，1821—1894）等。在那个时代已经形成用数学解决物理问题的一种典型方法。根据相关问题的观察和实验所确立的基本规律，摈弃次要因素，借助数学工具建立有关物理量之间的相互制约关系，这种数学关系就是所研究问题的数学模型。在数学方面需要研究数学模型的适定性和求解的方法，在物理方面则需要对所得结果给予合理的解释并接受实践的检验。在物理上已经出现的数学模型主要是包括某种数学形式的一组方程和体现环境的定解条件，并称为数学物理方程，其中包括常微分方程、偏微分方程和积分方程等。

麦克斯韦方程给出的是宏观电磁运动的普遍规律，它是建立解决各类具体问题数学模型的基础。麦克斯韦方程的正确性，除了麦克斯韦本人依照方程所作预言的正确性外，还要由它所建立的各种具体问题数学模型的正确性来检验。现在，麦克斯韦方程自诞生一个多世纪以来在宏观电磁场领域已经由无数事实证明它经受住了这种检验，而且已经成为电磁理论发展和应用的主要手段。也正是由此可以看出，数学在电磁理论发展和应用中所起到的关键作用。

斯特莱顿（Julius Adams Stratton）在其 1941 年出版的《电磁理论》（*Electromagnetic Theory*）一书中全面总结了在此之前电磁理论所发展和使用的各种数学

方法及所取得的成就。后来，柯林（Robert E. Collin）在他的《导波场论》（*Field Theory of Guided Waves*，1960）和哈林登（Roger F. Harrington）在他的《正弦电磁场》（*Time-Harmonic Electromagnetic Fields*，1961）书中则总结了到20世纪60年代以前电磁理论的发展及所应用的主要数学方法。为了解决科学技术发展中提出的越来越复杂的电磁场问题，必须发展和应用着各种各样越来越复杂的数学方法。

19世纪后期和20世纪初，数学的各个分支已经得到了非常广泛的研究和发展，并呈现出高度的专门性和复杂性，进入了现代数学的发展阶段，20世纪前期数学又得到了迅速的发展。

一般认为，现代数学以康托（Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor，1845—1918）建立集合论（1874）为起点，现代数学的研究对象是一般集合及由其构成的各种空间和流形等，并通过映射概念把它们联系起来。现代数学具有高度抽象和高度统一的特点，它更深入地揭示了数学规律的本质，从而具有更广泛的适用性。正因为有这种特点，现代数学得到了更广泛的应用，也就具有了更强大的影响力，它已经成为现代科学技术发展的强大动力，其影响范围已突破了物理和工程两大传统上最依赖数学的领域。在当代，没有现代数学的基本知识，就难以从事具有现代水平的科学技术研究，甚至难以看懂现代文献资料，更难以进行必要的国际学术交流。

和其他科学技术领域一样，现代数学对电磁理论发展的影响越来越明显和深刻，尤其是泛函分析和分布论。这些数学观点和方法的应用使电磁理论更加系统和严谨，也就更加合理，也更加深入地揭示了电磁现象的本质。目前，已经出现了一些专门论述电磁理论现代数学基础的书籍。汉森和雅可夫列夫（George W. Hanson and Alexander B. Yakovlev）的书《电磁学的算子理论》（*Operator Theory for Electromagnetics*）就是典型的一种，其中用泛函分析的理论梳理了一些重要的电磁理论问题，而周永祖（Weng Cho Chew）的书《非均匀媒质中的场与波》（*Waves and Fields in Inhomogeneous Media*）和木若兹奥夫斯基（Mrozowski Michal）的书《被导电磁波》（*Guided Electromagnetic Waves*）则大量地运用泛函分析的观点和方法论述相应的电磁场问题。万布兰戴尔（Jean Van Bladel）的书《奇异电磁场和源》（*Singular Electromagnetic Fields and Sources*）则用分布论的观点讨论了电磁场的诸多奇异问题。以上仅是一些典型的例子，但由此已清楚地反映出现代数学对电磁理论的重要意义和电磁理论的发展趋势。

在国内，章文勋教授的书《电磁场工程中的泛函方法》（1985）率先用泛函分析方法讨论了电磁场的计算问题。文舸一教授的《电磁理论的新进展》（1999）则介绍了国际上用现代数学发展电磁理论的趋势。更值得一提的是宋文淼教授等的论著《矢量偏微分算子》（1999）和《电磁波基本方程组》（2003），在书中他们认为用现代数学可以建立有别于（建立在经典数学基础之上的）经典电磁场理论的现代电磁场理论。当然，我们现在还没有看到不是经典电磁理论

的现代电磁理论，但我们已看到了现代数学对经典（宏观）电磁理论的影响，而且现今的电磁理论的确是具有了一些新的特点。我们现在使用“现代电磁理论”这一名称只是想表明电磁理论所具有的新面貌，但仍然属于经典电磁理论的范畴。

在我们看来，电磁理论的新面貌主要表现在：①现代数学的理论、观点和方法在电磁理论中的应用越来越广泛；②计算电磁学的发展和应用成为电磁理论的重要方面；③瞬变电磁理论重要性的提高，促使时域电磁学的发展受到更多重视；④出现了一些新的生长点，使电磁理论的研究和应用领域不断扩大。

在以上的叙述中我们主要强调了在电磁理论发展中数学方法发挥的重要作用，但我们也要正确认识数学和物理学之间的相互关系。数学有其自身严格的逻辑体系，它的推理和演绎过程都要满足严格的条件。物理现象和物理过程也有其自身的独特规律和存在条件。当用数学描述物理问题时必须严格地考虑它们各自具有的独特规律。为了使某些物理现象能用某种数学方法描述，首先要从复杂的物理过程中抽象出有代表意义的可以满足所用数学方法要求的简化模型。为了满足数学上的严格要求，在建立数学模型时往往要对物理过程做一定的假设。因此，当对这种模型求得数学解时，虽然在数学逻辑上是严格的，但对实际的物理过程却可能是近似的，尤其是不能把由此得到的结论用于在数学上不满足要求的物理过程，否则可能会犯严重的错误。

还要强调的一点是，要正确地认识经典数学和现代数学的关系。我们知道，现代数学是在经典数学的基础上发展起来的。前者是对后者合理的继承和必要的修正，从而具有更深刻和更广泛的意义。所以，两者是继承和发展的关系，而不是全面否定。实际情况是，在经典数学能合理应用的条件内，经典数学方法仍然可以合理地应用，其结果是可靠的，当然可以用现代数学的观点加以论述。这样，仍能合理应用的经典数学就自然地成为现代数学合乎逻辑的且不可或缺的组成部分。

第 1 章　宏观电磁场的基本规律

现代宏观电磁场理论建立在坚实的科学实验和工程实践的基础上，并已经形成了一个十分完善的理论体系。宏观电磁场理论的根基是麦克斯韦方程组，该方程组建立的物理基础和方法已经在先行课程中进行过详尽的讨论。本章以麦克斯韦方程组为出发点，系统深入地讨论宏观电磁场一些最基本的规律，并以此作为以下各章节论述问题的理论基础。

1.1　描述宏观电磁场的基本方程组

早在 1865 年，伟大的英国物理学家麦克斯韦在其论文《电磁场的动力学理论》中提出了“电磁场的普遍方程组”，从而奠定了宏观电磁场的理论基础。当初，麦克斯韦提出的方程组由 20 个标量方程构成，后经赫兹和亥维赛德作了简化改造，才有了现在的通用形式，并把它命名为麦克斯韦方程组。对麦克斯韦方程组的理解和诠释也经历了一个不断深入的过程，在纠正了曾经存在的一些错误观念后，才达到了当代的共识。一百多年来，无数科学实验和电磁场工程实践没有发现与之相违背的事例，这使人们更坚定地相信，宏观电磁现象的确可由麦克斯韦方程组正确描述，它也就成为解决各种宏观电磁场问题的总的出发点。本书将采用国际实用单位制。

1.1.1　微分形式的麦克斯韦方程组

在麦克斯韦方程组中，用于描述电磁场特性的主要有四个物理参量，分别用$\vec{E}$、$\vec{D}$、$\vec{H}$和$\vec{B}$表示，其中$\vec{E}$称为电场强度（单位：伏/米，V/m），$\vec{D}$称为电通量密度（单位：库/米^2，C/m^2），$\vec{H}$称为磁场强度（单位：安/米，A/m），$\vec{B}$称为磁通量密度（单位：韦/米^2，Wb/m^2）。一般情况下，以上物理量均为位矢$\vec{r}$和时间 t 的函数。宏观条件下，在媒质连续的区域，可假定场量是$\vec{r}$和 t 的连续函数。作为电磁场源的电流密度$\vec{J}$（单位：安/米^2，A/m^2）和电荷密度 ρ（单位：库/米^3，C/m^3）也被假定为$\vec{r}$和 t 的连续函数。在媒质的连续区域麦克斯韦方程组具有如下的微分形式。

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r},t) \tag{1.1.1}$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}(\vec{r},t) + \vec{J}(\vec{r},t) \tag{1.1.2}$$

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t) \tag{1.1.3}$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r},t) = 0 \tag{1.1.4}$$

对式（1.1.2）两边求散度再代入式（1.1.3）又可得到

$$\nabla \cdot \vec{J}(\vec{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) = 0 \tag{1.1.5}$$

这是表征电荷守恒的连续性方程，它也可看作是一个基本方程。

对于时变电磁场，在以上五个方程中只有三个是独立的。例如，方程（1.1.3）和（1.1.4）可由其他三个方程导出。对方程（1.1.1）求散度得

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \vec{B} \tag{1.1.6}$$

由于$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = 0$，故有$\nabla \cdot \vec{B} = 0$，这正是方程（1.1.4）。对方程（1.1.2）取散度得

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \vec{D} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \tag{1.1.7}$$

再利用方程（1.1.5）就可得到方程（1.1.3）。此外，我们还可以利用式（1.1.1）~（1.1.3）导出方程（1.1.4）和（1.1.5）。这样的关系，可使我们在方程的应用上有一定的灵活性。

习惯上，在求解时变电磁场问题时常把麦克斯韦方程组中的两个旋度方程（1.1.1）和（1.1.2）视为两个基本方程，而两个散度方程（1.1.3）和（1.1.4）则视为两个辅助方程。当然，两个散度方程仍然表示电磁场的基本规律，是任何实际电磁场都必须满足的。对静态电磁场而言，由于场量不随时间变化，电场和磁场之间没有耦合，则方程（1.1.3）和（1.1.4）不再能由方程（1.1.1）和（1.1.2）导出。

麦克斯韦方程组建立在宏观观测所获规律的基础之上，因此其适用范围应是宏观电磁现象。的确如此，自 20 世纪初发现量子现象并建立了量子论以后，人们就认识到，微观世界的物理规律与宏观世界大为不同，不能将宏观世界中认识的规律简单地用于微观世界。但是，现在的麦克斯韦方程组用微分方程表达，要求在它适用的每个空间点上成立，即要求方程中的物理量可连续地变化，且可以取值于无限小的空间点。这样看来，所用的微分形式的数学表达与物理上的宏观条件存在一定的差异。那么，这种数学表达的合理性应该如何理解呢?

为了正确理解以上问题，我们先来了解实际的物理现象。在微观上，电磁场是以光子为基本单位，是分立的。但是，单个光子的能量是非常微小的。例如，当频率为 10^8 Hz，5μV/cm 的均方根场强，相当于 10^{12} 个光子/($\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s}$）的流量。宏观测量到的是许多光子的积累效应，少数光子的起伏在一般宏观测量中是观察不到的，从而可视作是连续的。此外，作为电磁场主源的电荷（及其运动）也是分立的，其基本单位为 e，它的量级是

$$e = 1.60217733 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

任何实际电荷的绝对值只能是 e 的整数倍。但是，从宏观上看基本单位 e 的电量

是足够小的，完全可以认为宏观电荷是连续变化的。例如，在 1V 电压下 1μF 的电容器每一个极板上要有至少 10^{12} 个基本电荷，而 1μA 的电流就相当于 6.2×10^{12} 个 e/s。这也说明，电荷和电流在宏观上可认为是连续变化的。

根据以上所述，我们可以这样理解描述宏观电磁规律的麦克斯韦方程组(1.1.1)~(1.1.4)，在量子效应不起明显作用的情况下它是成立的，它适用的每个空间点只限于一个宏观区域，只是在宏观上看来这个区域的尺度可视为无限小，以至于在数学上也是可以接受的。即便如此，麦克斯韦方程组也只能是宏观电磁现象的一种数学模型，它的正确性还必须接受实践的检验。

在麦克斯韦方程组的实际应用中，往往要对方程组中的物理量进行更多的求导或积分运算，为保证这些运算的顺利进行，要求他们具有必要的数学性质。今后我们都假设这些物理量是单值有限的，且有足够的连续性和连续可微性，可以自由地交换微分和积分的顺序。当这些条件不满足时，再做特殊讨论。

此外，这里所讨论的问题都假定媒质是静止的，其特性不随时间变化，也不随场的强度变化。

1.1.2 电磁媒质的本构关系

在麦克斯韦方程组（1.1.1）~（1.1.4）中有 5 个矢量函数$\vec{E}$、$\vec{D}$、$\vec{B}$、$\vec{H}$、$\vec{J}$和一个标量函数 ρ，相当于共有 16 个标量函数。按照前面的分析，把方程(1.1.1)、(1.1.2) 和 (1.1.5) 看作是独立的，只有 7 个标量方程，用它们无法确定 16 个标量函数。为了使方程组是完备的，还需要场量之间的其他关系。在真空中，$\rho=0$，$\vec{J}=0$，场量之间存在关系

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E},\quad \vec{B}=\mu_0\vec{H} \tag{1.1.8}$$

其中，ε_0 为真空的介电常数；μ_0 为真空的磁导率。所以，真空中的麦克斯韦方程成为

$$\nabla\times\vec{E}(\vec{r},t)=-\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}(\vec{r},t) \tag{1.1.9}$$

$$\nabla\times\vec{H}(\vec{r},t)=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t) \tag{1.1.10}$$

$$\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r},t)=0 \tag{1.1.11}$$

$$\nabla\cdot\vec{H}(\vec{r},t)=0 \tag{1.1.12}$$

该方程组中，只有两个矢量函数，而有两个矢量函数的独立方程（1.1.9）和(1.1.10)，因此已是一个完备的方程组。

各种物质均是不同性质的电磁媒质，在非真空空间中，电磁场与媒质会产生相互作用，其结果是电磁场量之间具有不同于式（1.1.8）所表示的关系。在宏观电磁场理论中通常是把$\vec{D}$、$\vec{B}$和$\vec{J}$表示成$\vec{E}$和$\vec{H}$的函数关系，这种关系可以是复杂的。由于作用的滞后效应，可能依赖于作用的历史。当电磁场的强度很高时，这种关系也可能是非线性的。不同物质的电磁性质存在巨大差异。由于这里涉及

的是电磁场与微观粒子的作用问题，要严格地求得这种关系需要用量子力学的方法。用宏观的方法也能得到一些近似的结果，可以满足一般情况的要求。

上述电磁场量在媒质中的函数关联称为电磁媒质的本构关系。如果这种关系是线性的，我们就称之为线性媒质。如果这种关系与方向无关，就称媒质是各向同性的，否则称为各向异性的。媒质在电磁场的作用下主要出现极化、磁化和传导等三种电磁过程，分别用极化强度$\vec{P}$（C/m^2）、磁化强度$\vec{M}$（A/m）和传导电流密度$\vec{J}$（A/m^2）等物理量描述。对于线性且各向同性的媒质，极化强度只与电场强度成正比，磁化强度只与磁场强度成正比，即有关系

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{M} = \chi_m \vec{H} \tag{1.1.13}$$

其中χ_e和χ_m分别称为媒质的电极化率和磁极化率。在这样的媒质中有如下的本构关系。

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \tag{1.1.14}$$

其中，$\varepsilon = (1 + \chi_e)\varepsilon_0$，称为媒质的介电常数；$\mu = (1 + \chi_m)\mu_0$，称为媒质的磁导率。有时表示成$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$，$\mu = \varepsilon_r \mu_0$。其中，$\varepsilon_r = 1 + \chi_e$，称为相对介电常数；$\mu_r = (1 + \chi_m)$，称为相对磁导率。

对大多数线性各向同性导电媒质，在电场的作用下会出现传导电流，且有关系

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \tag{1.1.15}$$

其中，σ 称为媒质的电导率。这就是欧姆定律的微分形式。

有了式（1.1.14）和（1.1.15）这种本构关系，就有了 9 个标量方程，于是方程组（1.1.1）~（1.1.5）也就成了完备的形式。

对于线性各向异性媒质，其介电常数、磁导率和电导率要用张量或并矢来表示。用并矢形式表示的本构关系为

$$\vec{D} = \bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \vec{E}, \quad \vec{B} = \bar{\bar{\mu}} \cdot \vec{H}, \quad \vec{J} = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{E} \tag{1.1.16}$$

在用到 $\bar{\bar{\varepsilon}}$、$\bar{\bar{\mu}}$ 和 $\bar{\bar{\sigma}}$ 等并矢时再给出它们的具体形式。

显然，对于线性媒质而言，麦克斯韦方程也是线性的。

电荷和电流是电磁场之源，在求解电磁场问题时通常都假定源是已知的。在这种情况下，由于已有了本构关系，对于时变电磁场而言只要两个旋度方程（1.1.1）和（1.1.2）就已经是完备的了。因此，以下在求解时变电磁场问题时，总是以两个旋度方程为出发点。

虽然媒质也都是由不连续的粒子构成，在宏观上也假定它们是连续的。因此，对连续媒质也把它们的参数 $\bar{\bar{\varepsilon}}$ 和 $\bar{\bar{\mu}}$ 视为$\vec{r}$的连续函数。

1.1.3　频域麦克斯韦方程组

以上所讨论的麦克斯韦方程组中的场量均设为时间的函数，且时间为显变量，故称它们为时域方程组。在一般的三维问题中场量还是位矢$\vec{r}$的函数，由于

位矢需要三个坐标变量来确定，时域场量就是四个变量的函数。在求解多变量函数方程时，如果能减少变量个数，可使方程的求解大为简化。在求解电磁场问题时，通常是用傅里叶变换方法隐去时间变量，把麦克斯韦方程变为频域形式。如果用$\vec{K}(\vec{r},\ x)$表示时域函数，则其傅里叶变换为

$$\begin{aligned}\vec{K}(\vec{r},\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \vec{K}(\vec{r},t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= F[\vec{K}(\vec{r},t)]\end{aligned} \tag{1.1.17}$$

其反变换为

$$\begin{aligned}\vec{K}(\vec{r},t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{K}(\vec{r},\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \\ &= F^{-1}[\vec{K}(\vec{r},\omega)]\end{aligned} \tag{1.1.18}$$

我们假设所讨论的物理场量都能满足傅里叶变换在数学上的要求。于是，把以上变换用于方程（1.1.1）~（1.1.4）我们即可得到频域中的麦克斯韦方程组。

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r},\omega) = -\mathrm{i}\omega \vec{B}(\vec{r},\omega) \tag{1.1.19}$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r},\omega) = \mathrm{i}\omega \vec{D}(\vec{r},\omega) + \vec{J}(\vec{r},\omega) \tag{1.1.20}$$

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r},\omega) = \rho(\vec{r},\omega) \tag{1.1.21}$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r},\omega) = 0 \tag{1.1.22}$$

对于时谐电磁场这种特殊形式，由于其频率是单一固定的，其场量$\vec{K}(\vec{r},\ t)$可表示为

$$\vec{K}(\vec{r},t) = \vec{K}_0(\vec{r})\cos(\omega t + \varphi) \tag{1.1.23}$$

其中，$\vec{K}_0(\vec{r})$为实数量，还可进一步表示为

$$\begin{aligned}\vec{K}(\vec{r},t) &= \vec{K}_0(\vec{r})\mathrm{Re}\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)}\} \\ &= \mathrm{Re}\{\vec{K}_0(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\} \\ &= \mathrm{Re}\{\vec{K}(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\}\end{aligned} \tag{1.1.24}$$

其中，$\vec{K}(\vec{r}) = \vec{K}_0(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$为复相量。

把方程（1.1.1）~（1.1.4）中的场量均按式（1.1.24）的方式表示，并消去$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$项，就可以得到适于时谐场的复数形式。

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{i}\omega \vec{B}(\vec{r}) \tag{1.1.25}$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \mathrm{i}\omega D(\vec{r}) + \vec{J}(\vec{r}) \tag{1.1.26}$$

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \tag{1.1.27}$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \tag{1.1.28}$$

把方程（1.1.19）~（1.1.22）与方程（1.1.25）~（1.1.28）进行比较不难发现，两组方程在形式上是相同的。但是，当仔细考察方程中所包含的场量与对应的时域量之间的关系时又可发现，两组方程中的场量在单位上存在差别。因此，依据不同方程求解的场量在转换成相对应的时域量时，应采用相对应的方法。由于两组方程在形式上相同，故其求解方法也一样。为了方便，有时把方程

（1. 1. 19）~（1. 1. 22）中场量的变量 ω 不明确标出，成为与方程（1. 1. 25）~（1. 1. 28）完全相同的形式。只是要注意的是，当求解的是非时谐电磁场问题时 ω 仍是一个参变量。

如果设定的是时谐场，我们称所求解的是稳态电磁场问题，因为场随时间的变化形式是固定的。除了特别声明的章节外，我们都是在频域讨论电磁场问题。

在方程（1. 1. 26）中 $\vec{J}(\vec{r})$ 表示空间 $\vec{r}$ 点的总电流密度。一般情况下它包括两部分，一是外加电流，用 $\vec{J}^i(\vec{r})$ 表示，一是由于媒质的导电率 $\bar{\bar{\sigma}}$ 不为零而导致的传导电流，用 $\vec{J}^c(\vec{r})$ 表示。于是存在关系

$$J(\vec{r}) = \vec{J}^i(\vec{r}) + \vec{J}^c(\vec{r}) \tag{1.1.29}$$

根据欧姆定律 $\vec{J}^c = \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{E}(\vec{r})$ 式（1. 1. 26）又可表示成

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \mathrm{i}\omega\bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \vec{E}(\vec{r}) + \bar{\bar{\sigma}} \cdot \vec{E}(\vec{r}) + \vec{J}^i(\vec{r}) \tag{1.1.30}$$

定义新的复介电常数并矢

$$\tilde{\bar{\bar{\varepsilon}}} = \left(\bar{\bar{\varepsilon}} - \frac{\mathrm{i}}{\omega}\bar{\bar{\sigma}}\right) \tag{1.1.31}$$

方程（1. 1. 26）又可表示成

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \mathrm{i}\omega\,\tilde{\bar{\bar{\varepsilon}}} \cdot \vec{E}(\vec{r}) + \vec{J}^i(\vec{r}) \tag{1.1.32}$$

对于各向同性媒质就有 $\tilde{\varepsilon} = \left(\varepsilon - \dfrac{\mathrm{i}}{\omega}\sigma\right)$. 所以，只要 $\vec{J}(\vec{r})$ 表示外加电流，对于有耗媒质，其介电常数就为复数量，但在无需特别强调的情况下，我们可能仍采用相同的符号。同样地，在以后的叙述中，无论频域还是时域，我们都用相同的符号表示同一物理量，在需要的时候用变量加以区别。在不需要强调的时候，甚至把所有变量隐去。

1. 1. 4　积分形式的麦克斯韦方程组和电磁场的边界条件

微分形式的麦克斯韦方程组描述的是电磁场的局域性质，它只适用于媒质的连续区域。由于积分运算对被积函数的要求比微分要低，即在假定场量为有限值（函数有定义）的条件下场的积分总是存在的，这使得积分形式的麦克斯韦方程组的应用范围得以扩大。历史上电磁场的基本规律是用微分形式给出的，可以由它们直接推广为积分形式的麦克斯韦方程组，现在我们则由微分形式的麦克斯韦方程组导出其积分形式。

考虑空间中的一个有限区域，其体积为 V，表面为 S，用 $\vec{n}$ 表示 S 上的外法向单位矢量。设 A 为 S 的一部分，其边界为 C。对 V 内有定义的矢量函数 $\vec{F}(\vec{r})$，有如下的斯托克斯（Stokes）定理和高斯（Gauss）定理。

$$\int_S \nabla \times \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} \tag{1.1.33}$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{F}(\vec{r})\mathrm{d}v = \oint_S \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\,\vec{s} \tag{1.1.34}$$

对方程（1.1.1）和（1.1.2）在 S 上进行积分，再利用式（1.1.33）对方程（1.1.3）和（1.1.4）在 V 上进行积分，最后利用式（1.1.34），就可得到它们的积分形式。

$$\oint_C \vec{E}(\vec{r},t)\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B}(\vec{r},t)\cdot\mathrm{d}\vec{s} \tag{1.1.35}$$

$$\oint_C \vec{H}(\vec{r},t)\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{D}(\vec{r},t)\cdot\mathrm{d}\vec{s} + \int_S \vec{J}(\vec{r},t)\cdot\mathrm{d}\vec{s} \tag{1.1.36}$$

$$\oint_S \vec{D}(\vec{r},t)\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \int_V \rho(\vec{r},t)\mathrm{d}v \tag{1.1.37}$$

$$\oint_S \vec{B}(\vec{r},t)\cdot\mathrm{d}\vec{s} = 0 \tag{1.1.38}$$

与微分形式的麦克斯韦方程组不同的是，积分形式的麦克斯韦方程组对电磁场的描述是全域性的，即表示一个区域中的电磁场的总体性质。微分形式与积分形式可以相互转化，彼此等价，但因其表达电磁场特性的角度不同，从而各有独特的作用。

由于积分形式的麦克斯韦方程组适用于媒质的不连续边界，故可以用它导出不连续边界上场量所满足的关系，即电磁场的边界条件。这里我们略去导出过程，只给出最后结果。设有由媒质 1 和媒质 2 构成的突变交界面，分别用角标 1 和 2 表示相应媒质一侧的场量，$\vec{n}$表示交界面上由媒质 2 指向媒质 1 的法向单位矢量，则交界面处两侧场量之间满足以下边界条件。

$$\vec{n}\times(\vec{E}_1-\vec{E}_2)=0 \tag{1.1.39}$$

$$\vec{n}\times(\vec{H}_1-\vec{H}_2)=\vec{J}_S \tag{1.1.40}$$

$$\vec{n}\cdot(\vec{D}_1-\vec{D}_2)=\rho_S \tag{1.1.41}$$

$$\vec{n}\cdot(\vec{B}_1-\vec{B}_2)=0 \tag{1.1.42}$$

其中，$\vec{J}_S$为交界面上的面电流密度；ρ_S 为交界面上的面电荷密度。如果媒质为理想的，则$\vec{J}_S$和 ρ_S 皆为零。

当导体的性能良好时，常把其导电率认为是无限大，并称为理想导体。在理想导体的内部电磁场均为零。如果上面考虑的不连续边界中，媒质 2 为理想导体，则理想导体表面外的电磁场满足边界条件。

$$\vec{n}\times\vec{E}=0 \tag{1.1.43}$$

$$\vec{n}\times\vec{H}=\vec{J}_S \tag{1.1.44}$$

$$\vec{n}\cdot\vec{D}=\rho_S \tag{1.1.45}$$

$$\vec{n}\cdot\vec{B}=0 \tag{1.1.46}$$

在求解电磁场问题时，如果求解区域是开放的，则需要给出电磁场在无穷远处的性质，即需要知道电磁场在无穷远处满足的条件。导出这一条件的基本假设是，空间中任何一点的电磁能量是有限的，任何有限源所产生的电磁能量都是有限的。如果限定电磁场源和物体均位于距坐标原点有限的距离内，电磁场满足的条

件是

$$\lim_{r\to\infty} r\left[\nabla\times\begin{Bmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{Bmatrix}+\mathrm{i}k\hat{r}\times\begin{Bmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{Bmatrix}\right]=0 \tag{1.1.47}$$

通常称它为索末菲（Sommerfeld）辐射条件。其中，k 为波数；$\hat{r}$ 为矢径方向的单位矢量。

1.1.5　广义形式的麦克斯韦方程组

由方程组（1.1.1）~（1.1.4）不难发现，$\vec{E}$与$\vec{H}$和$\vec{D}$与$\vec{B}$之间存在一定的对称性，但就场源而言却是不对称的。这些方程所反映的一个物理事实是，至今在自然界尚未发现与电荷对应的磁荷，当然也就没有与电流相对应的磁流。但是，为了使某些问题分析、计算得以简化，可以人为地引入磁荷和磁流，用以表示一些客观存在的物理现象。例如，可将电流环与磁偶极子所产生的场相类比，如果电流环的尺度足够小，可以等效为一个磁偶极子，于是就引入了正、负磁荷。另外，螺线管所产生的场也可类比为磁流所产生的场，从而引入磁流的概念。把磁荷和磁流引入到麦克斯韦方程中，视作电磁场的等效源，这使方程具有更广泛的意义。

如果分别用 ρ_{m}（单位：韦/米^3，Wb/m^3）和$\vec{M}$（单位：伏/米^2，V/m^2）分别表示磁荷密度和磁流密度，则广义形式的麦克斯韦方程组为

$$\nabla\times\vec{E}(\vec{r},t)=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{r},t)-\vec{M}(\vec{r},t) \tag{1.1.48}$$

$$\nabla\times\vec{H}(\vec{r},t)=\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}(\vec{r},t)+\vec{J}(\vec{r},t) \tag{1.1.49}$$

$$\nabla\times\vec{D}(\vec{r},t)=\rho(\vec{r},t) \tag{1.1.50}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}(\vec{r},t)=\rho_{\mathrm{m}}(\vec{r},t) \tag{1.1.51}$$

显然，这种方程组具有对称性，其中的场量应理解为两类源所产生场的叠加，电荷和电流称为电性源，磁荷和磁流称为磁性源。当描述两种现象的方程具有相同的数学形式时，其解也将表示为相同的数学形式，这种现象称为对偶性（或二重性），具有相同形式的两个方程称为对偶性方程。由方程组（1.1.48）~（1.1.51）不难看出，单独由电性源产生的场和单独由磁性源所产生的场满足的方程组是两个对称方程组，它们的解就具有对偶关系。因此，只要求得一组源所产生的电磁场，就可借助下列对换关系求得另一组源所产生的电磁场。

$$\begin{gathered}\vec{E}\to\vec{H},\quad \vec{H}\to\vec{E},\quad \vec{B}\to-\vec{D},\quad \vec{D}\to-\vec{B}\\ \vec{J}\to-\vec{M},\quad \vec{M}\to-\vec{J},\quad \rho\to-\rho_{\mathrm{m}},\quad \rho_{\mathrm{m}}\to-\rho\end{gathered} \tag{1.1.52}$$

需要指出的是，这并不是唯一的替换关系。

与方程组（1.1.48）~（1.1.51）相对应的也有其频域形式。

$$\nabla\times\vec{E}(\vec{r})=-\mathrm{i}\omega\vec{B}(\vec{r})-\vec{M}(\vec{r}) \tag{1.1.53}$$

$$\nabla\times\vec{H}(\vec{r})=\mathrm{i}\omega\vec{D}(\vec{r})+\vec{J}(\vec{r}) \tag{1.1.54}$$

$$\nabla\cdot\vec{D}(\vec{r})=\rho(\vec{r}) \tag{1.1.55}$$

$$\nabla\cdot\vec{B}(\vec{r})=\rho_{\mathrm{m}}(\vec{r}) \tag{1.1.56}$$

这里不再区分时谐场和非时谐场，只是要注意在转换成时域量时要采用对应的方法。

1.1.6 电磁场的波动方程

如前所述，当场源为已知时，对时变电磁场而言方程组（1.1.48）~（1.1.51）中两个旋度方程是基本的。考虑较一般形式的本构关系，两个旋度方程具有如下的形式

$$\nabla\times\vec{E}(\vec{r},t)=-\bar{\bar{\mu}}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}(\vec{r},t)-\vec{M}(\vec{r},t) \tag{1.1.57}$$

$$\nabla\times\vec{H}(\vec{r},t)=\bar{\bar{\varepsilon}}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t)+\vec{J}(\vec{r},t) \tag{1.1.58}$$

这里已假定 $\bar{\bar{\varepsilon}}$ 和 $\bar{\bar{\mu}}$ 与时间无关。

以上两个方程包含两个未知矢量函数，且是联立的，不能单独求解。为了建立单一未知矢量函数所满足的方程，可利用它们之间的关系从一个方程中消去一个未知矢量函数。例如，对方程（1.1.57）两侧点乘 $\bar{\bar{\mu}}^{-1}$，然后求旋度，再代入式（1.1.58）就可得到$\vec{E}$满足的方程。

$$\begin{aligned}&\nabla\times\bar{\bar{\mu}}^{-1}\cdot\nabla\times\vec{E}(\vec{r},t)+\bar{\bar{\varepsilon}}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(\vec{r},t)\\&=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{J}(\vec{r},t)-\nabla\times\bar{\bar{\mu}}^{-1}\cdot\vec{M}(\vec{r},t)\end{aligned} \tag{1.1.59}$$

用类似的方法可得到$\vec{H}$所满足的方程。

$$\begin{aligned}&\nabla\times\bar{\bar{\varepsilon}}^{-1}\cdot\nabla\times\vec{H}(\vec{r},t)+\bar{\bar{\mu}}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H}(\vec{r},t)\\&=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{M}(\vec{r},t)+\nabla\times\bar{\bar{\varepsilon}}^{-1}\cdot\vec{J}(\vec{r},t)\end{aligned} \tag{1.1.60}$$

我们称这两个方程为电场和磁场的时域矢量波动方程。由此不难得到频域量所满足的矢量波动方程。

$$\begin{aligned}&\nabla\times\bar{\bar{\mu}}^{-1}\cdot\nabla\times\vec{E}(\vec{r})-\omega^2\bar{\bar{\varepsilon}}\cdot\vec{E}(\vec{r})\\&=-\mathrm{i}\omega\vec{J}(\vec{r})-\nabla\times\bar{\bar{\mu}}^{-1}\cdot\vec{M}(\vec{r})\end{aligned} \tag{1.1.61}$$

$$\begin{aligned}&\nabla\times\bar{\bar{\varepsilon}}^{-1}\cdot\nabla\times\vec{H}(\vec{r})-\omega^2\bar{\bar{\mu}}\cdot\vec{H}(\vec{r})\\&=-\mathrm{i}\omega\vec{M}(\vec{r})+\nabla\times\bar{\bar{\varepsilon}}^{-1}\cdot\vec{J}(\vec{r})\end{aligned} \tag{1.1.62}$$

如果媒质是各向同性且是均匀的，则频域矢量波动方程具有以下较简单的形式。

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}(\vec{r})-\omega^2\varepsilon\mu\vec{E}(\vec{r})=-\mathrm{i}\omega\mu\vec{J}(\vec{r})-\nabla\times\vec{M}(\vec{r}) \tag{1.1.63}$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{H}(\vec{r})-\omega^2\varepsilon\mu\vec{H}(\vec{r})=-\mathrm{i}\omega\varepsilon\vec{M}(\vec{r})+\nabla\times\vec{J}(\vec{r}) \tag{1.1.64}$$

在无源区域，由于$\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r})=0$，$\nabla\cdot\vec{H}(\vec{r})=0$ 和矢量恒等式$\nabla\times\nabla\times\vec{F}(\vec{r})=\nabla\nabla\cdot\vec{F}(\vec{r})-\nabla^2\vec{F}(\vec{r})$，方程（1.1.63）和（1.1.64）变成

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + k^2 \vec{E}(\vec{r}) = 0 \tag{1.1.65}$$

$$\nabla^2 \vec{H}(\vec{r}) + k^2 \vec{H}(\vec{r}) = 0 \tag{1.1.66}$$

其中，$k^2 = \omega^2 \varepsilon\mu$。在直角坐标系中电场和磁场矢量可表示成三个分量之和，$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{x}E_x(\vec{r}) + \hat{y}E_y(\vec{r}) + \hat{z}E_z(\vec{r})$，$\vec{H}(\vec{r}) = \hat{x}H_x(\vec{r}) + \hat{y}H_y(\vec{r}) + \hat{z}E_z(\vec{r})$。于是，方程（1.1.65）和（1.1.66）都可分解为三个分量满足的方程。如果用 $\psi(\vec{r})$ 表示任一分量，则 $\psi(\vec{r})$ 所满足的方程成为如下的标量形式。

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\vec{r}) = 0 \tag{1.1.67}$$

形如式（1.1.65）、（1.1.66）和（1.1.67）这种形式的方程称为亥姆霍兹方程。

以上结果说明，在不同情况下电磁场满足不同类型的波动方程，这就预示着时变电磁场是以波的形式存在的。

1.2　电磁场的势函数和规范不变性

理论上已经证明，电磁场不仅可以直接用场量$\vec{E}$和$\vec{B}$来描述，而且可以用一个矢量函数和标量函数作等价的描述。尤其是其中的规范不变性反映了电磁场的一种特质，具有深刻的物理意义。另一方面，规范变换也可使电磁场问题的求解得到一定的简化。

1.2.1　电型势函数

如果只有电型源，则电磁场满足的麦克斯韦方程组为式（1.1.1）~（1.1.4）。由式（1.1.4）可知，$\vec{B}$为无散矢量场。由于存在矢量恒等式$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F})=0$，这意味着$\vec{B}$是某个矢量函数的旋度，故可将$\vec{B}$用一辅助矢量函数$\vec{A}$表示为

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{1.2.1}$$

$\vec{A}$称为电型矢势。把这一表示代入式（1.1.1）便可得到

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \tag{1.2.2}$$

利用矢量恒等式$\nabla\times\nabla\phi=0$，又可把上式中的$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$通过一辅助标量函数 φ 的梯度表示为

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi \tag{1.2.3}$$

φ 被称为电型标势。容易看出，利用电型矢势$\vec{A}$和标势 φ 按式（1.2.1）和（1.2.3）所表示的电磁场已自动地满足了麦克斯韦方程中的式（1.1.1）和（1.1.4）。它们还应满足的关系可利用方程组的另外两个方程（1.1.2）和（1.1.3）求出。当媒质为均匀各向同性时，所求得的关系为

$$\frac{1}{\mu}\nabla\times\nabla\times\vec{A} = \vec{J} - \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\varepsilon \nabla \cdot \left(\nabla \varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\rho$$

再利用矢量恒等式$\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla\nabla \cdot \vec{F} - \nabla^2 \vec{F}$，以上两式变为

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} + \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \tag{1.2.4}$$

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \tag{1.2.5}$$

这样，把通过麦克斯韦方程求解$\vec{E}$、$\vec{B}$的问题变成了通过式（1.2.4）和（1.2.5）求得$\vec{A}$和φ的问题。

1.2.2　规范不变性和洛伦兹规范

上面所给出的定义式（1.2.1）和（1.2.3）只是$\vec{E}$、$\vec{B}$和$\vec{A}$、φ之间由微分方程建立的关系，不是一一对应的。事实是，如果对式（1.2.1）和（1.2.3）中的$\vec{A}$和φ作如下变换

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \psi \tag{1.2.6}$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{1.2.7}$$

可以得到一组新的$\vec{A}'$和φ'，其中ψ为一任意标量函数。把以上变换用于式（1.2.1）和（1.2.3）可知

$$\nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} = \vec{B} \tag{1.2.8}$$

$$-\nabla \varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} \tag{1.2.9}$$

这说明，由变换式（1.2.6）和（1.2.7）所引入的一组势函数（$\vec{A}'$，φ'）和原来的一组势函数描述的是同一个电磁场；反过来讲，与同一个电磁场相对应的势函数并不是唯一的。由变换式（1.2.6）和（1.2.7）及上面所导出的结果可知，对应同一个电磁场可以有无穷多组势函数（$\vec{A}$，φ）。式（1.2.6）和（1.2.7）称为规范变换，而式（1.2.8）和（1.2.9）说明了电磁场的规范不变性。在规范变换式（1.2.6）和（1.2.7）中包含一个任意标量函数ψ，对它可以作不同的选择，不同的标量函数的选择代表不同的规范。为了限制这种规范的自由度，需要给出一个规范条件。由矢量函数的亥姆霍兹定理可知，一个矢量函数（场）由它的旋度和散度两者共同确定。前面只规定了$\vec{A}$的旋度，还有选择$\vec{A}$的散度的自由。在电磁场理论中对均匀媒质选择

$$\nabla \cdot \vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{1.2.10}$$

并称为洛伦兹规范条件。按这一条件所规定的规范就称为洛伦兹规范。

实际上，总能选择电磁势使洛伦兹规范条件（1.2.10）得到满足。如果一组势函数（$\vec{A}$，φ）不满足洛伦兹规范条件，即可设

$$\nabla \cdot \vec{A} + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \xi \tag{1.2.11}$$

其中，$\xi \neq 0$。这时可作规范变换式（1.2.6）和（1.2.7），从而得到

$$\nabla \cdot \vec{A}' - \nabla \cdot \nabla \psi + \varepsilon\mu\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\right) = \xi$$

若令

$$\nabla \cdot \vec{A}' + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0 \tag{1.2.12}$$

则有

$$\nabla^2 \psi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\xi \tag{1.2.13}$$

这是一个以 ξ 为源的波动方程，从中可以解出 ψ，把这一 ψ 代回到变换式（1.2.6）和（1.2.7）中，由此得到的$\vec{A}'$和 φ'必然满足式（1.2.12），这正是洛伦兹规范条件。

把洛伦兹规范条件代入式（1.2.4）和（1.2.5）中便可得到

$$\nabla^2 \vec{A} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \tag{1.2.14}$$

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{1.2.15}$$

所以，在均匀各向同性的媒质中满足洛伦兹规范的电磁的矢势和标势所满足的方程得以分离，并有最简单的形式。

在频域，$\vec{A}$和 φ 满足的方程成为

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) + k^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\mu \vec{J}(\vec{r}) \tag{1.2.16}$$

$$\nabla^2 \varphi(\vec{r}) + k^2 \varphi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r})/\varepsilon \tag{1.2.17}$$

且有

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{i}\omega \vec{A}(\vec{r}) - \nabla \varphi(\vec{r}) \tag{1.2.18}$$

电磁场的规范不变性在这里仅起到了简化方程的作用，但在物理学中它所揭示的电磁场的物理特质却是非常深刻的。电磁场的规范不变性表示电磁场的对称性，又进一步决定了电磁场的基本单元——光子的静止质量必然为零。在现代物理学中正是受到电磁场规范不变性的启发发展了描述微观粒子相互作用的规范场理论，进而又建立了电磁作用与弱相互作用的统一场论。所以，了解电磁场的规范理论对更深入地了解物理世界是有深刻意义的。

1.2.3　磁型势函数

若所解问题中只有等效的磁型源，则电磁场所满足的方程成为

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(r,t) - \vec{M}(\vec{r},t) \tag{1.2.19}$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}(\vec{r},t) \tag{1.2.20}$$

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r},t) = 0 \tag{1.2.21}$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r},t) = \rho_{\mathrm{m}}(\vec{r},t) \tag{1.2.22}$$

与前面引入电型势函数的方法类似，由于$\nabla \cdot \vec{E}=0$，可引入磁型矢势$\vec{A}_{\mathrm{m}}$，使

$$\vec{D} = -\nabla \times \vec{A}_{\mathrm{m}} \tag{1.2.23}$$

把这一表示代入式（1.2.20）就又有

$$\nabla \times \left(\vec{H} + \frac{\partial \vec{A}_{\mathrm{m}}}{\partial t}\right) = 0$$

由此又可引入磁型标势φ_{m}，使得

$$\vec{H} + \frac{\partial \vec{A}_{\mathrm{m}}}{\partial t} = -\nabla \varphi_{\mathrm{m}} \tag{1.2.24}$$

同样，当引入磁型势函数的规范条件

$$\nabla \cdot \vec{A}_{\mathrm{m}} + \varepsilon\mu \frac{\partial \varphi_{\mathrm{m}}}{\partial t} = 0 \tag{1.2.25}$$

后，就可由方程（1.2.19）和（1.2.21）得到$\vec{A}_{\mathrm{m}}$和φ_{m}分别满足的方程。

$$\nabla^2 \vec{A}_{\mathrm{m}} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}_{\mathrm{m}}}{\partial t^2} = -\varepsilon \vec{M} \tag{1.2.26}$$

$$\nabla^2 \varphi_{\mathrm{m}} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \varphi_{\mathrm{m}}}{\partial t} = -\frac{\rho_{\mathrm{m}}}{\mu} \tag{1.2.27}$$

由该方程求得$\vec{A}_{\mathrm{m}}$和φ后，就可由式（1.2.22）和（1.2.23）求得$\vec{D}$和$\vec{H}$。同样地，磁型势函数也可以表示成在频域满足的方程。

$$\nabla^2 \vec{A}_{\mathrm{m}}(\vec{r}) + k^2 \vec{A}_{\mathrm{m}}(\vec{r}) = -\varepsilon \vec{M}(\vec{r}) \tag{1.2.28}$$

$$\nabla^2 \varphi_{\mathrm{m}}(\vec{r}) + k^2 \varphi_{\mathrm{m}}(\vec{r}) = \frac{-\rho_{\mathrm{m}}(\vec{r})}{\mu} \tag{1.2.29}$$

而且

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\mathrm{i}\omega\varepsilon \vec{A}_{\mathrm{m}} - \nabla \varphi_{\mathrm{m}} \tag{1.2.30}$$

1.3　电磁场理论的几个基本定理

在运用麦克斯韦方程对各种电磁场问题进行广泛研究的过程中，对电磁场的运动规律有了更深入、更具体的认识，从而得到一些具有广泛意义的结论。在电磁场理论中把这类结论以定理的形式表达出来，应用这些定理对解决各种复杂的电磁场问题具有重要意义。

1.3.1　坡印亭定理

自然界一切物质运动都遵守能量守恒定律，作为一种物质形态的电磁场自然也不例外。下面通过麦克斯韦方程组导出电磁场能量守恒的具体形式。

用$\vec{H}$点乘方程（1.1.1），用$\vec{E}$点乘方程（1.1.2），然后把点乘后的两方程相减，并利用恒等式$\vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H})$ 就可得到

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\vec{E} \cdot \vec{J} \tag{1.3.1}$$

把上式对体积 V 进行积分并利用高斯定理可得。

$$\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \vec{n} \mathrm{d}s + \int_V \left(\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \mathrm{d}v = -\int_V \vec{E} \cdot \vec{J} \mathrm{d}v \tag{1.3.2}$$

为了理解该式所表示的物理意义，我们讨论电磁场对带电物体的作用。设在电磁场（$\vec{E}$，$\vec{B}$）的作用下产生运动，由于磁场作用在带电体上的力总与带电体速度的方向垂直，故磁场对带电体不做功，只需考虑电场的作用。

设带电体的电荷密度为 ρ，则微分体积 $\mathrm{d}v$ 内的电荷为 $\rho \mathrm{d}v$，若带电体的瞬时速度为 $\vec{v}$，则在 $\mathrm{d}t$ 时间段内移动的距离 $\mathrm{d}\vec{l} = \vec{v}\mathrm{d}t$，于是场对电荷 $\rho\mathrm{d}v$ 在这段时间所做的功为

$$\rho \mathrm{d}v \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \rho \mathrm{d}v \vec{E} \cdot \vec{v} \mathrm{d}t = \vec{E} \cdot \vec{J} \mathrm{d}v \mathrm{d}t \tag{1.3.3}$$

其中，$\vec{E}$为电荷所在位置的电场强度；$\vec{J} = \rho \vec{v}$。由此可知，在单位时间内，场对空间某区域 V 内所做的总功为 $\int_V \vec{E} \cdot \vec{J} \mathrm{d}v$。场对带电体所做的功增加了带电体的机械能，若用 W_{m} 表示带电体所具有的机械能，就可表示为

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} \mathrm{d}v \tag{1.3.4}$$

反观式（1.3.2），如果把体积 V 扩大为无限大，则因电荷和电流只分布在有限区域，在无穷远边界上的电磁场必等于零，这时由式（1.3.2）可得到

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}t} = \int_\infty \vec{E} \cdot \vec{J} \mathrm{d}v = -\int_\infty \left(\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \mathrm{d}v \tag{1.3.5}$$

由于这里我们考虑的是全空间，其中的带电体和电磁场是一个封闭系统。根据封闭系统能量守恒定律，式（1.3.5）的右侧就应该表示电磁场能量的减少率，它正好等于带电系统机械能的增加率。也就是说，由于带电体具有导电性，通过电磁场对带电体做功，把一部分电磁能量转化为带电体的机械能。由于式（1.3.5）右侧为体积分，故可知其中的被积函数为电磁场的能量密度的时间变化率。若用 w 表示电磁场的能量密度，且把其对时空的依赖关系也表示出来，则有

$$\frac{\partial}{\partial t} w(\vec{r}, t) = \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{1.3.6}$$

再回到式（1.3.2），若把 V 内的电磁系统看作一个整体来考虑，根据上面的物理解释，则其左侧的第一项应视作代表通过 V 的表面与外界进行的能量交换率。定义

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t) \tag{1.3.7}$$

$\vec{P}$称为坡印亭（Poynting）矢量，它表示垂直通过单位面积的功率流（$\mathrm{W/m^2}$）。

综合以上分析就可把式（1.3.2）解释为，V 内损耗的电磁功率加上通过表面流出的电磁功率等于 V 内电磁能量的减少率；或者说，若 V 内的电磁功率损耗与通过表面流入的电磁功率相等，则 V 内的电磁能量保持不变，这就是麦克斯韦

方程所包含的电磁能量守恒的具体内容。通常分别称式（1.3.1）和（1.3.2）为微分形式和积分形式的坡印亭定理。

如果 V 内为时不变均匀各向同性导电媒质，媒质的参数为 ε、μ 和 σ，且是无源的，则 $\vec{J}=\sigma\vec{E}$，于是（1.3.2）成为

$$\oint_S(\vec{E}\times\vec{H})\cdot\vec{n}\mathrm{d}s+\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2+\frac{1}{2}\mu H^2\right)\mathrm{d}v=-\int_V\sigma E^2\mathrm{d}v \qquad (1.3.8)$$

这时

$$w=w_{\mathrm{e}}+w_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2+\frac{1}{2}\mu H^2 \qquad (1.3.9)$$

其中，$w_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2$，$w_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\mu H^2$。

现在考虑在频域电磁能量守恒的表现形式，当媒质为时不变各向异性时，用与前面类似的方法不难得到

$$\oint_S\left[\vec{E}(\vec{r})\times\vec{H}(\vec{r})^*\cdot\vec{n}\mathrm{d}s+\mathrm{i}\omega\int_V[\vec{H}(\vec{r})^*\cdot\bar{\bar{\mu}}\cdot\vec{H}(\vec{r})-\vec{E}(\vec{r})\cdot\bar{\bar{\varepsilon}}^*\cdot\vec{E}(\vec{r})^*]\mathrm{d}v\right.$$

$$=-\int_V\vec{E}(\vec{r})\cdot J(\vec{r})^*\mathrm{d}v \qquad (1.3.10)$$

其中，（*）表示复共轭。

由于时谐场的平均功率流密度 $\vec{P}_{\mathrm{ave}}(\vec{r})$ 满足关系

$$\begin{aligned}\vec{P}_{\mathrm{ave}}(\vec{r})&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{E}(\vec{r})\times\vec{H}^*(\vec{r})]\end{aligned} \qquad (1.3.11)$$

故称 $\vec{P}(\vec{r})=\vec{E}(\vec{r})\times\vec{H}(r)^*$ 为复坡印亭矢量，其实部表示平均功率密度。

对无源无耗的情况，式（1.3.10）等号右侧为零，取实部即可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\oint_S[\vec{E}(\vec{r})\times\vec{H}(\vec{r})^*]\cdot\vec{n}\mathrm{d}s\\&=-\omega\,\mathrm{Re}\int_V i[\vec{H}(\vec{r})^*\cdot\bar{\bar{\mu}}\cdot\vec{H}(\vec{r})-\vec{E}(\vec{r})\cdot\bar{\bar{\varepsilon}}^*\cdot\vec{E}(\vec{r})^*]\mathrm{d}v\\&=\frac{\mathrm{i}\omega}{2}\int_V[\vec{H}(\vec{r})\cdot(\bar{\bar{\mu}}^*-\bar{\bar{\mu}}^T)\cdot\vec{H}(\vec{r})^*+\vec{E}(\vec{r})\cdot(\bar{\bar{\varepsilon}}^*-\bar{\bar{\varepsilon}}^T)\cdot\vec{E}(\vec{r})^*]\mathrm{d}v\end{aligned} \qquad (1.3.12)$$

上式中的 T 表示转置。

式（1.3.12）的左侧为零，因为没有净的时间平均功率流入或流出区域 V，从而必须有

$$\bar{\bar{\varepsilon}}=\bar{\bar{\varepsilon}}^{\dagger},\quad \bar{\bar{\mu}}=\bar{\bar{\mu}}^{\dagger} \qquad (1.3.13)$$

其中，† 表示共轭转置，这就是各向异性无耗媒质参数必须满足的条件。如果媒质各向同性且无耗，则由式（1.3.13）可知，其参数 ε、μ 必为实数。

1.3.2　唯一性定理

在求解一定区域的电磁场时，由于区域内的电磁场是与区域外的环境相关联的，需要给出必要的条件，以描述区域内的场与外界的关系，使得区域内的电磁场由麦克斯韦方程组唯一地确定，这就是唯一性定理所要解决的问题。

唯一性定理的内容是，在有界区域 V 内，如果 $t=0$ 时电磁场的初始值是处处给定的，并且在 $t\geqslant 0$ 时 V 的边界 S 上电场的切向分量或磁场的切向分量（或 S 的一部分电场的切向分量及其他部分磁场的切向分量）也是给定的，则在 $t>0$ 时 V 内的电磁场就由麦克斯韦方程组唯一地确定。

唯一性定理可用反证法加以证明。如果 V 内的电磁场由源 $\vec{J}(\vec{r},\ t)$ 所激发，而在给定的初始和边界条件下 V 内的场解不是唯一的，即存在两组解 $\vec{E}_1$ 和 $\vec{H}_1$ 及 $\vec{E}_2$ 和 $\vec{H}_2$，都满足麦克斯韦方程（1.1.1）和（1.1.2），令

$$\delta\vec{E}=\vec{E}_1-\vec{E}_2,\qquad \delta\vec{H}=\vec{H}_1-\vec{H}_2$$

则 $\delta\vec{E}$ 和 $\delta\vec{H}$ 满足无源的麦克斯韦方程。设 V 内为导电的各向同性媒质，则有

$$\nabla\times\delta\vec{E}=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\delta\vec{H}\tag{1.3.14}$$

$$\nabla\times\delta\vec{H}=\sigma\delta\vec{E}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\delta\vec{E}\tag{1.3.15}$$

根据坡印亭定理立即可以得到

$$\oint_S(\delta\vec{E}\times\delta\vec{H})\cdot\vec{n}\mathrm{d}s=-\int_V\sigma\delta\vec{E}\cdot\delta\vec{E}\mathrm{d}v-\frac{\partial}{\partial t}\int_V\left(\frac{1}{2}\varepsilon\delta\vec{E}\cdot\delta\vec{E}+\frac{1}{2}\mu\delta\vec{H}\cdot\delta\vec{H}\right)\mathrm{d}v\tag{1.3.16}$$

把上式两侧在 0 到 $t>0$ 间对 t 积分并考虑到 $\delta\vec{E}$ 和 $\delta\vec{H}$ 的初始值为零，即可得

$$\int_V\left(\frac{1}{2}\varepsilon\delta\vec{E}\cdot\delta\vec{E}+\frac{1}{2}\mu\delta\vec{H}\cdot\delta\vec{H}\right)\mathrm{d}v=-\int_0^t\int_V\sigma\delta\vec{E}\cdot\delta\vec{E}\mathrm{d}v\mathrm{d}t-\int_0^t\oint_S(\delta\vec{E}\times\delta\vec{H})\cdot\vec{n}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\tag{1.3.17}$$

考虑到上式右侧第一项积分值总是大于等于零，由式（1.3.17）又可推知

$$\int_V\left(\frac{1}{2}\varepsilon\delta\vec{E}\cdot\delta\vec{E}+\frac{1}{2}\mu\delta\vec{H}\cdot\delta\vec{H}\right)\mathrm{d}v\leqslant-\int_0^t\oint_S(\delta\vec{E}\times\delta\vec{H})\cdot\vec{n}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\tag{1.3.18}$$

由于

$$(\delta\vec{E}\times\delta\vec{H})\cdot\vec{n}=-\delta\vec{E}\cdot(\vec{n}\times\delta\vec{H})=\delta\vec{H}\cdot(\vec{n}\times\delta\vec{E})$$

根据给定的边界条件，在 S 上必有

$$\vec{n}\times\delta\vec{E}=0\ \text{或}\ \vec{n}\times\delta\vec{H}=0$$

于是式（1.3.18）成为

$$\int_V \left(\frac{1}{2}\delta \vec{E} \cdot \delta \vec{E} + \frac{1}{2}\mu\delta \vec{H} \cdot \delta \vec{H} \right) \mathrm{d}v \leqslant 0$$

由于上式中的被积函数总为正，为使上式得到满足，必须有 $\delta \vec{E}=0$，$\delta \vec{H}=0$，亦即$\vec{E}_1=\vec{E}_2$，$\vec{H}_1=\vec{H}_2$。这一结果就证明了，在给定的初始和边界的条件下区域 V 内电磁场的麦克斯韦方程解是唯一的。

对频域问题，如果仍考虑均匀各向同性导电媒质，则 $\delta \vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) - \vec{E}_2(\vec{r})$，$\delta \vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_1(\vec{r}) - \vec{H}_2(\vec{r})$ 满足方程

$$\begin{aligned}\oint_S [\delta \vec{E}(\vec{r}) \times \delta \vec{H}(\vec{r})^*] \cdot n\mathrm{d}s = -\mathrm{i}\omega\int_V [&\varepsilon\delta \vec{E}(\vec{r}) \cdot \delta \vec{E}(\vec{r})^* \\ &+ \mu\delta \vec{H}(\vec{r}) \cdot \delta \vec{H}(\vec{r})^*]\mathrm{d}v \\ &- \int_V \sigma\delta \vec{E}(\vec{r}) \cdot \delta \vec{E}(\vec{r})^* \mathrm{d}v \end{aligned} \tag{1.3.19}$$

因为 ε、μ 和 σ 均为实数，对上式两侧取虚部便有

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left\{\oint [\delta \vec{E}(\vec{r}) \times \delta \vec{H}(\vec{r})^*] \cdot \vec{n}\mathrm{d}s\right\} = -w\int_V [&\varepsilon\delta \vec{E}(\vec{r}) \\ &\cdot \delta \vec{E}(\vec{r})^* + \mu\delta \vec{H}(\vec{r}) \cdot \delta \vec{H}(\vec{r})^*]\mathrm{d}v\end{aligned} \tag{1.3.20}$$

根据给定的边界条件，在 S 面上

$$\delta \vec{E}(\vec{r}) = 0 \text{ 或 } \delta \vec{H}(\vec{r}) = 0$$

故式（1.3.20）的左侧为零，而其右侧被积函数为正值，故只有 $\delta \vec{E}(\vec{r}) = 0$ 和 $\delta \vec{H}(\vec{r}) = 0$ 上式才能成立，这就证明了频域问题的唯一性。对各向异性媒质的情况，也可以用类似的方法加以证明。可以看出，对于时域的初值和边值都需要给定的问题，在频域只需要给定边值，成为纯边值问题。

1.3.3 等效原理

在求解电磁场的边值问题时，应用等效原理可以使问题在一定程度上得到简化。等效原理是唯一性定理的直接应用，通过设置等效源以保证在改变求解区域部分空间的源和媒质特性的同时保持其余部分空间的场不变，这就为问题的解决提供了灵活性。这里所说的“等效”是指，如果有两种不同（如分布、大小和类型）的源在给定的区域内产生相同的场，就称这两种源对该区的场解是等效的。

在图 1－1（a）中，用封闭曲面 S 将解域划分为两部分，分别用$\vec{J}_\mathrm{o}$、$\vec{M}_\mathrm{o}$和$\vec{J}_\mathrm{i}$、$\vec{M}_\mathrm{i}$表示外部和内部区域存在的两组源，所有的源在整个解域所产生的场用$\vec{E}_1$、$\vec{H}_1$表示。如果将内部的源改为$\vec{J}_\mathrm{i}'$和$\vec{M}_\mathrm{i}'$，必使内外区域的场都发生变化，将变化后内部区域的场记为$\vec{E}_2$、$\vec{H}_2$。为了使外部区域的场保持$\vec{E}_1$、$\vec{H}_1$不变，可在 S 面上设置面源$\vec{J}_s$、$\vec{M}_S$，只需使其在 S 上满足条件

$$\vec{J}_s = \vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2), \quad \vec{M}_S = -\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \tag{1.3.21}$$

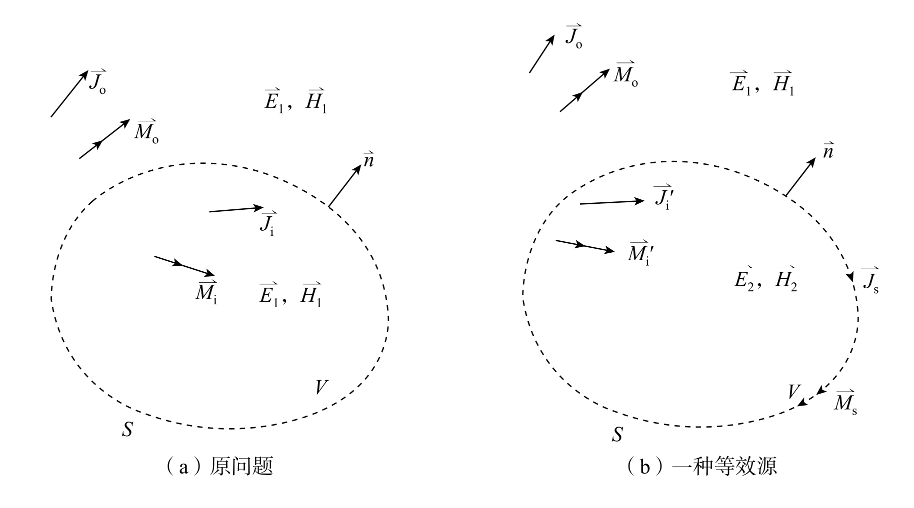


图 1－1　等效原理

如图 1－1（b）所示。就 S 面外的场解而言，因图 1－1（a）和（b）所示的两组源是相互等效的。

如果场源仅存在内部区域，它在外部区域所产生的场为$\vec{E}$、$\vec{H}$。当把以上场源取消时，内外区域的场都将消失。为了使 S 面外的场仍保持$\vec{E}$、$\vec{H}$，则根据以上原理需要在 S 面上设置等效源，其值为

$$\vec{J}_s = \vec{n} \times \vec{H}, \quad \vec{M}_S = -\vec{n} \times \vec{E} \tag{1.3.22}$$

这时 S 面的内部无源，场也为零。

这种等效方法的缺点是，在 S 面上需要设置两类源。由于 S 面内源和场均为零，可在其中设置任何媒质，而不改变等效关系。以下两种选择可使问题的求解得到进一步简化。

（1）选择 S 内的媒质为理想导体，这时等效源$\vec{J}_s$被理想导体短路，从而只需考虑$\vec{M}_S$的贡献。

（2）选择 S 内的媒质为理想磁导体，这时等效源$\vec{M}_S$被短路，从而只需考虑$\vec{J}_s$的贡献。

1.3.4　互易定理

在电磁场理论中互易性起着重要作用，下面就互易定理对各向异性媒质中电磁场所具有的一般形式进行讨论。对于时谐电磁场，当电型源和磁型源同时存在时麦克斯方程的两个旋度方程为

$$\nabla \times \vec{E} = -\mathrm{i}\omega \bar{\bar{\mu}} \cdot \vec{H} - \vec{M} \tag{1.3.23}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \mathrm{i}\omega \bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \vec{E} + \vec{J} \tag{1.3.24}$$

设在封闭面 S 所包围的空间 V 中存在两组相同频率的时谐源（$\vec{J}_a$，$\vec{M}_a$）和（$\vec{J}_b$，$\vec{M}_b$），由其产生的电磁场分别记为（$\vec{E}_a$，$\vec{H}_a$）和（$\vec{E}_b$，$\vec{H}_b$），它们之间满足

的关系为

$$\nabla \times \vec{E}_a = -\mathrm{i}\omega\bar{\bar{\mu}} \cdot \vec{H}_a - \vec{M}_a \tag{1.3.25}$$

$$\nabla \times \vec{H}_a = \mathrm{i}\omega\bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \vec{E}_a + \vec{J}_a \tag{1.3.26}$$

$$\nabla \times \vec{E}_b = -\mathrm{i}\omega\bar{\bar{\mu}} \cdot \vec{H}_b - \vec{M}_b \tag{1.3.27}$$

$$\nabla \times \vec{H}_b = \mathrm{i}\omega\bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \vec{E}_b + \vec{J}_b \tag{1.3.28}$$

分别用$\vec{H}_a$和$\vec{E}_b$点乘方程（1.3.27）和（1.3.26），再把两方程相减，即得

$$\begin{aligned}\vec{H}_a \cdot \nabla \times \vec{E}_b - \vec{E}_b \cdot \nabla \times \vec{H}_a &= \nabla \cdot \vec{E}_b \times \vec{H}_a \\ &= -\mathrm{i}\omega\, \vec{E}_b \cdot \bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \vec{E}_a - \mathrm{i}\omega\, \vec{H}_a \cdot \bar{\bar{\mu}} \cdot \vec{H}_b - \vec{J}_a \cdot \vec{E}_b - \vec{M}_b \cdot \vec{H}_a\end{aligned} \tag{1.3.29}$$

类似地，分别用$\vec{H}_b$和$\vec{E}_a$点乘方程（1.3.25）和（1.3.28），然后把两方程相减，又可得到

$$\begin{aligned}\vec{H}_b \cdot \nabla \times \vec{E}_a - \vec{E}_a \cdot \nabla \times \vec{H}_b &= \nabla \cdot \vec{E}_a \times \vec{H}_b \\ &= -\mathrm{i}\omega\, \vec{E}_a \cdot \bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \vec{E}_b - \mathrm{i}\omega\, \vec{H}_b \cdot \bar{\bar{\mu}} \cdot \vec{H}_a - \vec{J}_b \cdot \vec{E}_a - \vec{M}_a \cdot \vec{H}_b\end{aligned} \tag{1.3.30}$$

如果满足

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \bar{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{T}}, \quad \bar{\bar{\mu}} = \bar{\bar{\mu}}^{\mathrm{T}} \tag{1.3.31}$$

则有

$$\vec{H}_a \cdot \bar{\bar{\mu}} \cdot \vec{H}_b = \vec{H}_b \cdot \bar{\bar{\mu}}^{\mathrm{T}} \cdot H_a, \qquad \vec{E}_a \cdot \bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \vec{E}_b = \vec{E}_b \cdot \bar{\bar{\varepsilon}}^{\mathrm{T}} \cdot \vec{E}_a$$

于是把方程（1.3.30）与（1.3.29）相减就得到

$$\nabla \cdot (\vec{E}_a \times \vec{H}_b - \vec{E}_b \times \vec{H}_a) = \vec{J}_a \cdot \vec{E}_b - \vec{J}_b \cdot \vec{E}_a + \vec{M}_b \cdot \vec{H}_a - \vec{M}_a \cdot \vec{H}_b \tag{1.3.32}$$

这就是微分形式的洛伦兹互易定理。对上式进行积分，又可得到积分形式的洛伦兹定理。

$$\oint_S (\vec{E}_a \times \vec{H}_b - \vec{E}_b \times \vec{H}_a) \cdot \vec{n}\mathrm{d}s = \int_V (\vec{J}_a \cdot \vec{E}_b - \vec{J}_b \cdot \vec{E}_a + \vec{M}_b \cdot \vec{H}_a - \vec{M}_a \cdot \vec{H}_b)\mathrm{d}v \tag{1.3.33}$$

显然，式（1.3.31）是以上互易定理存在的条件，把满足该条件的媒质称为互易媒质。

如果 V 内无源，则方程（1.3.33）成为

$$\oint_S (\vec{E}_a \times \vec{H}_b - \vec{E}_b \times \vec{H}_a) \cdot \vec{n}\mathrm{d}s = 0 \tag{1.3.34}$$

该式称为无源区域的互易定理。

当场的源仅局限在 V 内时，则 V 外是无源区。这一无源区由 S 面和无穷远处的曲面 S_∞ 所包围，根据式（1.3.34）则有

$$\oint_{S+S_\infty} (\vec{E}_a \times \vec{H}_b - \vec{E}_b \times \vec{H}_a) \cdot \vec{n}\mathrm{d}s = 0$$

因为源只存在于区域 V 内，所产生的电磁场在 S_∞ 上的积分应该为零。考虑

以上结果，又可由式（1.3.33）得到

$$\int_V (\vec{J}_a \cdot \vec{E}_b - \vec{M}_a \cdot \vec{H}_b)\mathrm{d}v = \int_V (\vec{J}_b \cdot \vec{E}_a - \vec{M}_b \cdot \vec{H}_a)\mathrm{d}v \tag{1.3.35}$$

可称为有源区域的互易定理。

在电磁场理论中把这种源与场之间的关系称作反应，并用〈a，b〉表示 b 组源与 a 组源所产生的场的反应，即

$$\langle a,b\rangle = \int_V (\vec{J}_b \cdot \vec{E}_a - \vec{M}_b \cdot \vec{H}_a)\mathrm{d}v$$

这样，式（1.3.35）又可表示为

$$\langle a,b\rangle = \langle b,a\rangle \tag{1.3.36}$$

也就是说，源 a 所产生的场与源 b 的反应等于源 b 所产生的场对源 a 的反应。

第 2 章　电磁场理论中的算子和算子方程

麦克斯韦所创立的方程组奠定了宏观电磁场的理论基础。由于受到所处时代各方面条件的限制，麦克斯韦还不能对方程组给出完全正确的诠释，更不可能给出各种电磁场问题的求解方法。方程组创立后的一个多世纪以来，无数科学家在利用方程组解决各种复杂的电磁场问题方面作出了巨大贡献，正是这些在发展中所取得的丰富成果构建成当代电磁场理论的宏伟体系。在这一发展过程中所采用的各种新的数学方法，使可求解的电磁场问题的范围不断扩大。现代数学的应用又为电磁场理论的发展开启了新的篇章，使电磁场理论有了更合理、更精确、更系统的数学基础。本章简要介绍必要的数学概念，为后续章节中数学方法的应用打下必要的基础。

2.1　希尔伯特空间和线性算子

集合是现代数学的基本概念，赋予集合以不同结构就构成各种抽象空间。空间之间的映射称为算子，算子理论是泛函分析的核心，是电磁理论的现代数学基础。本节简要地讨论这些问题的主要概念。

2.1.1　函数集合和函数线性空间

集合是具有一定范围的确定的对象的全体，例如，实数的全体为实数集合 **R**，复数的全体为复数集合 **C** 等。如果集合中的元素为函数，就称为函数集合。例如，所有自变量为 x 的连续函数，当 $x \in \mathbf{R}$，且 $a < x < b$ 时，成为一个一元连续函数集合 $C(a, b)$。我们将用 $C^k(a, b)$ 表示直到 k 阶连续可微一元函数的集合，显然有

$$C^{\infty}(a,b) \subset \cdots \subset C^k(a,b) \subset C^{k-1}(a,b) \subset \cdots \subset C^1(a,b)$$

若函数 $f(x)$ 的勒贝格（Lebesque）积分满足

$$\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty \tag{2.1.1}$$

就称 $f(x)$ 为 p 次勒贝格可积函数，所有在区间 (a,b) 的勒贝格可积函数构成的集合表示为 $L^p(a,b)$，显然

$$L^{\infty}(a,b) \subset \cdots \subset L^p(a,b) \subset L^{p-1}(a,b) \subset \cdots \subset L^1(a,b)$$

所有多维变元 $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的连续函数的全体构成的集合，当 $\vec{x} \in \Omega \subset R^n$ 时，表示为 $C(\Omega)$，勒贝格 p 次可积多元函数集合记作 $L^p(\Omega)$。显然，多

元函数集合也有以上单元函数集合之间的隶属关系。

一个函数集合 X，对其中的元素之间定义了加法和乘法运算并满足关系

$$(u+v)(\vec{x}) = u(\vec{x}) + v(\vec{x}), \quad u,v \in X$$

$$(\lambda u)(\vec{x}) = \lambda u(\vec{x}), \quad \lambda \in K$$

其中，K 为 **R** 或 **C**，则 X 成为线性空间。当 $K = R$ 时，叫做实线性空间，当 $K = C$ 时就叫做复线性空间。

有时我们很关心函数定义域 Ω 的性质以及函数值在定义域中的分布情况，尤其是函数不等于零的那些点的分布，我们称这些点的集合 $\{\vec{x}: u(\vec{x}) \neq 0, \vec{x} \in \Omega\}$ 为函数 $u(\vec{x})$ 在其定义域 Ω 上的支撑集，简称支集。如果该集合是紧的（即该集合中的任何序列都有一个收敛于该集合的子序列）就称为紧支（撑）集。紧集一定是有界闭集。

2.1.2　内积空间和希尔伯特空间

设 X 为线性空间，若在其中定义了内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$，且 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 满足以下规则。

(1) $\langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \quad u,v,w \in X$;

(2) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle, \quad \alpha \in K$;

(3) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle^*$;

(4) $\langle u, u \rangle \geqslant 0$，当且仅当 $u = 0$ 时 $\langle u, u \rangle = 0$。

则称 X 为一个内积空间。

若在内积空间 X 中的任意元素 $u(\vec{x})$ 定义其范数 $\| \cdot \|$ 为

$$\| u \| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \tag{2.1.2}$$

则 X 又成为一个赋范空间。如果再定义距离（或度量）为

$$d(u,v) = \| u - v \|, \quad u,v \in X \tag{2.1.3}$$

则 X 又成为一个度量空间。

如果一个内积空间按上述方法定义的距离使其成为一个完备的度量空间，则它就是一个完备的内积空间，并称为希尔伯特（Hilbert）空间，常用 H 表示。一个度量空间 X 是完备的是指其中的每个柯西（Cauchy）序列均收敛于 X 中的点。

例如，对 $L^2(\Omega)$ 若定义内积

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega u(\vec{x}) v^*(\vec{x}) \mathrm{d}\Omega, \quad u,v \in L^2(\Omega) \tag{2.1.4}$$

则 $L^2(\Omega)$ 成为一个希尔伯特空间。在这一空间中的范数和距离分别为

$$\| u \| = \left[\int_\Omega | u(\vec{x}) |^2 \mathrm{d}\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.1.5}$$

$$d(u,v) = \left[\int_\Omega | u(\vec{x}) - v(\vec{x}) |^2 \mathrm{d}\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.1.6}$$

在内积空间的 u 和 v 如果满足关系

$$\langle u, v \rangle = 0 \tag{2.1.7}$$

就称 u 和 v 是正交的。

设 $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为希尔伯特空间 H 中的一个标准正交序列，即

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \tag{2.1.8}$$

若在 H 中不存在与所有 $e_i(i = 1,2,\cdots)$ 正交的非零元素，则称序列 $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 H 空间的一个完备标准正交基。这时，对任意的 $u \in H$ 都可表示成

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, e_k \rangle e_k \tag{2.1.9}$$

这是一个表示函数 u 的广义傅里叶级数，而 $\langle u, e_k \rangle$ 称为广义傅里叶系数。

根据一般物理原理，任何局部区域 $\Omega \in R^3$ 内的电磁场能量都是有限的。若用 $\psi(\vec{r})$ 表示电磁场的任一分量，则 $\psi(\vec{r})$ 一定满足

$$\int_{\Omega} |\psi(\vec{r})|^2 \mathrm{d}\Omega < \infty \tag{2.1.10}$$

因此 $\psi(\vec{r}) \in L^2(\Omega)$ 。所以，只要我们按式（2.1.4）定义内积，就可以使 $\psi(\vec{r})$ 的各类集合构成各种希尔伯特函数空间。这样，我们就可以应用希尔伯特函数空间的数学理论来讨论电磁场问题。

2.1.3 希尔伯特空间的线性算子和线性泛函

设 A 和 B 为两个非空集合，如果对于集合 A 的任一元素按照某种确定的规则 T 在集合 B 中都有确定的元素与之对应，就称 T 为从集合 A 到集合 B 的一个映射，记作

$$T: A \to B$$

定义在空间之间的映射称为算子。

设 X 和 Y 为定义在同一数域 K 上的两个线性空间，定义算子 $T: X \to Y$ ，其定义域 $D(T) \subset X$ 为 X 的线性子空间，其值域 $R(T) \subset Y$ 。若对任意的 $u,v \in D(T)$ 和任意的 $\alpha \in K$ 都有

$$T(u + v) = Tu + Tv$$
$$T(\alpha u) = \alpha Tu$$

就称 T 为线性算子。

设 X 为线性空间，线性算子 $T: X \to K$ 称为线性泛函。所以，泛函是一类特殊的算子，其值域为数的集合。当 K 为 **R** 时称为实泛函，若 K 为 **C** 就称为复泛函。

设 H_1 和 H_2 为两个希尔伯特空间，有线性算子 $T: H_1 \to H_2$ ，若存在常数 $c > 0$ ，对一切 $u \in D(T)$ 都有

$$\| Tx \|_{H_2} \leqslant c \| u \|_{H_1} \tag{2.1.11}$$

则称 T 为有界线性算子，否则就称其为无界线性算子。

设 $T: H_1 \to H_2$ 为有界线性算子，若存在算子 $T^a: H_2 \to H_1$ ，对所有 $u \in H_1$ ，

$v \in H_2$ 都满足

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, T^a v\rangle \tag{2.1.12}$$

就称 T^a 为 T 的伴随算子。

进而，如果 $T: H \to H$，而且 $T = T^a$，即对所有 $u, v \in H$ 都有

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle \tag{2.1.13}$$

就称算子 T 为自伴的。这一定义所包含的意思是 $D(T) = D(T^a)$，对于所有 $u \in D(T) = D(T^a)$ 有 $T^a u = Tu$。

更广泛的情况是，只要满足条件（2.1.13），算子 T 就是对称的。所以，自伴算子一定是对称算子，但对称算子不一定是自伴算子。自伴算子也称为厄米（Hermite）算子。

容易证明，若 T 为 H 中的自伴算子，I 为恒等算子，λ 为实常数，则 $\lambda I - T$ 也是自伴算子。

此外，T 为 H 中的自伴算子的充分必要条件是，对任意的 $u \in H$，$\langle Tu, u\rangle$ 为实数。

如果 H 中的自伴算子 T 满足条件

$$\langle Tu, u\rangle > 0, \qquad \forall u \in H \tag{2.1.14}$$

就称 T 为正算子。若满足条件

$$\langle Tu, u\rangle \geqslant c\|u\|, \qquad \forall u \in H, \qquad c > 0 \tag{2.1.15}$$

就称 T 为正定的。

如果算子 T 是可逆的，其逆算子用 T^{-1} 表示，若 $Tu = v$，且

$$T^{-1}Tu = T^{-1}v = u, \qquad \forall u \in D(T)$$
$$TT^{-1}v = Tu = v, \qquad \forall v \in D(T)$$

于是

$$T^{-1}T = TT^{-1} = I$$

其中，I 也称为单位算子。

我们称使 $Tu = 0$ 的所有 u 的集合为算子 T 的零空间并用 $N(T)$ 表示，即

$$N(T) = \{u: Tu = 0, u \in D(T)\} \tag{2.1.16}$$

对于无界线性算子 T，若其定义域 $D(T)$ 在 H 中是稠密的，即 $\overline{D(T)} = H$，其中 $\overline{D(T)}$ 为 $D(T)$ 的闭包，则称 T 为稠定算子。稠定的无界线性算子与有界线性算子的性质十分相近。在我们所讨论的电磁场问题中所遇到的算子的定义域都可认为是稠密的，故不再严格地区分有界算子和无界算子。

2.2　电磁理论中常见标量函数空间的微分算子

在某些情况下求解电磁场问题可以从求解电磁场分量入手，这时我们遇到的是标量函数。所以，了解标量函数空间中某些算子的性质对求解很多电磁问题还是很有意义的。

2.2.1 拉普拉斯算子和亥姆霍兹算子

在方程（1.1.67）中出现的 $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ 称为拉普拉斯（Laplace）算符，给定了它的定义域，它就成为一个算子。在电磁理论中常要在一定区域 Ω 内求解满足某种微分方程和边界条件的电磁场，如果构成微分方程的是算符 ∇^2，求解问题区域的边界由理想导体构成，则所遇到的算子 $A: L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 定义为

$$(Au)(\vec{r}) = \nabla^2 u(\vec{r}), \quad u(\vec{r}) \in D(A) \tag{2.2.1}$$

$$D(A) = \left\{ u(\vec{r}) : u(\vec{r}), \nabla^2 u(\vec{r}) \in L^2(\Omega), u(\vec{r}) \Big|_{\partial\Omega} \text{或} \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

其中，$\vec{r} \in \Omega \subset R^3$，$\partial\Omega$ 为 Ω 的边界。考虑到

$$\begin{aligned} \langle Au, v\rangle &= \int_\Omega v^*(\vec{r})\, \nabla^2 u(\vec{r})\, \mathrm{d}\Omega \\ &= \oint_{\partial\Omega}\left(v^* \frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v^*}{\partial n}\right)\mathrm{d}s + \int_\Omega u(\vec{r})\, \nabla^2 v^*(\vec{r})\, \mathrm{d}\Omega \\ &= \langle u, A^a v\rangle \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

其中

$$(A^a v)(\vec{r}) = \nabla^2 v(\vec{r}), \quad v(\vec{r}) \in D(A^a)$$

$$D(A^a) = \left\{ v(\vec{r}) : v(\vec{r}), \nabla^2 v(\vec{r}) \in L^2(\Omega), v(\vec{r}) \Big|_{\partial\Omega} = 0 \text{ 或} \frac{\partial v(\vec{r})}{\partial n} = 0 \right\}$$

亦即 $A^a = A$，$D(A^a) = D(A)$，故 A 为自伴算子。

又因为

$$\begin{aligned} \langle Au, u\rangle &= \int_\Omega u^*(\vec{r})\, \nabla^2 u(\vec{r})\, \mathrm{d}\Omega \\ &= \oint_{\partial\Omega} u^* \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s - \int_\Omega \nabla u^* \cdot \nabla u\, \mathrm{d}\Omega \\ &= -\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}\Omega < 0 \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

故 $A = \nabla^2$ 为负算子。显然 $A = -\nabla^2$ 就是正算子。

如果定义算子 A 为

$$(Au)(\vec{r}) = (\nabla^2 + k^2) u(\vec{r}), \quad u(\vec{r}) \in D(A), \quad k \in R \tag{2.2.4}$$

$$D(A) = \left\{ u(\vec{r}) : u(\vec{r}), \nabla^2 u(\vec{r}) \in L^2(\Omega), u(\vec{r}) \Big|_{\partial\Omega} = 0 \text{ 或} \frac{\partial u(\vec{r})}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

则容易证明 A 仍然是自伴算子。算子 $A = \nabla^2 + k^2$ 称为亥姆霍兹（Helmholtz）算子。

如果 Ω 为无界区域，所求的场满足辐射条件，这时的亥姆霍兹算子定义为

$$(Au)(\vec{r}) = (\nabla^2 + k^2) u(\vec{r})$$

$$D(A) = \left\{ u(\vec{r}) : u(\vec{r}) \in C^2(R^3), \lim_{r\to\infty} r\left[\frac{\partial u}{\partial r} + \mathrm{i}ku\right] = 0 \right\}$$

由于对辐射条件取共轭成为

$$\lim_{r\to\infty} r\left[\frac{\partial v^*}{\partial r} - \mathrm{i}kv^*\right] = 0, \qquad v(\vec{r}) \in D(A)$$

使得 $\langle Au, v\rangle \neq \langle u, Av\rangle$，即 A 不再是自伴的。

2.2.2　斯特姆 – 刘维尔算子

在电磁理论中经常要求解由拉普拉斯算子和亥姆霍兹算子构成的微分方程。分离变量法是求解这类方程的一种重要方法，在不同坐标系中进行变数分离形成一类常微分方程，这类方程的特点与斯特姆 – 刘维尔（Sturm-Liouville）算子的性质有直接关系。首先我们考虑正规斯特姆 – 刘维尔算子，其定义如下

$$(Lu)(x) = \left\{-\frac{1}{\omega(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)\right\}u(x), \quad a \leqslant x \leqslant b \tag{2.2.5}$$

$$D(L) = \{u(x): u, u'' \in C^2(a,b) \subset L^2_\omega(a,b), B_a(u) = B_b(u) = 0\}$$

其中，$L^2_\omega(a,b)$ 为加权勒贝格平方可积函数空间，即 $u \in L^2_\omega(a,b)$ 满足条件

$$\int_a^b |u(x)|^2 \omega(x)\mathrm{d}x < \infty \tag{2.2.6}$$

边界条件则为

$$\begin{cases} B_a(u) = \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \\ B_b(u) = \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \end{cases} \tag{2.2.7}$$

其中，系数 $\alpha_{1,2}, \beta_{1,2} \in R$，且 $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$，$\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$。还假定 p, p', q 和 ω 为连续（或分段连续）的实值函数，在 $[a,b]$ 区间 $p(x), \omega(x) > 0$。

在通常内积定义的希尔伯特空间 $L^2(a,b)$ 中算子 L 不是自伴的。如果采用加权内积

$$\langle u, v\rangle = \int_a^b u(x)v(x)\omega(x)\mathrm{d}x \tag{2.2.8}$$

相应的希尔伯特空间记作 $L^2_\omega(a,b)$，把算子 L 定义为

$$L: L^2_\omega(a,b) \to L^2_\omega(a,b)$$

则 L 就是自伴的，因为

$$\begin{aligned}\langle Lu, v\rangle &= \int_a^b \left\{-\frac{1}{\omega(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)u(x)\right\}v^*(x)\omega(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b u(x)\left\{-\frac{1}{w(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)v^*(x)\right\}w(x)\mathrm{d}x \\ &\quad - \left\{p(x)\left[v^*(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u(x)\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}x}\right]\right\}\Bigg|_a^b \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

如果定义

$$(L^a v)(x) = \left\{-\frac{1}{w(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)\right\}v(x) \tag{2.2.10}$$

$$D(L^a) = \{v(x): v, v'' \in C^2(a,b) \subset L^2_w(a,b), B_a(v) = B_b(v) = 0\}$$

则显然由式（2.2.9）我们得到

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, L^a v\rangle \tag{2.2.11}$$

而且 $D(L) = D(L^a)$ ，$L^a = L$ 。这就证明了 L 为 $L_w^2(a,b)$ 中的自伴算子。又因

$$\langle Lu, u\rangle = \int_a^b \left\{ -\frac{1}{w(x)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \right] + q(x)u(x) \right\} \overline{u}(x) w(x) \mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b [p(x)|u'(x)|^2 + q|u(x)|^2 w(x)] \mathrm{d}x > 0 \tag{2.2.12}$$

即 L 又是正算子。

在电磁理论中常常遇到 $x \to \pm\infty$ 的情况，这种情况下，斯特姆－刘维尔算子称为奇异的。对奇异斯特姆－刘维尔算子不存在如式（2.2.7）所示的边界条件。为了使算子所构成的微分方程有唯一解，要求解属于 $L_w^2(-\infty, +\infty)$ 空间，也可以引入内含或适应性条件

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x) = 0 \tag{2.2.13}$$

在这一条件下斯特姆－刘维尔奇异算子也是自伴的。

2.3 标量函数微分算子方程

讨论微分算子的性质的意义主要在于了解由其构成的相应微分算子方程的特性，解决电磁理论问题要靠求得对应的算子方程的解。微分算子方程主要分为两类：一类是非齐次算子方程，它描述有源的物理问题；另一类是齐次算子方程，它描述无源的物理问题或本征问题。

2.3.1 算子的本征值和本征函数

以下形式的算子方程称为算子的本征值问题

$$Au(x) = \lambda u(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b \tag{2.3.1}$$

其中，A 为线性算子；$u(x)$ 为未知函数；$\lambda \in \mathbf{C}$ 。该方程总有平凡解，但并不是 λ 的任意值都有 $u \in D(A)$ 满足方程。那些使方程在 $D(A)$ 中有非平凡解的 λ 值称为算子 A 的本征值，相应的非平凡解就称为与 λ 相关的本征函数。如果 a、b 为有限值，则式（2.3.1）表示的为标准本征值问题。

在标准本征问题中，如果 A 为自伴算子，则其本征值和本征函数具有优良的特性。

首先，A 为自伴算子时其本征值是实的且为可数集，即是分立的。这是因为设

$$u(x), v(x) \in D(A) \subset L^2(a,b)$$

则有

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle \tag{2.3.2}$$

由（2.3.1）可得

$$\langle Au, u\rangle = \langle \lambda u, u\rangle = \lambda\langle u, u\rangle \tag{2.3.3}$$

$$\langle u, Au\rangle = \langle u, \lambda u\rangle = \lambda^* \langle u, u\rangle \tag{2.3.4}$$

进而有

$$\lambda\langle u, u\rangle = \lambda^* \langle u, u\rangle$$

也就是

$$(\lambda - \lambda^*)\langle u, u\rangle = 0 \tag{2.3.5}$$

因为 $\langle u,u\rangle \neq 0$，故 $\lambda = \lambda^*$，这就说明本征值 λ 是实的，至于 λ 的可数性这里不再证明。

设 (λ_m, u_m) 和 (λ_n, u_n) 为 A 的两组任意本征值及相关的本征函数。因为 A 是自伴的，λ 为实的，故

$$\begin{aligned}\langle Au_m, u_n\rangle - \langle u_m, Au_n\rangle &= \lambda_m\langle u_m, u_n\rangle - \lambda_n\langle u_m, u_n\rangle \\ &= (\lambda_m - \lambda_n)\langle u_m, u_n\rangle = 0\end{aligned}$$

由于 $\lambda_m \neq \lambda_n$，故

$$\langle u_m, u_n\rangle = 0 \tag{2.3.6}$$

这就说明，对应不同本征值的本征函数是相互正交的。

进一步还可以证明自伴算子 A 的本征函数序列是 $L^2(a,b)$ 空间的一个正交基，经归一化后还可以成为一个标准正交基。对 $D(A)$ 而言又是一个完备标准正交基。因此，对任意 $u(x) \in D(A)$ 有

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\langle u, u_k\rangle u_k \tag{2.3.7}$$

且等号在以下意义下成立。

$$\lim_{n\to\infty}\left\| u - \sum_{k=1}^{n}\langle u, u_k\rangle u_k\right\| = 0 \tag{2.3.8}$$

也就是说，$D(A)$ 中的任意函数都可展开为本征函数的广义傅里叶级数。而且

$$(Au)(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\langle u, u_k\rangle u_k \tag{2.3.9}$$

以下方程称为广义本征值问题

$$Au = \lambda Mu \tag{2.3.10}$$

其中，M 是线性算子。如果 M 也是自伴的，则

$$\langle Au, u\rangle = \lambda\langle Mu, u\rangle \tag{2.3.11}$$

$$\langle u, Au\rangle = \langle Mu, u\rangle \tag{2.3.12}$$

于是

$$(\lambda - \lambda^*)\langle Mu, u\rangle = 0 \tag{2.3.13}$$

该式与式（2.3.5）不同，只有当 $\langle Mu,u\rangle \neq 0$ 时才有 $\lambda = \lambda^*$，也就是说，只有 M 为正（或负）算子时 λ 才可能是实的。仅仅自伴（或对称）性不能充分保证 λ 为实数。

同样可以推得

$$\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^*}\right)\langle Au, u\rangle = 0 \tag{2.3.14}$$

这又表明只有当 A 为正（或负）时 λ 才可能是实的，所以总的来说，只有 A 和 M 二者都是正（或负）自伴算子时 λ 才是实的。

如果 A 和 M 都是自伴的，对任意两组本征值和本征函数 (λ_m, u_m) 和 (λ_n, u_n) 有以下关系。

$$(\lambda_m - \lambda_n^*)\langle Mu_m, u_n\rangle = 0 \tag{2.3.15}$$

$$\left(\frac{1}{\lambda_m} - \frac{1}{\lambda_n^*}\right)\langle Au_m, u_n\rangle = 0 \tag{2.3.16}$$

所以，只要 $\lambda_m \neq \lambda_n$，则

$$\langle Au_m, u_n\rangle = \langle Mu_m, u_n\rangle = 0 \tag{2.3.17}$$

这是广义本征问题的正交关系。

如果区间 $[a, b]$ 中 $-a$ 或 b 至少有一个趋于无穷，相应的本征值问题就变成奇异的，在电磁理论中这种情况经常出现，我们将在具体问题中再进行详细的讨论。以上的讨论对于多元函数也是适用的。

2.3.2　非齐次微分算子方程

若 A 为线性微分算子，则方程

$$Au(\vec{x}) = f(\vec{x}), \qquad \vec{x} \in \Omega \tag{2.3.18}$$

称为非齐次微分算子方程，其中函数 $f(\vec{x})$ 为已知的，在电磁理论中它通常表示场的源，满足方程的未知函数 $u(\vec{x}) \in D(A)$ 称为方程的解。

对于方程（2.3.18），若逆算子 A^{-1} 存在，则其解可表示为

$$u(\vec{x}) = A^{-1}f(\vec{x}) \tag{2.3.19}$$

逆算子 A^{-1} 为一积分算子，可表示为

$$(A^{-1}f)(\vec{x}) = \int_\Omega G(\vec{x}, \vec{x}')f(\vec{x}')\,\mathrm{d}\Omega' \tag{2.3.20}$$

其中，$G(\vec{x}, \vec{x}')$ 为变量 $\vec{x}, \vec{x}'$ 的函数。求得 $G(\vec{x}, \vec{x}')$ 后，方程（2.3.18）的解就可表示为

$$u(\vec{x}) = \int_\Omega G(\vec{x}, \vec{x}')f(\vec{x}')\,\mathrm{d}\Omega' \tag{2.3.21}$$

由于

$$\begin{aligned} Au(\vec{x}) &= AA^{-1}f(\vec{x}) = A\left[\int_\Omega G(\vec{x}, \vec{x}')f(\vec{x}')\,\mathrm{d}\Omega'\right] \\ &= \int_\Omega AG(\vec{x}, \vec{x}')f(\vec{x}')\,\mathrm{d}\Omega' \end{aligned}$$

若令

$$AG(\vec{x}, \vec{x}') = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \tag{2.3.22}$$

只要

$$\int_\Omega \delta(\vec{x} - \vec{x}')f(\vec{x}')\,\mathrm{d}\Omega' = f(\vec{x}) \tag{2.3.23}$$

方程（2.3.18）就得到满足。这里的 $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ 称作 δ 函数，是一广义函数，

式（2.3.23）规定了 δ 函数的性质。方程（2.3.22）称为格林函数方程。从以上过程可以看出，我们已把求解非齐次微分算子方程的求解化为求解格林函数方程的问题，这种方法称为格林函数法。

若非齐次微分算子方程具有形式

$$(L-\lambda)u=f \tag{2.3.24}$$

则其对应的齐次方程为一本征问题，若 L 为自伴的，则有

$$Lu_n=\lambda_n u_n \tag{2.3.25}$$

其中，λ_n 和 u_n 为 L 的本征值和本征函数。因为 $L-\lambda$ 也是自伴的，所以

$$\begin{aligned}\langle f,u_n\rangle &= \langle (L-\lambda)u,u_n\rangle = \langle u,(L-\lambda)u_n\rangle \\ &= \langle u,(\lambda_n-\lambda)u_n\rangle = (\lambda_n-\lambda)\langle u,u_n\rangle \\ &= \alpha_n(\lambda_n-\lambda)\end{aligned} \tag{2.3.26}$$

其中，$\alpha_n=\langle u,u_n\rangle$。又因为

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n u_n$$

于是方程（2.3.24）的解可以表示为

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\langle f,u_n\rangle}{\lambda_n-\lambda}u_n \tag{2.3.27}$$

即非齐次微分方程的解通过算子的本征函数和本征值表示了出来。

2.3.3　算子方程的变分原理

把算子方程的求解变为泛函的极值问题，为算子方程的数值解法提供了一个重要方向。这里提供一些基本原理。

设 A 为希尔伯特空间 H 中的自伴线性算子，如果 A 是正算子，则其确定性方程

$$Au=f,\qquad u\in D(A)\subset H \tag{2.3.28}$$

的解与泛函

$$J[u]=\langle Au,u\rangle-\langle u,f\rangle-\langle f,u\rangle \tag{2.3.29}$$

的极小值问题等价。

这是因为，对式（2.3.29）取变分得到

$$\begin{aligned}\delta J[u] &= \langle A\delta u,u\rangle+\langle Au,\delta u\rangle-\langle \delta u,f\rangle-\langle f,\delta u\rangle \\ &= \langle \delta u,Au\rangle+\langle f,\delta u\rangle-\langle \delta u,Au\rangle-\langle f,\delta u\rangle \\ &= 0\end{aligned} \tag{2.3.30}$$

这说明，满足方程 $Au=f$ 的 u 使 $J[u]$ 取驻极值，进一步可证明，当 A 为正算子时，方程的解 u 使 $J[u]$ 取极小值[53]。

如果 A 为非自伴的，则可借助一辅助方程

$$A^a v=g,\qquad v\in D(A^a)\subset H \tag{2.3.31}$$

其中，A^a 为 A 的伴随算子；g 为已知。则方程（2.3.28）的解 u 使二元泛函

$$J[u,v]=\langle Au,v\rangle-\langle u,g\rangle-\langle f,v\rangle \tag{2.3.32}$$

取驻值。这是因为，若 u,v 满足方程（2.3.28）和（2.3.31），则

$$\begin{aligned}\delta J[u,v]&=\langle A\delta u,v\rangle+\langle Au,\delta v\rangle-\langle\delta u,g\rangle-\langle f,\delta v\rangle\\&=\langle\delta u,A^a v\rangle-\langle\delta u,g\rangle+\langle Au,\delta v\rangle-\langle f,\delta v\rangle\\&=\langle\delta u,A^a v-g\rangle+\langle Au-f,\delta v\rangle\\&=0\end{aligned} \tag{2.3.33}$$

初看起来，辅助方程使问题复杂化了，但实际上 A^a 并不出现在泛函 $J[u,v]$ 中，v 又完全不用解出，且 g 可选择为 $g=f$。

对于自伴问题

$$Au=\lambda Bu \tag{2.3.34}$$

A,B 都是自伴算子。方程（2.3.34）两边对 u 取内积成为

$$\langle Au,u\rangle=\lambda\langle Bu,u\rangle \tag{2.3.35}$$

于是

$$\lambda[u]=\frac{\langle Au,u\rangle}{\langle Bu,u\rangle}=\frac{\langle u,Au\rangle}{\langle u,Bu\rangle} \tag{2.3.36}$$

可以证明，当 u 为式（2.3.34）的特征函数时，特征值 $\lambda[u]$ 取驻值。这点可由式（2.3.35）的变分得到证明，因为

$$\langle A\delta u,u\rangle+\langle Au,\delta u\rangle-\delta\lambda\langle Bu,u\rangle-\lambda\langle B\delta u,u\rangle-\lambda\langle Bu,\delta u\rangle=0$$

进而有

$$\begin{aligned}\delta\lambda\langle Bu,u\rangle&=\langle\delta u,Au\rangle+\langle Au,\delta u\rangle-\lambda\langle\delta u,Bu\rangle-\lambda\langle Bu,\delta u\rangle\\&=\langle\delta u,Au\rangle+\langle Au,\delta u\rangle-\langle\delta u,\lambda Bu\rangle-\langle\lambda Bu,\delta u\rangle\\&=\langle\delta u,Au-\lambda Bu\rangle+\langle Au-\lambda Bu,\delta u\rangle\end{aligned}$$

当 u 满足方程（2.3.34）时便有

$$\delta\lambda\langle Bu,u\rangle=0 \tag{2.3.37}$$

只要 $u\neq 0$，$\langle Bu,u\rangle\neq 0$，故

$$\delta\lambda[u]=0 \tag{2.3.38}$$

这就说明方程（2.3.34）的解 u 使式（2.3.38）成立，也就是使 $\lambda[u]$ 取驻值。

2.4　格林函数和分布论

在上一节我们把非齐次微分算子方程的求解转化为一个格林函数方程的求解问题，并引出了一个不是一般意义上的函数，即 δ 函数。这类函数在电磁理论中具有重要意义，如果理解或处理不正确，会导致严重错误，这也是现代电磁理论需要解决的一个重要问题。

2.4.1　分布论和广义函数

在电磁理论中我们需要用数学来表达点电荷和线电流等这样一些极限化的抽

象概念，这些量的特点是在某些维度上不为零的区间为无限小，但其密度又是有限值。为了表达这样的一些物理量，狄拉克（Dirac）等引入了 δ 函数，其定义如下。

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \tag{2.4.1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1 \tag{2.4.2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x)\,\mathrm{d}x = f(0) \tag{2.4.3}$$

其中，$f(x)$ 在 $x = 0$ 附近连续。

这样定义的 δ 函数曾在科技文献中被广泛应用，但是，即使用经典数学分析的观点来看，这些要求也是互相矛盾的。式（2.4.1）说明 $\delta(x)$ 是个几乎处处等于零的函数，它的勒贝格积分应该等于零，这与式（2.4.2）所给的结果相矛盾。此外，还曾认为

$$\delta(x) = u'(x) \tag{2.4.4}$$

其中，$u(x)$ 为亥维赛德（Heaviside）阶跃函数

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{2.4.5}$$

但是，式（2.4.4）所表示的微商和式（2.4.3）所表示的积分在经典数学框架内是无法得到证明的。这说明，这里所需要的 δ 函数已经不是一般意义下的函数。另一方面，从实践需要的方面看，经典数学的概念已经不能满足要求，需要推广数学分析所能涵盖的函数范围。正是这一要求引起了广义函数理论或分布论的发展。

δ 函数满足的关系式（2.4.3）在定义和理解广义函数方面具有重要的意义。假定 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上某函数线性空间的任意元素，式（2.4.3）就定义了某个线性泛函。反过来说，这个线性泛函在这个函数空间上定义了一个“函数” $\delta(x)$ 。正是在这样的理解下，可以把 δ 函数视为函数空间上的线性泛函。这样定义的函数不需要给定每一点的值，而是只规定了它的分布。这样的函数称为广义函数，也称为分布。

我们希望广义函数是个更广泛的函数概念，它应该几乎涵盖所有的普通经典函数，而且能尽量广泛地纳入非经典函数，而且具有统一的适用所定义函数的分析理论。

显然，所定义的泛函的广度与定义其上的线性函数空间的性质有关。一般讲，函数空间所包含元素的条件越严格，所定义的泛函就越广泛。例如，希尔伯特空间 $L^2(\Omega)$ 上的线性泛函与其中的函数是一一对应的，用它作为定义广义函数的空间就对函数定义的扩大没有任何作用。

在分布理论中定义广义函数的空间称为基本空间，它由定义在 $\Omega \subset R^n$ 上无穷次可微、具有紧支撑集的函数的全体组成，并在其中定义了极限，用 $D(\Omega)$ 表

示。它也被称为检验函数空间，其中的元素 φ 称为基本函数或检验函数。

对于一元函数，定义广义函数 $T(\varphi)$ 为

$$\langle T,\varphi\rangle = \int_{\Omega} T(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in D(\Omega) \tag{2.4.6}$$

例如，设 $a \in \Omega \subset R$, $D(\Omega)$ 上的一个线性泛函

$$\delta_a: D(\Omega) \to \mathrm{C}$$

形如

$$\delta_a(\varphi) = \int_{\Omega} \delta(x-a)\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(a), \quad \forall \varphi \in D(\Omega) \tag{2.4.7}$$

则 $\delta(x-a)$ 为一线性泛函，称为 δ 函数。

若 $a=0$ ，就记作

$$\langle \delta,\varphi\rangle = \int_{\Omega} \delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in D(\Omega) \tag{2.4.8}$$

就是广义函数 $\delta(x)$ 的定义。这一定义满足了条件（2.4.3）。

广义函数的导数定义为

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x},\varphi\right\rangle = -\left\langle T,\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right\rangle, \quad \forall \varphi \in D(\Omega) \tag{2.4.9}$$

根据阶跃函数 $u(x)$ 的定义（2.4.5）我们有

$$\begin{aligned}\langle u',\varphi\rangle &= -\langle u,\varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathrm{d}x \\ &= -\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = -\varphi(x)\Big|_{0}^{+\infty}\end{aligned}$$

由于 $\varphi(x)$ 具有紧支集，亦即支集是有界的，故

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = 0$$

所以

$$\langle u',\varphi\rangle = \varphi(0) = \langle \delta,\varphi\rangle \tag{2.4.10}$$

这就说明

$$\delta(x) = \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}$$

这一结论与式（2.4.4）相同，但此处表示的是广义函数的微商，避开了原来存在的问题。根据这一结果我们又可以得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = u(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1 \tag{2.4.11}$$

这一结果与式（2.4.2）相同，但这一结果的获得不是通过对 $\delta(x)$ 的直接积分取得的，而且 $\delta(x)$ 也不存在定义（2.4.1），这里不再存在矛盾。

有意思的是，在分布论出现之前，物理学家早就用函数序列极限来定义 δ 函数，现在可以用广义函数理论证明这些定义是正确的，如

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2x^2+1} = \delta(x)$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}} = \delta(x)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{x} = \delta(x)$$

以上的讨论是对一元函数进行的，但很容易推广到多元函数的情况。

现在我们回到非齐次微分算子方程

$$Au = f$$

的讨论。如果 f 不是经典函数，而是广义函数，则方程可能不存在经典函数解。假定 A^a 是 A 的伴随算子，即有 $\langle Au,\varphi\rangle = \langle u,A^a\varphi\rangle$，其中 $\varphi\in D(\Omega)$ 则

$$\langle u,A^a\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle \tag{2.4.12}$$

这时的 A^a 已经不是直接作用在 u 上，u 可以不是经典函数，只须在分布意义上满足方程（2.4.12），这样的 u 称作原方程的弱解或分布解。

前面的格林函数方程 $AG = \delta$ 由于 δ 是广义函数，故格林函数可以是广义函数。

傅里叶变换在科学技术的许多领域有十分广泛的应用。但是，经典函数的傅里叶变换却受到一定的限制，一些重要的经典函数甚至不存在这种变换。为了扩展傅里叶变换的应用范围，有必要借助广义函数的概念来定义广义傅里叶变换。

为了使广义傅里叶变换更具普遍性并保留经典傅里叶变换的重要特性，广义傅里叶变换定义在速降函数空间。速降函数线性空间由速降函数构成。设 $\varphi\in C^\infty(R^n)$，并对任何 n 重指数 α 及自然数 m 必存在常数 $C_{\alpha m}$，使得

$$\partial^\alpha\varphi(\vec{x}) \leqslant \frac{C_{\alpha m}}{(1+|\vec{x}|^2)^m} \tag{2.4.13}$$

则称 φ 为速降函数。由速降函数线性空间构成的基本空间表示为 $S(R^n)$。$S(R^n)$ 上的连续线性泛函的全体记作 $S'(R^n)$，并称 $S'(R^n)$ 中的元素为缓增广义函数。缓增广义函数 $T\in S'(R^n)$ 的广义傅里叶变换 $F[T]$ 定义为

$$\langle F[T],\varphi\rangle = \langle T,F[\varphi]\rangle,\quad \forall\varphi\in S(R^n) \tag{2.4.14}$$

同样地

$$\langle F^{-1}[T],\varphi\rangle = \langle T,F^{-1}[\varphi]\rangle,\quad \forall\varphi\in S(R^n) \tag{2.4.15}$$

确定一个 $F^{-1}[T]\in S'(R^n)$，$F^{-1}[T]$ 称为 T 的傅里叶逆变换。

显然 $\delta(x)\in S(R)$，作为缓增广义函数 δ_a 定义为

$$\langle\delta_a,\varphi\rangle = \varphi(a),\quad \forall\varphi\in S(R),\quad a\in R \tag{2.4.16}$$

$\delta_a\in S'(R)$ 的广义傅里叶变换为

$$\begin{aligned}\langle F[\delta_a],\varphi\rangle &= \langle\delta_a,F[\varphi]\rangle\\ &= \langle\delta_a,\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\rangle\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax}\mathrm{d}x = \langle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax},\varphi\rangle\end{aligned} \tag{2.4.17}$$

所以

$$F[\delta_a] = e^{-iax} \tag{2.4.18}$$

进而还有

$$F^{-1}[\delta_a] = \frac{1}{2\pi}e^{iax} \tag{2.4.19}$$

$$F[\delta] = 1 \tag{2.4.20}$$

$$F^{-1}[1] = \delta \tag{2.4.21}$$

这些结果现在有了更严格的理论基础。

由于广义函数的分析理论过程比较复杂，今后在应用中用经典方法可以得到正确结果的，就采用经典方法表述，但要用分布理论正确地理解。

2.4.2 非齐次微分算子方程解及格林函数的谱表示

对自伴算子 L 所构成的非齐次微分算子方程（2.3.24），其解可以通过 L 的本征值和本征函数表示出来。其解的形式如式（2.3.27）。因为算子的本征值也称为算子的谱，所以式（2.3.27）可视作算子非齐次方程解的谱表示。若把谱表示式写成 u 为 λ 的函数，我们有

$$u(x,\lambda) = -\sum_n \frac{\langle f,u_n\rangle}{\lambda-\lambda_n}u_n \tag{2.4.22}$$

现在我们把 u 视作 λ 的复变函数，并对 u 在 λ 复平面上沿回路 C_R 积分，即

$$\oint_{C_R} u(x,\lambda)\mathrm{d}\lambda = -\sum_n \langle f,u_n\rangle \oint_{C_R}\frac{1}{\lambda-\lambda_n}\mathrm{d}\lambda \tag{2.4.23}$$

其中 C_R 为以原点为中心 R 为半径的圆。这里的和是取遍包含在圆内的所有本征值 λ_n。显然，由于 λ_n 是分立的实数，所以被积函数只有孤立奇点，且分布在实轴上。若让 $R\to\infty$，则 C_R 可包围所有极点。按照留数理论我们有

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{C_R} u(x,\lambda)\mathrm{d}\lambda = -2\pi i\sum_n \langle f,u_n\rangle u_n \tag{2.4.24}$$

该式右侧的和式部分正是非齐次方程非齐次项 f 的本征函数广义傅里叶级数展开，故有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_c u(x,\lambda)\mathrm{d}\lambda = -f(x) \tag{2.4.25}$$

其中，c 为无穷大回路。

根据非齐次微分算子方程的格林函数解法，方程（2.3.24）对应的格林函数所满足的方程为

$$(L-\lambda)g(x,x',\lambda) = \delta(x-x') \tag{2.4.26}$$

把式（2.4.26）与式（2.3.24）比较并参考式（2.4.25），我们得到

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_c g(x,x',\lambda)\mathrm{d}\lambda = -\delta(x-x') \tag{2.4.27}$$

又仿照与格林函数方程对应的方程（2.3.24）的解的表示，我们有关系

$$g(x,x',\lambda) = \sum_n \frac{\langle \delta(x-x'),u_n(x)\rangle}{\lambda_n-\lambda}u_n(x)$$

$$= \sum_{n} \frac{u_n(x) u_n^*(x')}{\lambda_n - \lambda} \tag{2.4.28}$$

把这一表达式代入式（2.4.27）后便有

$$\begin{aligned} \delta(x - x') &= -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{n} u_n(x) u_n^*(x') \oint_c \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda - \lambda_n} \\ &= \sum_{n} u_n(x) u_n^*(x') \end{aligned} \tag{2.4.29}$$

这正是 δ 函数的一种谱表示。

下面用一个实例的计算更具体地说明这些方法的实际意义。

考虑定义在 $x \in (0, a)$ 上的算子

$$(Lu)(x) = -\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} \tag{2.4.30}$$

其定义域为

$$D(L) = \{u(x): u, u'' \in L^2(0,a), u'(0) = u'(a) = 0\} \tag{2.4.31}$$

需要求解的非齐次方程如式（2.3.24），即

$$(L - \lambda) u(x) = \left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \lambda\right) u(x) = f(x) \tag{2.4.32}$$

边界条件为

$$u'(0) = u'(a) = 0$$

显然，L 是个自伴的斯特姆－刘维尔微分算子，L 的本征值和归一化的本征函数为

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad u_n(x) = \left(\frac{\varepsilon_n}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \cos \frac{n\pi x}{a}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{2.4.33}$$

其中，ε_n 为 Neumann 数，其值为

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n \neq 0 \end{cases}$$

于是，方程（2.4.32）的解可表示为

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{a} \frac{\int_0^a f(x') \cos \frac{n\pi x'}{a} \mathrm{d}x'}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \lambda} \cos \frac{n\pi x}{a} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{a} \end{aligned} \tag{2.4.34}$$

其中

$$A_n = \frac{\varepsilon_n}{a\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \lambda\right]} \int_0^a f(x') \cos \frac{n\pi x'}{a} \mathrm{d}x' \tag{2.4.35}$$

由于 $\cos \dfrac{n\pi x}{a}$ 是算子 L 的本征函数，在物理上它表示 L 所描述系统可能存在的自

然状态，或称自然模式。式（2.4.35）表示外部影响力与自然模式之间的相互作用，从而决定与影响力相适应的系统模式的确定状态。所以称式（2.4.32）为一个确定性问题。以上描述的物理过程对今后理解电磁源的作用很有帮助。

为了求得在该问题中式（2.4.27）的具体形式，需要求得相关的格林函数。与方程（2.4.27）相对应的格林函数方程为

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2}-\lambda\right)g(x,x',\lambda)=\delta(x-x') \tag{2.4.36}$$

$g(x,x',\lambda)$ 满足边界条件

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{x=a}=0 \tag{2.4.37}$$

方程（2.4.36）的解由于 $\delta(x-x')$ 的奇异性，可由 $x=x'$ 分开的两个区域表示，其形式为

$$g(x,x',\lambda)=\begin{cases}A\sin\sqrt{\lambda}x+B\cos\sqrt{\lambda}x, & x<x'\\ C\sin\sqrt{\lambda}(a-x)+D\cos\sqrt{\lambda}(a-x), & x>x'\end{cases} \tag{2.4.38}$$

为满足边界条件（2.4.37）需 $A=C=0$。于是

$$g(x,x',\lambda)=\begin{cases}B\cos\sqrt{\lambda}x, & x<x'\\ D\cos\sqrt{\lambda}(a-x), & x>x'\end{cases} \tag{2.4.39}$$

常数 B 和 D 需要由 $g(x,x',\lambda)$ 的其他性质决定。由方程（2.4.36）可知，$g(x,x',\lambda)$ 必须是可微的且在 $(0,a)$ 区间连续。根据连续条件有

$$g(x,x',\lambda)\Big|_{x=x'-\varepsilon}^{x=x'+\varepsilon}=0 \tag{2.4.40}$$

由于 $\delta(x-x')$ 在 $x=x'$ 点的奇异性要求 $g(x,x',\lambda)$ 在 $x=x'$ 点的一阶导数必是一个阶跃函数。为了使导出的条件更具普遍性，我们从斯特姆－刘维尔算子方程出发，即考虑下述格林函数方程。

$$-\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dg}{dx}\right]+[q(x)-\lambda]gw(x)=\delta(x-x') \tag{2.4.41}$$

而方程（2.4.36）仅是它的特例。

在区间 $[x'-\varepsilon,x'+\varepsilon]$ 上对上式两边积分成为

$$-\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dg}{dx}\right]dx+\int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}[q(x)-\lambda]gw(x)dx=1$$

由于 q、w 和 g 在积分区间连续，使上式中的第二部分积分在取极限 $\varepsilon\to0$ 时消失，于是得到

$$\left.\frac{dg(x,x',\lambda)}{dx}\right|_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon}=-\frac{1}{p(x)} \tag{2.4.42}$$

显然，对式（2.4.36）而言，$p(x)=1$。

运用条件（2.4.40）和（2.4.42）我们可得到式（2.4.39）中的 D 和 B 分别为

$$D=-\frac{\cos\sqrt{\lambda}x'}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a},\quad B=-\frac{\cos\sqrt{\lambda}(a-x')}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a}$$

于是最后得到

$$g(x,x',\lambda)=-\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a}\begin{cases}\cos\sqrt{\lambda}x\cos\sqrt{\lambda}(a-x'), & x<x'\\ \cos\sqrt{\lambda}x'\cos\sqrt{\lambda}(a-x), & x>x'\end{cases}\tag{2.4.43}$$

首先考虑 $x<x'$ 的情形，这时

$$g(x,x',\lambda)=-\frac{\cos\sqrt{\lambda}x\cos\sqrt{\lambda}(a-x')}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a}\tag{2.4.44}$$

把该式代入式（2.4.27）有

$$\delta(x-x')=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_c\frac{\cos\sqrt{\lambda}x\cos\sqrt{\lambda}(a-x')}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}a}\mathrm{d}\lambda\tag{2.4.45}$$

式中的复变函数积分可通过留数定理求得[6]，被积函数在实轴上的一阶极点为

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2,\quad n=0,1,2,\cdots$$

最后结果可表示为

$$\delta(x-x')=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_n}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi}{a}x'\tag{2.4.46}$$

为了获得 $x>x'$ 时的结果，可以在式（2.4.46）中交换 x 和 x' 的位置。由于这一结果在区间 $(0,a)$ 中的所有 x 和 x' 都无改变，即式（2.4.46）对全区间都成立。这是与算子 $L=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ 及边界条件 $u'(0)=u'(a)=0$ 相关的 δ 函数的谱表示。

把式（2.4.46）与式（2.4.29）比较可知，在获得谱表示的同时，也获得了相关问题的本征函数。所以，以上过程提供了一个由格林函数出发获得原问题相应本征问题的求解途径。

2.5　希尔伯特矢量函数空间和矢量微分算子

从本质上讲，电场和磁场是具有矢量性质的物理量。描述电磁场运动规律的麦克斯韦方程组是一个矢量偏微分方程组。因此，电磁理论直接涉及的是矢量函数空间和矢量算子，只有在特定的情况下才能以标量形式讨论问题。当然，矢量函数空间和矢量算子理论可视作标量问题的推广，但把电磁理论直接建立在矢量函数空间和矢量算子的基础上能更精确地描述电磁场的本性。

2.5.1　希尔伯特矢量函数空间

我们已在标量函数空间讨论了现代数学的一些重要理论，这对理解现代电磁理论是很必要的。但是，电场和磁场从本质上讲具有矢量特性，有些问题只能用

矢量来讨论。

一个矢量可以通过它所在空间的维度相同数量的分量来表示，这样就把矢量函数与标量函数联系了起来，因此矢量函数空间的性质与相关分量构成的标量函数空间的性质紧密相连。

在 n 维空间 R^n 有 n 个正交分量的矢量函数 $\vec{u}(\vec{x})$ 可表示为

$$\vec{u}(\vec{x}) = (u_1(\vec{x}), u_2(\vec{x}), \cdots, u_n(\vec{x}))$$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n \tag{2.5.1}$$

其中，$u_i(\vec{x})(i = 1,2,\cdots,n)$ 为 $\vec{u}$ 的分量。如果 $\vec{u}(\vec{x})$ 满足

$$\int_\Omega |\vec{u}(\vec{x})|^p \mathrm{d}\Omega < \infty, \quad \Omega \subset R^n \tag{2.5.2}$$

就称矢量函数 $\vec{u}(\vec{x})$ 在 Ω 上是 p 次方勒贝格可积的。我们把所有在区域 Ω 的 p 次方勒贝格可积的具有 m 个分量的矢量函数的集合记作 $L^p(\Omega)^m$ 。按矢量运算的一般规则，它是个线性函数空间。如果在这一集合中定义内积

$$\langle \vec{u}(\vec{x}), \vec{v}(\vec{x}) \rangle = \int_\Omega \vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{v}^*(\vec{x}) \mathrm{d}\Omega, \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in L^p(\Omega)^m \tag{2.5.3}$$

则 $L^p(\Omega)^m$ 成为一个内积空间。对于 $L^2(\Omega)^m$ 而言，当在其中定义了范数

$$\| \vec{u}(\vec{x}) \| = \sqrt{\langle \vec{u}(\vec{x}), \vec{v}(\vec{x}) \rangle} \tag{2.5.4}$$

则 $L^2(\Omega)^m$ 成为一个完备的内积空间，即成为一个希尔伯特矢量函数空间。

电场和磁场是三维物理空间的矢量，可用三个正交矢量表示。所以任何一个有限区域 Ω 中的全体电磁场矢量函数也构成矢量函数空间。又因为任何有限区域电磁场的能量都必须是有限的，这就要求代表电场或磁场的矢量函数 $\vec{u}(\vec{x})$ 都必须满足

$$\int_\Omega |\vec{u}(\vec{x})|^2 \mathrm{d}\Omega < \infty \tag{2.5.5}$$

这说明表示电磁场的矢量函数空间必然是个 $L^2(\Omega)^3$ 空间。若按式（2.5.3）和式（2.5.4）定义内积和范数，则电磁场矢量函数空间是个希尔伯特空间。

以上结论告诉我们，电磁理论的数学框架可建立在希尔伯特矢量函数空间之上。这是现代电磁场理论可建立在现代分析基础上的最根本的物理依据。当然，正如我们反复强调的，物理规律的数学表述只能视作理想化的数学模型，它的正确性必须接受科学实验的检验。

在微分形式的麦克斯韦方程中包含了对场量的旋度和散度的计算，所以在矢量函数空间中还要包含经过这种运算的元素，这就需要构造更广泛的索伯列夫（Sobolev）矢量函数空间。一部分索伯列夫空间就是希尔伯特空间。例如，下列矢量函数空间

$$H(\mathrm{curl}, \Omega) = \{\vec{u}(\vec{x}) : \vec{u}(\vec{x}), \nabla \times \vec{u}(\vec{x}) \in L^2(\Omega)^3\} \tag{2.5.6}$$

$$H(\mathrm{div}, \Omega) = \{\vec{u}(\vec{x}) : \vec{u}(\vec{x}) \in L^2(\Omega)^3, \nabla \cdot \vec{u}(\vec{x}) \in L^2(\Omega)\} \tag{2.5.7}$$

$$H(\mathrm{curl}, \mathrm{div}, \Omega) = \{\vec{u}(\vec{x}) : \vec{u}(\vec{x}), \nabla \times \vec{u}(\vec{x}) \in L^2(\Omega)^3, \nabla \cdot \vec{u}(\vec{x}) \in L^2(\Omega)\} \tag{2.5.8}$$

其中，$H(\text{curl},\text{div},\Omega) = H(\text{curl},\Omega) \cap (\text{div},\Omega)$。如果在其中分别定义内积

$$\langle \vec{u}(\vec{x}),\vec{v}(\vec{x}) \rangle = \int_{\Omega} [\vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{v}^*(\vec{x}) + (\nabla \times \vec{u}(\vec{x})) \cdot (\nabla \times \vec{v}^*(\vec{x}))] \mathrm{d}\Omega$$

$$\langle \vec{u}(\vec{x}),\vec{v}(\vec{x}) \rangle = \int_{\Omega} [\vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{v}^*(\vec{x}) + (\nabla \cdot \vec{u}(\vec{x}))(\nabla \cdot \vec{v}^*(\vec{x}))] \mathrm{d}\Omega$$

以及

$$\begin{aligned}\langle \vec{u}(\vec{x}),\vec{v}(\vec{x}) \rangle = \int_{\Omega} [&\vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{v}^*(\vec{x}) + (\nabla \times \vec{u}(\vec{x})) \cdot (\nabla \times \vec{v}^*(\vec{x})) \\ &+ (\nabla \cdot \vec{u}(\vec{x}))(\nabla \cdot \vec{v}^*(\vec{x}))] \mathrm{d}\Omega\end{aligned}$$

则都成为希尔伯特矢量函数空间。

2.5.2　电磁理论中常见矢量偏微分算子

从上一章的讨论已知，对时变电磁场问题，两个旋度方程是基本的，但它们是电场和磁场的联立方程。为了方便求解电磁场问题，往往先从方程中消去一个场量函数，而求得单一场量所满足的方程。对于一般各向异性媒质的情况，这种方程具有式（1.1.61）和式（1.1.62）的形式。

如果用 $\vec{u}(\vec{x})$ 表示电场，$f(\vec{r})$ 表示方程（1.1.61）右侧的场源，则电场所满足的方程可表示为下面的形式。

$$\nabla \times (\overline{\overline{\mu}})^{-1} \cdot \nabla \times \vec{u}(\vec{r}) - \omega^2 \overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \vec{u}(\vec{r}) = f(\vec{r}), \quad \vec{r} \in \Omega \qquad (2.5.9)$$

假设 $\vec{u}(\vec{r})$ 在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 满足齐次边界条件

$$B(\vec{u}) \bigg|_{\partial\Omega} = 0 \qquad (2.5.10)$$

则式（2.5.9）和式（2.5.10）构成一个电磁场的边值问题。

为了用算子理论来讨论其求解问题，我们定义算子 $L: L^2(\Omega)^3 \to L^2(\Omega)^3$，

$$(L\vec{u})(\vec{r}) = \nabla \times (\overline{\overline{\mu}})^{-1} \cdot \nabla \times \vec{u}(\vec{r}) - \omega^2 \overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \vec{u}(\vec{r}) \qquad (2.5.11)$$

$$D(L) = \left\{ \vec{u}(\vec{r}) : \vec{u}(\vec{r}), \nabla \times (\overline{\overline{\mu}})^{-1} \nabla \times \vec{u}(\vec{r}) \in L^2(\Omega)^3, B(u) \bigg|_{\partial\Omega} = 0 \right\} \qquad (2.5.12)$$

如果 $\vec{u}(\vec{r}),\vec{v}(\vec{r}) \in D(L)$，则

$$\begin{aligned}\langle L\vec{u},\vec{v} \rangle - \langle \vec{u},L\vec{v} \rangle &= \int_{\Omega} [(\nabla \times (\overline{\overline{\mu}})^{-1} \cdot \nabla \times \vec{u} - \omega^2 \overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v}^* \\ &\quad - \vec{u} \cdot (\nabla \times (\overline{\overline{\mu}})^{-1} \cdot \nabla \times \vec{v} - \omega^2 \overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \vec{v})^*] \mathrm{d}\Omega \\ &= \int_{\Omega} [(\nabla \times (\overline{\overline{\mu}})^{-1} \cdot \nabla \times \vec{u}) \cdot \vec{v}^* - \vec{u} \cdot (\nabla \times (\overline{\overline{\mu}})^{-1} \cdot \nabla \\ &\quad \times \vec{v})^*] \mathrm{d}\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} [(\overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v}^* - (\overline{\overline{\varepsilon}} \cdot \vec{v})^* \cdot \vec{u}] \mathrm{d}\Omega\end{aligned} \qquad (2.5.13)$$

利用矢量恒等式 $\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b})$ 可知

$$\vec{v}^* \cdot (\nabla \times (\overline{\overline{\mu}})^{-1} \cdot \nabla \times \vec{u}) = ((\overline{\overline{\mu}})^{-1} \cdot \nabla \times \vec{u}) \cdot \nabla \times \vec{v}^*$$

$$\vec{u}\cdot(\nabla\times(\overline{\overline{\mu}})^{-1}\cdot\nabla\times\vec{v})^{*}=\begin{aligned}&-\nabla\cdot(\vec{v}^{*}\times(\overline{\overline{\mu}})^{-1}\cdot\nabla\times\vec{u})\\&((\overline{\overline{\mu}})^{-1}\cdot\nabla\times\vec{v})^{*}\cdot\nabla\times\vec{u}\\&-\nabla\cdot[\vec{u}\times((\overline{\overline{\mu}})^{-1}\cdot\nabla\times\vec{v})^{*}]\end{aligned}$$

把这一结果代入式（2.5.13）即得

$$\begin{aligned}\langle L\vec{u},\vec{v}\rangle-\langle\vec{u},L\vec{v}\rangle=&\int_{\Omega}[((\overline{\overline{\mu}})^{-1}\cdot\nabla\times\vec{u}\cdot\nabla\times\vec{v}^{*}-((\overline{\overline{\mu}})^{-1}\cdot\nabla\times\vec{v})^{*}\cdot\nabla\times\vec{u}]\mathrm{d}\Omega\\&-\omega^{2}\int_{\Omega}[(\overline{\overline{\varepsilon}}\cdot\vec{u})\cdot\vec{v}^{*}-(\overline{\overline{\varepsilon}}\cdot\vec{v})^{*}\cdot\vec{u}]\mathrm{d}\Omega\\&+\oint(\vec{u}\times((\overline{\overline{\mu}})^{-1}\cdot\nabla\times\vec{v})^{*}-\vec{v}^{*}\times(\overline{\overline{\mu}})^{-1}\cdot\nabla\times\vec{u})\\&\cdot\hat{n}\mathrm{d}S\end{aligned}\tag{2.5.14}$$

考虑关系 $\vec{n}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{n})=\vec{b}\cdot(\vec{n}\times\vec{a})$，面积分号内存在关系

$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot[\vec{u}\times((\overline{\overline{\mu}})^{-1}\cdot\nabla\times\vec{v})^{*}]&=\vec{u}\cdot[((\overline{\overline{\mu}})^{-1}\cdot\nabla\times\vec{v})^{*}\times\vec{n}]\\&=((\overline{\overline{\mu}})^{-1}\cdot\nabla\times\vec{v})^{*}\cdot(\vec{n}\times\vec{u})\\\vec{n}\cdot(\vec{v}^{*}\times(\overline{\overline{\mu}})^{-1}\cdot\nabla\times\vec{u})&=\vec{v}^{*}\cdot[((\overline{\overline{\mu}})^{-1}\cdot\nabla\times\vec{u})\times\vec{n}]\\&=((\overline{\overline{\mu}})^{-1}\cdot\nabla\times\vec{u})\cdot(\vec{n}\times\vec{v}^{*})\end{aligned}$$

当 Ω 的边界为理想导电体时 $\vec{n}\times\vec{u}(\vec{r})\Big|_{\partial\Omega}=0$，当边界为理想导磁体时有 $\vec{n}\times(\overline{\overline{\mu}})^{-1}\cdot\nabla\times\vec{u}(\vec{r})\Big|_{\partial\Omega}=0$，所以当

$$B(\vec{u})\Big|_{\partial\Omega}=\vec{n}\times\vec{u}(\vec{r})\Big|_{\partial\Omega}=0\tag{2.5.15}$$

或者

$$B(\vec{u})\Big|_{\partial\Omega}=\vec{n}\times(\overline{\overline{\mu}})^{-1}\cdot\nabla\times\vec{u}(\vec{r})\Big|_{\partial\Omega}=0\tag{2.5.16}$$

时都使式（2.5.14）中的面积分消失。进一步，如果 Ω 中的媒质为无耗且是互易的，即当

$$(\overline{\overline{\mu}})^{\dagger}=\overline{\overline{\mu}},\quad(\overline{\overline{\varepsilon}})^{\dagger}=\overline{\overline{\varepsilon}}$$

时则使得

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\times\vec{u}\cdot((\overline{\overline{\mu}})^{-1}\cdot\nabla\times\vec{v})^{*}=\nabla\times\vec{v}^{*}\cdot(\overline{\overline{\mu}})^{-1}\cdot\nabla\times\vec{u}\\&\vec{u}\cdot(\overline{\overline{\varepsilon}}\cdot\vec{v})^{*}=\vec{v}^{*}\cdot(\overline{\overline{\varepsilon}}\cdot\vec{u})\end{aligned}\right\}\tag{2.5.17}$$

所以，如果 Ω 内的媒质是互易且无耗的，Ω 的边界为理想导电体或理想导磁体时式（2.5.11）所定义的算子 L 就是个自伴的矢量微分算子。如果 Ω 内为各向同性无耗媒质，以上结论自然仍是正确的。

如果 $\vec{u}(\vec{r})$ 代表的是磁场，则只是 $\overline{\overline{\mu}}$ 与 $\overline{\overline{\varepsilon}}$ 的位置对换而已。对换后的算子 L 的性质没有变化，以上结论都是适用的。

矢量微分算子（2.5.11）主要由两个旋度算符的接连作用构成，常称为双旋度矢量算子，由它构成的方程（2.5.9）则称为矢量波动方程。

如果 Ω 内的媒质是均匀各向同性的，则描述其间电磁场的方程变为式

（1.1.63）和（1.1.64）。利用矢量恒等式 $\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla\nabla\cdot\vec{A}-\nabla^2\vec{A}$ 和以下关系

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r})&=\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon}\\ \nabla\cdot\vec{H}(\vec{r})&=\frac{\rho_m(\vec{r})}{\mu}\end{aligned}\right\}\tag{2.5.18}$$

可把式（1.1.63）和（1.1.64）变成

$$\nabla^2\vec{E}(\vec{r})+\omega^2\varepsilon\mu\vec{E}(\vec{r})=\mathrm{i}\omega\mu\vec{J}(\vec{r})+\nabla\times\vec{M}(\vec{r})+\frac{\nabla\rho(\vec{r})}{\varepsilon}\tag{2.5.19}$$

$$\nabla^2\vec{H}(\vec{r})+\omega^2\varepsilon\mu\vec{H}(\vec{r})=\mathrm{i}\omega\varepsilon\vec{M}(\vec{r})-\nabla\times\vec{J}(\vec{r})+\frac{\nabla\rho_m(\vec{r})}{\mu}\tag{2.5.20}$$

再利用频域中的连续性方程

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{J}(\vec{r})&=-\mathrm{i}\omega\rho(\vec{r})\\ \nabla\cdot\vec{M}(\vec{r})&=-\mathrm{i}\omega\rho_m(\vec{r})\end{aligned}\right\}\tag{2.5.21}$$

又有

$$\nabla^2\vec{E}(\vec{r})+k^2\vec{E}(\vec{r})=\mathrm{i}\omega\mu\left[\bar{\bar{I}}+\frac{\nabla\nabla}{k^2}\right]\cdot\vec{J}(\vec{r})+\nabla\times\vec{M}(\vec{r})\tag{2.5.22}$$

$$\nabla^2\vec{H}(\vec{r})+k^2\vec{H}(\vec{r})=\mathrm{i}\omega\varepsilon\left[\bar{\bar{I}}+\frac{\nabla\nabla}{k^2}\right]\cdot\vec{M}(\vec{r})-\nabla\times\vec{J}(\vec{r})\tag{2.5.23}$$

其中，$k^2=\omega^2\varepsilon\mu$；$\bar{\bar{I}}$ 为单位并矢。这最后两式称为矢量亥姆霍兹方程。如果我们定义算子

$$A:L^2(\Omega)^3\to L^2(\Omega)^3\tag{2.5.24}$$

$$(A\vec{u})(\vec{r})=(\nabla^2+k^2)\vec{u}(\vec{r})$$

$$D(A)=\{\vec{u}(\vec{r}):\vec{u}(\vec{r}),\nabla^2\vec{u}(\vec{r})\in L^2(\Omega)^3,B(\vec{u})|_{\partial\Omega}=0\}$$

可把 A 称为亥姆霍兹算子。为讨论这一算子的性质，需要记着它的本来定义，即

$$\nabla^2\vec{u}(\vec{r})=\nabla(\nabla\cdot u(\vec{r}))-\nabla\times\nabla\times\vec{u}(\vec{r})\tag{2.5.25}$$

如果在 Ω 内 $\vec{u}(\vec{r})$ 满足 $\nabla\cdot\vec{u}(\vec{r})=0$，即 Ω 中没有 $\rho(\vec{r})$ 或 $\rho_m(\vec{r})$ 存在，则 $\nabla^2\vec{u}(\vec{r})=-\nabla\times\nabla\times\vec{u}(\vec{r})$，这时算子 A 与算子（2.5.11）在均匀各向同性媒质时的性质一致。

事实上，定义算子 $A:L^2(\Omega)^3\to L^2(\Omega)^3$，

$$(A\vec{u})(\vec{r})=\nabla\times\nabla\times\vec{u}(\vec{r})\tag{2.5.26}$$

$$D(A)=\{\vec{u}(\vec{r}):\vec{u}(\vec{r}),\nabla\times\nabla\times\vec{u}(\vec{r})\in L^2(\Omega)^3,B(\vec{u})|_{\partial\Omega}=0\}$$

因为，若 $\vec{u}(\vec{r}),\vec{v}(\vec{r})\in D(A)$，$B(\vec{u})$ 为式（2.5.15）或（2.5.16）所示，

$$\begin{aligned}\langle A\vec{u},\vec{v}\rangle&=\int_\Omega\vec{v}^*\cdot(\nabla\times\nabla\times\vec{u})\mathrm{d}\Omega\\&=\int_\Omega\vec{u}\cdot(\nabla\times\nabla\times\vec{v})^*\mathrm{d}\Omega+\oint_{\partial\Omega}[(\vec{n}\times\vec{u})\cdot(\nabla\times\vec{v}^*)-(\vec{n}\times\vec{v}^*)\cdot(\nabla\\&\quad\times\vec{u})]\mathrm{d}S\\&=\langle\vec{u},A^a\vec{v}\rangle\end{aligned}$$

其中

$$(A^a\vec{v})(\vec{r}) = \nabla\times\nabla\times\vec{v}(\vec{r}) \tag{2.5.27}$$

$$D(A^a) = \{\vec{v}(\vec{r}):\vec{v}(\vec{r}),\nabla\times\nabla\times\vec{v}(\vec{r}) \in L^2(\Omega)^3, B(\vec{v})|_{\partial\Omega} = 0\}$$

显然，$A^a = A$，因此 A 为自伴的。进一步不难证明，如果 k^2 为实数，则式（2.5.26）所定义的 A 与 k^2 之和构成的亥姆霍兹矢量偏微分算子 $\nabla^2 + k^2$ 也是自伴的。

2.5.3　矢量微分算子的并矢格林函数

并矢格林函数法是求解非齐次矢量微分算子方程的重要方法，尤其是可使某些电磁问题的表述和求解过程变得更为简洁，在求解电磁场的边值问题中有广泛应用。在此讨论一些基本概念，在具体应用时再作详细讨论。

首先，讨论无界均匀各向同性媒质空间的电磁场问题，这时需考虑的算子方程如式（1.1.63）和（1.1.64）所示。在只考虑存在电型源的时候，这些方程成为

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}(\vec{r}) - k^2\vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{i}\omega\mu\vec{J}(\vec{r}) \tag{2.5.28}$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{H}(\vec{r}) - k^2\vec{H}(\vec{r}) = \nabla\times\vec{J}(\vec{r}) \tag{2.5.29}$$

这种矢量微分算子方程也可以用类似于标量微分算子方程的格林函数解法。例如，对于电场 $\vec{E}(\vec{r})$ 所满足的方程（2.5.28）就可以把解表示为

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{i}\omega\mu\int_V \overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}\,')\vec{J}(\vec{r})\mathrm{d}V' \tag{2.5.30}$$

其中，V 为 $\vec{J}(\vec{r})$ 的支撑集；$\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}\,')$ 为一并矢函数，称为电型并矢格林函数，它表示由电流源求电场时相关的格林函数。考虑到 δ 函数的性质，可把电流源表示成

$$\vec{J}(\vec{r}) = \int_V \overline{\overline{I}}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\cdot\vec{J}(\vec{r}\,')\mathrm{d}V' \tag{2.5.31}$$

把式（2.5.30）和（2.5.31）代入方程（2.5.28）即可得到

$$\nabla\times\nabla\times\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}\,') - k^2\,\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}\,') = \overline{\overline{I}}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \tag{2.5.32}$$

这是 $\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}\,')$ 所应满足的算子方程。这样一来，如果我们由方程（2.5.32）先解出了 $\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}\,')$，则方程（2.5.28）的解就可以由一个积分式（2.5.30）表示出来。但是，由于 δ 函数是个广义函数，$\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}\,')$ 也是广义函数，故式（2.5.30）是个奇异积分，需要进行特殊处理。

针对方程（2.5.29）可用类似的方法引入与磁场对应的格林函数。而且，由于磁场的源是 $\nabla\times\vec{J}(\vec{r})$，可以推知两种格林函数之间的关系。

为了使式（2.5.30）正确表示方程（2.5.28）的解，显然必须要求格林函数 $\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}\,')$ 与电场 $\vec{E}(\vec{r})$ 必须满足相同的无穷远处的极限条件。对于有界问题就要求满足相同的边界条件。

2.6　电磁场矢量微分算子方程的变分原理

和标题问题一样，可以把矢量微分算子方程的求解问题转变成为泛函极值问题。虽然用这种方法很难得到解析解，但对求得近似数值解却提供了一条重要途

径，是用有限元法求解复杂电磁场问题的一种出发点。这里先对原理进行讨论。

2.6.1　矢量电磁场的标准变分原理

假设所求解的电磁场问题的解域为 Ω，其边界 $\partial\Omega$ 为理想导体或理想磁体，Ω 中的媒质是无耗的各向同性的，其参数用 $\varepsilon(\vec{r})$ 和 $\mu(\vec{r})$ 表示，则 Ω 中的电场满足频域方程。

$$\nabla \times \mu^{-1} \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) - \mu^{-1}k^2\vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{i}\omega\vec{J}(\vec{r}) \tag{2.6.1}$$

其中，$\vec{E}(\vec{r})$ 满足齐次边界条件 $\vec{n} \times \vec{E} = 0$ 或 $\vec{n} \times \nabla \times \vec{E} = 0$。我们已经证明，只要媒质是无耗的，方程所对应的算子

$$A = (\nabla \times \mu^{-1} \nabla \times) - \mu^{-1}k^2 \tag{2.6.2}$$

就是自伴的。对标量算子我们已证明，对于方程（2.3.28）的解，当 A 为自伴算子时，就使泛函（2.3.29）取极值，反之亦然。用类似的方法容易证明，对于由矢量微分算子构成的方程

$$A\vec{u}(\vec{r}) = \vec{s}$$

只要 A 是自伴的，则与其等价的泛函极值问题的泛函为

$$J[\vec{u}] = \langle A\vec{u},\vec{u}\rangle - \langle \vec{u},\vec{s}\rangle - \langle \vec{s},\vec{u}\rangle$$

所以，与方程（2.6.1）等价的泛函问题的泛函式为

$$\begin{aligned} J[\vec{E}] &= \langle A\vec{E},\vec{E}\rangle - \langle \vec{E}, -\mathrm{i}\omega\vec{J}\rangle - \langle -\mathrm{i}\omega\vec{J},\vec{E}\rangle \\ &= \int_\Omega \vec{E}^*(\vec{r}) \cdot (\nabla \times \mu^{-1} \nabla \times \vec{E} - \mu^{-1}k^2\vec{E})\mathrm{d}\Omega - \mathrm{i}\omega\int_\Omega(\vec{E}\cdot\vec{J}^* - \vec{E}^*\cdot\vec{J})\mathrm{d}\Omega \end{aligned}$$

利用第一矢量格林定理

$$\begin{aligned} &\int_\Omega[\varphi(\nabla \times \vec{a}) \cdot (\nabla \times \vec{b}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \varphi \nabla \times \vec{b})]\mathrm{d}\Omega \\ &= \oint_S \varphi(\vec{a} \times \nabla \times \vec{b}) \cdot \vec{n}\mathrm{d}S \\ &= \oint_S u(\nabla \times \vec{b}) \cdot (\vec{n} \times \vec{a})\mathrm{d}S \end{aligned}$$

和齐次边界条件又可得

$$\begin{aligned} J[\vec{E}] = &\int_\Omega[(\mu^{-1} \nabla \times \vec{E}) \cdot (\nabla \times \vec{E}^*) - \mu^{-1}k^2\vec{E} \cdot \vec{E}^*]\mathrm{d}\Omega \\ &- \mathrm{i}\omega\int_V(\vec{E}\cdot\vec{J}^* - \vec{E}^*\cdot\vec{J})\mathrm{d}V \end{aligned} \tag{2.6.3}$$

其中，V 为 $\vec{J}(\vec{r})$ 的支撑集。

如果媒质是有耗的，则算子 A 就不再是自伴的，这时需要求出 A 的伴随算子 A^a。借助于 A^a 构成的辅助方程可获得相应的泛函，其方法与上面讨论过的标量微分方程变分原理相类似。

2.6.2　矢量电磁场的修正变分原理

若求解的问题与式（2.6.1）基本相同，唯一差别是边界条件为非齐次的，

形如

$$\left.\begin{aligned}\vec{n}\times\vec{E}&=\vec{g}, \quad \text{在 } S_1 \text{ 上}\\ \vec{n}\times\nabla\times\vec{E}&=\vec{q}, \quad \text{在 } S_2 \text{ 上}\end{aligned}\right\} \tag{2.6.4}$$

且 $S_1+S_2=\partial\Omega$。在这种边界条件下算子 A 不再是自伴的，因此标准变分原理失效，需要修正的变分原理。

把式（2.6.1）缩写成

$$A\vec{E}(\vec{r})=\vec{f} \tag{2.6.5}$$

并设定一个新矢量函数 $\vec{E}'(\vec{r})$ 为

$$\vec{E}'=\vec{E}-\vec{u} \tag{2.6.6}$$

其中，$\vec{u}$ 为满足非齐次边界条件（2.6.4）的任意矢量函数。由于 $\vec{E}$ 和 $\vec{u}$ 都满足同样的非齐次边界条件，则 $\vec{E}'$ 将满足齐次边界条件。把式（2.6.6）代入式（2.6.5）可得

$$A\vec{E}'=\vec{f}-A\vec{u}=\vec{f}' \tag{2.6.7}$$

其中，$\vec{f}'=\vec{f}-A\vec{u}$。对新的方程（2.6.7）而言，由于 $\vec{E}'$ 满足齐次边界条件，这时的算子对矢量函数 $\vec{E}'$ 成为自伴的。于是与方程（2.6.7）等价的变分问题中的泛函应为

$$J[\vec{E}']=\langle A\vec{E}',\vec{E}'\rangle-\langle\vec{f}',\vec{E}'\rangle-\langle\vec{E}',\vec{f}'\rangle \tag{2.6.8}$$

代入 $\vec{E}'$ 和 $\vec{f}'$ 的表达式即得

$$J[\vec{E}']=\langle A(\vec{E}-\vec{u}),\vec{E}-\vec{u}\rangle-\langle\vec{E}-\vec{u},\vec{f}-A\vec{u}\rangle-\langle\vec{f}-A\vec{u},\vec{E}-\vec{u}\rangle$$

把上式展开，并考虑到对 $J[\vec{E}]$ 取变分时与 $\vec{E}$ 无关的项将变为零，可将其舍去，最后可得

$$J[\vec{E}]=\langle A\vec{E},\vec{E}\rangle-\langle A\vec{E},\vec{u}\rangle+\langle\vec{E},A\vec{u}\rangle-\langle\vec{E},\vec{f}\rangle-\langle\vec{f},\vec{E}\rangle \tag{2.6.9}$$

把内积表示成积分形式有

$$\begin{aligned}J[\vec{E}]=&\int_\Omega\vec{E}^*\cdot(\nabla\times\mu^{-1}\nabla\times\vec{E}-\mu^{-1}k^2\vec{E})\mathrm{d}\Omega\\&-\int_\Omega\vec{u}^*\cdot(\nabla\times\mu^{-1}\nabla\times\vec{E}-\mu^{-1}k^2\vec{E})\mathrm{d}\Omega\\&+\int_\Omega\vec{E}\cdot(\nabla\times\mu^{-1}\nabla\times\vec{u}^*-\mu^{-1}k^2\vec{u}^*)\mathrm{d}\Omega\\&-\int_\Omega(\vec{E}\cdot\mathrm{i}\omega\vec{J}^*-\mathrm{i}\omega\vec{J}\cdot\vec{E}^*)\mathrm{d}\Omega\end{aligned} \tag{2.6.10}$$

考虑到 $\vec{E}^*\cdot\nabla\times\mu^{-1}\nabla\times\vec{E}=(\mu^{-1}\nabla\times\vec{E})\cdot(\nabla\times\vec{E}^*)-\nabla\cdot(\vec{E}^*\times\mu^{-1}\nabla\times\vec{E})$ 以及与其类似的其他各项的同样的矢量关系，并运用高斯定理，式（2.6.10）可表示成以下的形式。

$$\begin{aligned}J[\vec{E}]=&\int_\Omega(\mu^{-1}\nabla\times\vec{E})\cdot(\nabla\times\vec{E}^*)\mathrm{d}\Omega-\int_\Omega\mu^{-1}k^2\vec{E}\cdot\vec{E}^*\mathrm{d}\Omega-\mathrm{i}\omega\int_\Omega(\vec{E}\cdot\vec{J}^*-\vec{J}\cdot\vec{E}^*)\mathrm{d}\Omega\\&-\oint_S(\vec{E}^*\times\mu^{-1}\nabla\times\vec{E}+\vec{E}\times\mu^{-1}\nabla\times\vec{u}^*-\vec{u}^*\times\mu^{-1}\nabla\times\vec{E})\cdot\vec{n}\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{2.6.11}$$

再进一步利用关系 $(\vec{E}^* \times \mu^{-1}\nabla\times\vec{E})\cdot\vec{n} = (\vec{n}\times\vec{E}^*)\cdot\mu^{-1}\nabla\times\vec{E} = -\vec{E}^*\cdot(\vec{n}\times\mu^{-1}\nabla\times\vec{E})$ 及类似的其他各项的相似关系和边界条件，同时舍去与 $\vec{E}$ 无关的各项，最后就可得到

$$J[\vec{E}] = \int_\Omega \mu^{-1}[(\nabla\times\vec{E})\cdot(\nabla\times\vec{E}^*) - k^2\vec{E}\cdot\vec{E}^*]\mathrm{d}\Omega - \mathrm{i}\omega\int_V(\vec{E}\cdot\vec{J}^* - \vec{J}\cdot\vec{E}^*)\mathrm{d}V + \int_{S_2}\mu^{-1}(\vec{E}^*\cdot\vec{q} + \vec{E}\cdot\vec{q}^*)\mathrm{d}S \tag{2.6.12}$$

由此结果可以看出，所引入的辅助函数 $\vec{u}$ 在泛函中并不出现。

2.6.3　矢量电磁场的广义变分原理

通过以前的讨论我们已经明确，电磁场矢量微分算子的自伴性与定义域内媒质是否有耗有直接关系。即使在齐次边界条件下，只要媒质是有耗的，算子仍然不是自伴的。由于自伴算子的变分问题具有最简洁的形式，因此希望其类似的特性能得到更广泛的应用。有耗媒质的特点是其电磁特性参数为复值函数。在希尔伯特空间内积的定义中对其中一个函数要取复共轭，由此导致有耗媒质与无耗媒质的差别。为了取消媒质有耗性的这种限制，在电磁理论中常常使用一种伪内积的定义，其形式为

$$\langle\vec{u}(\vec{r}),\vec{v}(\vec{r})\rangle = \int_\Omega \vec{u}(\vec{r})\cdot\vec{v}(\vec{r})\mathrm{d}\Omega \tag{2.6.13}$$

有时也称为对称积。为了方便，这里仍用了希尔伯特空间内积的符号。但事实上，只有对实值函数它才与原来的内积定义相当。在一般情况下，由它不能决定一个希尔伯特空间。尽管如此，这种定义也确实带来一些方便。如果算子 A 按定义（2.6.13）满足以下关系

$$\langle A\vec{u},\vec{v}\rangle = \langle\vec{u},A\vec{v}\rangle \tag{2.6.14}$$

我们就称算子 A 为伪自伴的或对称的。

由这样的算子 A 构成的微分算子方程

$$A\vec{u}(\vec{r}) = \vec{f} \tag{2.6.15}$$

的解使泛函

$$J[\vec{u}] = \langle A\vec{u},\vec{u}\rangle - 2\langle\vec{u},\vec{f}\rangle \tag{2.6.16}$$

取驻值，反之亦然。我们称这种关系为广义变分原理。为了证明这一原理的正确性，对泛函 $J[\vec{u}]$ 取一阶变分可得

$$\begin{aligned}\delta J[\vec{u}] &= \langle A\delta\vec{u},\vec{u}\rangle + \langle A\vec{u},\delta\vec{u}\rangle - 2\langle\delta\vec{u},\vec{f}\rangle \\ &= \langle\delta\vec{u},A\vec{u}\rangle + \langle A\vec{u},\delta\vec{u}\rangle - 2\langle\delta\vec{u},\vec{f}\rangle \\ &= 2\langle\delta\vec{u},A\vec{u} - \vec{f}\rangle\end{aligned} \tag{2.6.17}$$

如果 $\vec{u}$ 满足方程（2.6.15）则有

$$\delta J[\vec{u}] = 0 \tag{2.6.18}$$

于是得出结论，满足方程（2.6.15）的 $\vec{u}$ 使 $\vec{J}[\vec{u}]$ 取驻值，反之使 $\vec{J}[\vec{u}]$ 取驻值的 $\vec{u}$ 满足式（2.6.15）。

我们已证明，方程（2.6.1）中的算子（2.6.2）在 ε 与 μ 为实值（即媒质无耗）和齐次边界条件下是自伴的，但当媒质有耗时就不再是自伴的。显然，如果采用式（2.6.13）的对称积定义，在媒质为有耗的情况下仍是对称的，则与方程（2.6.1）等价的广义变分问题的泛函可表示为

$$\begin{aligned} J[\vec{E}] &= \langle A\vec{E},\vec{E}\rangle - 2\langle \vec{E}, -\mathrm{i}\omega\vec{J}\rangle \\ &= \int_\Omega \vec{E}\cdot(\nabla\times\mu^{-1}\nabla\times\vec{E})\mathrm{d}\Omega + 2\mathrm{i}\omega\int_V \vec{E}\cdot\vec{J}\mathrm{d}V \\ &= \int_\Omega \mu^{-1}[(\nabla\times\vec{E})\cdot(\nabla\times\vec{E}) - k^2\vec{E}\cdot\vec{E}]\mathrm{d}\Omega + 2\mathrm{i}\omega\int_V \vec{E}\cdot\vec{J}\mathrm{d}V \end{aligned} \tag{2.6.19}$$

其中，V 为 $\vec{J}(\vec{r})$ 的支撑集。

广义变分原理与标准变分原理有明显的区别。按希尔伯特空间中内积定义的经典变分原理得到的是实泛函，而按对称积定义的广义变分原理所得到的泛函对有耗媒质而言是复泛函。经典变分原理中的泛函往往对应一种物理量（如能量）；而广义变分原理中的泛函却缺乏这种对应性，而且只能讨论泛函的驻定性。

2.7　积分算子和积分算子方程

如果映射是积分，就称为积分算子。由积分算子构成的方程称为积分算子方程。积分算子方程在电磁理论中起着重要作用，很多复杂的电磁问题可用积分算子方程的形式表达出来。尽管只有极少数积分算子方程能求得解析解，但在求得数值近似解方面却有独特优点。

2.7.1　积分算子的基本概念

设有一算子 $A: L^2(\Omega)\to L^2(\Omega), \Omega\subset R^n$，定义为

$$(Au)(\vec{x}) = \int_\Omega K(\vec{x},\vec{y})u(\vec{y})\mathrm{d}\Omega \tag{2.7.1}$$

其中，$\vec{x},\vec{y}\in\Omega, K(\vec{x},\vec{y})\in L^2(\Omega\times\Omega)$，算子 A 称为积分算子，$K(\vec{x},\vec{y})$ 称为算子的核。

如果

$$\| K^2 \| = \int_\Omega\int_\Omega |K(\vec{x},\vec{y})|^2\mathrm{d}\Omega_{\vec{y}}\mathrm{d}\Omega_{\vec{x}} < \infty \tag{2.7.2}$$

则称算子核 K 是有界的，这时因为

$$\begin{aligned} \| Au \|^2 &= \int_\Omega |(Au)(\vec{x})|^2\mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \left| \int_\Omega K(\vec{x},\vec{y})u(\vec{y})\mathrm{d}\Omega_{\vec{y}} \right|^2_{\mathrm{d}\Omega_{\vec{x}}} \\ &\leqslant \int_\Omega\int_\Omega |K(\vec{x},\vec{y})|^2\mathrm{d}\Omega_{\vec{y}}\mathrm{d}\Omega_{\vec{x}} \| u \|^2 \end{aligned} \tag{2.7.3}$$

则 A 为有界算子。

设 $u(\vec{x})$、$v(\vec{x}) \in L^2(\Omega)$，因为

$$\begin{aligned}\langle Au,v\rangle &= \int_\Omega\Big[\int_\Omega K(\vec{x},\vec{y})u(\vec{y})\mathrm{d}\Omega_{\vec{y}}\Big]v^*(\vec{x})\mathrm{d}\Omega_{\vec{x}}\\ &= \int_\Omega u(\vec{y})\int_\Omega[K^*(\vec{x},\vec{y})v(\vec{x})]^*\mathrm{d}\Omega_{\vec{x}}\mathrm{d}\Omega_{\vec{y}}\\ &= \int_\Omega u(\vec{x})\int_\Omega K^*(\vec{y},\vec{x})v(\vec{y})\mathrm{d}\Omega_{\vec{y}}\mathrm{d}\Omega_{\vec{x}}\end{aligned} \tag{2.7.4}$$

则显然 A 的伴随算子 A^a 满足

$$(A^a v)(\vec{x}) = \int_\Omega K^*(\vec{y},\vec{x})v(\vec{y})\mathrm{d}\Omega \tag{2.7.5}$$

即有

$$\langle Au,v\rangle = \langle u,A^a v\rangle$$

如果有

$$K(\vec{x},\vec{y}) = K^*(\vec{y},\vec{x}) \tag{2.7.6}$$

则 A 是自伴的。

若算子 A 定义为

$$(Au)(\vec{x}) = \int_\Omega \frac{K(\vec{x},\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|^\alpha}u(\vec{y})\mathrm{d}\Omega \tag{2.7.7}$$

其中，$0 \leqslant \alpha < 1$，$\Omega \subset R^n$，$K(\vec{x},\vec{y})$ 在 $\Omega\times\Omega$ 上有界，则 A 在 $L^2(\Omega)$ 有界，并称为弱奇异积分算子。

特别地，弱奇异积分算子

$$(Au)(x) = \int_a^b \frac{K(x,y)}{|x-y|^\alpha}u(y)\mathrm{d}y \tag{2.7.8}$$

若 $K(x,y) \in L^\infty((a,b)\times(a,b))$，$0\leqslant\alpha<1$，则 A 在 $L^p(a,b)(1<p<\infty)$ 中有界，当 $\alpha = 1$ 时则是在柯西积分主值意义下有界。作为特例，希尔伯特变换算子

$$(Au)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(y)}{x-y}\mathrm{d}y \tag{2.7.9}$$

在空间 $L^p(-\infty,\infty)(1<p<\infty)$ 是有界的。

对于矢量积分算子 $A:L^2(\Omega)^m \to L^2(\Omega)^m$，$\Omega\subset R^n$，定义为

$$(A\vec{u})(\vec{x}) = \int_\Omega \overline{\overline{K}}(\vec{x},\vec{y})\cdot\vec{u}(\vec{y})\mathrm{d}\Omega \tag{2.7.10}$$

其中，$\overline{\overline{K}}(\vec{x},\vec{y}) \in L^2(\Omega\times\Omega)^{m\times m}$ 是有界的。由于

$$\begin{aligned}\langle A\vec{u},\vec{v}\rangle &= \int_\Omega\int_\Omega \overline{\overline{K}}(\vec{x},\vec{y})\vec{u}(\vec{y})\mathrm{d}\Omega_{\vec{y}}\cdot\vec{v}^*(\vec{x})\mathrm{d}\Omega_{\vec{x}}\\ &= \int_\Omega \vec{u}(\vec{y})\cdot\int_\Omega[\overline{\overline{K}}^t(\vec{x},\vec{y})\cdot\vec{v}(\vec{x})]^*\mathrm{d}\Omega_{\vec{x}}\mathrm{d}\Omega_{\vec{y}}\\ &= \langle\vec{u},A^a\vec{v}\rangle\end{aligned} \tag{2.7.11}$$

其中，A^a 为 A 的伴随算子，且

$$(A^a\vec{v})(\vec{x}) = \int_\Omega \overline{\overline{K}}^t(\vec{y},\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{y})\mathrm{d}\Omega \tag{2.7.12}$$

若有

$$\overline{\overline{K}}(\vec{x},\vec{y}) = \overline{\overline{K}}^t(\vec{y},\vec{x}) \tag{2.7.13}$$

则 A 为自伴的。

2.7.2 电磁场问题积分算子方程举例

由积分算子构成的方程称为积分算子方程，简称积分方程。在电磁理论中既有标量积分方程，又有矢量积分方程，但大部分情况下为后者。矢量积分方程主要有两种形式。

$$\vec{f}(\vec{r}) = \lambda\int_\Omega \overline{\overline{K}}(\vec{r},\vec{r}') \cdot \vec{u}(\vec{r}')\mathrm{d}\Omega' \tag{2.7.14}$$

$$\vec{u}(\vec{r}) = \vec{f}(\vec{r}) + \lambda\int_\Omega \overline{\overline{K}}(\vec{r},\vec{r}') \cdot \vec{u}(\vec{r}')\mathrm{d}\Omega' \tag{2.7.15}$$

其中，$\vec{f}(\vec{r})$ 为已知；$\vec{u}(\vec{r})$ 为待求；λ 为常数。它们称为弗雷德霍姆（Fredholm）型积分方程。式（2.7.14）为第一类，其特点是待求函数仅存于积分号下。式（2.7.15）为第二类，其特点是待求函数不仅存在于积分号内，而且出现在积分号外。

下面用一简单问题说明在电磁场问题中积分方程的建立过程及主要特点。以后会在很多问题中遇到积分方程。

考虑位于无界空间的一个物体，其体积为 Ω，体表为任意形状的光滑曲面 S。该物体的电磁特性由 $\varepsilon(\vec{r})$ 和 $\mu(\vec{r})$ 描述，物体外部为真空（或空气）。在物体外部存在一电流源 $\vec{J}(\vec{r})$，其支撑集为 V。电流源在空间激发电磁场，该电磁场会与物体发生相互作用，从而在物体内外形成一定的电磁分布。作为一个宏观电磁问题我们将不考虑电磁场与物体相互作用的微观机理，作为频域问题也不讨论相互作用的瞬态过程，而只考虑相互作用的稳态宏观效果，也就是物体内外的稳定电磁场分布。

总起来讲，这是一个非均匀各向同性媒质中存在电流源的电磁场问题，其中的电场 $\vec{E}(\vec{r})$ 应该满足方程

$$\nabla\times\mu^{-1}(\vec{r})\nabla\times\vec{E}(\vec{r}) - \omega^2\varepsilon(\vec{r})E(\vec{r}) = -\mathrm{i}\omega\vec{J}(\vec{r}) \tag{2.7.16}$$

从上式两侧同时减去 $\nabla\times\mu_0^{-1}\nabla\times\vec{E}(\vec{r}) - \omega^2\varepsilon_0\vec{E}(\vec{r})$ 后我们有

$$\begin{aligned}&\nabla\times[\mu^{-1}(\vec{r}) - \mu_0^{-1}]\nabla\times\vec{E}(\vec{r}) - \omega^2[\varepsilon(\vec{r}) - \varepsilon_0]\vec{E}(\vec{r})\\ &= -\mathrm{i}\omega\vec{J}(\vec{r}) - \nabla\times\mu_0^{-1}\nabla\times\vec{E}(\vec{r}) + \omega^2\varepsilon_0\vec{E}(\vec{r})\end{aligned} \tag{2.7.17}$$

再把上式改写成下面的形式

$$\begin{aligned}&\nabla\times\mu_0^{-1}\nabla\times\vec{E}(\vec{r}) - \omega^2\varepsilon_0\vec{E}(\vec{r})\\ &= -\mathrm{i}\omega\vec{J}(\vec{r}) + \omega^2[\varepsilon(\vec{r}) - \varepsilon_0]\vec{E}(\vec{r}) - \nabla\times[\mu^{-1}(\vec{r}) - \mu_0^{-1}]\nabla\times\vec{E}(\vec{r})\end{aligned} \tag{2.7.18}$$

如果把式（2.7.18）右侧看作空间电磁场的等效源，式（2.7.18）就表示该等

效源在真空中所产生的电场。这一方程的解可通过无界空间的并矢格林函数 $\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}')$ 表达出来，格林函数满足的方程应该是

$$\nabla\times\mu_0^{-1}\nabla\times\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}')-\omega^2\varepsilon_0\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}')=-\mu_0^{-1}\overline{\overline{I}}\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

方程（2.7.18）的解即为

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r})=&\ \mathrm{i}\omega\mu_0\int_V\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}')\cdot\vec{J}(\vec{r}')\mathrm{d}V'\\&-\omega^2\mu_0\int_\Omega\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}')\cdot(\varepsilon(\vec{r}')-\varepsilon_0)\vec{E}(\vec{r}')\mathrm{d}\Omega'\\&+\mu_0\int_V\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}')\cdot\nabla'\times(\mu^{-1}(\vec{r})-\mu_0^{-1})\nabla'\times\vec{E}(\vec{r}')\mathrm{d}\Omega'\end{aligned}\tag{2.7.19}$$

显然，上式右侧的第一项表示电流源 $\vec{J}(\vec{r})$ 在无界真空中产生的电磁场，作为一个电磁散射问题常被称为入射波，用 $\vec{E}_{\mathrm{inc}}$ 表示。右侧第二项表示由电极化电流所产生的场，若媒质是导电的，还包含由场所感应的传导电流的贡献。右侧第三项则表示极化磁荷所产生的场。

式（2.7.19）可以改写为

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r})=&\ \vec{E}_{\mathrm{inc}}(\vec{r})-\omega^2\mu_0\int_\Omega\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}')\cdot(\varepsilon(\vec{r})-\varepsilon_0)\vec{E}(\vec{r}')\mathrm{d}\Omega'\\&+\mu_0\int_\Omega\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}')\cdot\nabla'(\mu^{-1}(\vec{r})-\mu_0^{-1})\nabla'\times\vec{E}(\vec{r}')\mathrm{d}\Omega'\end{aligned}\tag{2.7.20}$$

对于实际问题而言，$\vec{J}(\vec{r})$ 是给定的，故可认为 $\vec{E}_{\mathrm{inc}}(\vec{r})$ 是已知的。如果 $\vec{J}(\vec{r})$ 距离物体很远，甚至可近似地认为是无穷远，就可认为入射的是平面电磁波。可以看出，在方程（2.7.20）中待求总电场 $\vec{E}(\vec{r})$ 存在于积分号外，因此它是一个第二类的弗雷德霍姆型积分方程。

如果上述问题中的物体是非磁性的，则有 $\mu(\vec{r})=\mu_0$，这时式（2.7.20）中右侧的第二个积分将消失，于是方程变为

$$\vec{E}(\vec{r})=\vec{E}_{\mathrm{inc}}(\vec{r})-\omega^2\mu_0\int_\Omega\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}')\cdot(\varepsilon(\vec{r})-\varepsilon_0)\vec{E}(\vec{r}')\mathrm{d}\Omega'\tag{2.7.21}$$

显然这个积分方程中所包含的积分算子的核的性质由 $\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}')$ 决定。待 $\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}')$ 求出后这一问题就可明确了。

第 3 章　无界均匀媒质空间的电磁场

在无界均匀媒质空间中求解麦克斯韦方程是最简单的电磁场问题，因为无需考虑非均匀性和边界的影响。也正是由于这种单纯性就更能突出表现电磁场的某些本质特性，成为理解更复杂电磁现象的物理基础。

虽然无界空间中的电磁场可作为无约束问题来求解，但电磁能量的有限性是必须满足的，这就要求麦克斯韦方程的解必须属于平方可积矢量函数空间。

本章主要讨论带有普遍意义的问题，包括标量和矢量波函数、格林函数、典型源的电磁场及平面电磁波在各向异性媒质中的传播。

3.1　无界均匀各向同性媒质空间的平面电磁波

无界均匀媒质空间电磁波的形态主要决定于源的空间分布、随时间的变化规律和媒质的性质，最简单、最基本的是平面电磁波。本节主要讨论平面电磁波的波函数以及与其他波函数的关系，其他形态的电磁波将与其激发源联系起来讨论。

3.1.1　亥姆霍兹方程直角坐标系的平面波解

在无界均匀各向同性媒质空间中的无源区域，频域的麦克斯韦方程具有如下的形态。

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{i}\omega\mu \vec{H}(\vec{r}) \tag{3.1.1}$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \mathrm{i}\omega\varepsilon \vec{E}(\vec{r}) \tag{3.1.2}$$

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0 \tag{3.1.3}$$

$$\nabla \cdot \vec{H}(\vec{r}) = 0 \tag{3.1.4}$$

求解无源的麦克斯韦方程的意义在于，了解在设定的条件下实际可能存在的电磁场的各种本征形态或模式。源的作用就是对其中的某些形态电磁场的激发或确定。根据方程中$\vec{E}$和$\vec{H}$的耦合关系，只需求得其中之一，就可由方程计算另外一个。例如，我们先求解电场强度$\vec{E}(\vec{r})$，于是可从式（3.1.1）和（3.1.2）中消去$\vec{H}(\vec{r})$而得到

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) - k^2 \vec{E}(\vec{r}) = 0 \tag{3.1.5}$$

这是一个齐次矢量波动方程。又由于有矢量恒等式$\nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = \nabla\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) - \nabla^2 \vec{E}(\vec{r})$和式（3.1.3），我们可把方程（3.1.5）表示为

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + k^2 \vec{E}(\vec{r}) = 0 \tag{3.1.6}$$

它是一个齐次亥姆霍兹方程。在直角坐标系中，令 $\vec{E}(\vec{r}) = \hat{x}E_x(\vec{r}) + \hat{y}E_y(\vec{r}) + \hat{z}E_z(\vec{r})$ 并代入方程(3.1.6) 可得到每个$\vec{E}(\vec{r})$ 的分量所满足的方程。如果用 $\psi(\vec{r})$ 表示三个分量中的任何一个,则 $\psi(\vec{r})$ 满足标量形式的齐次亥姆霍兹方程。

$$\nabla^2\psi(\vec{r}) + k^2\psi(\vec{r}) = 0 \tag{3.1.7}$$

该方程容易通过分离变量法求解，如设

$$\psi(\vec{r}) = X(x)Y(y)Z(z)$$

则方程（3.1.7）等价于以下三个方程。

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}X(x) + k_x^2X(x) = 0 \tag{3.1.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}Y(y) + k_y^2Y(y) = 0 \tag{3.1.9}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}Z(z) + k_z^2Z(z) = 0 \tag{3.1.10}$$

其中,

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \tag{3.1.11}$$

以上所有方程的解虽然没有边界条件的限制，但必须使电磁场是能量有限的。为满足这一要求，除了电、磁场在空间的任何点必须为有限值外还必须要求在无限远处场值趋于零。

根据以上要求, $X(x)$ 、$Y(y)$ 和 $Z(z)$ 必须是平方可积的，因此在 x、y 和 z 趋于正负无穷时都必须趋于零。这样方程（3.1.8）~（3.1.10）中的算子为

$$A: L^2(-\infty, \infty) \to L^2(-\infty, \infty)$$

$$A = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}v^2} + k_\zeta^2, \quad \zeta = x,y,z \tag{3.1.12}$$

$$D(A) = \left\{u(\zeta):\ u(\zeta),\ \ \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\zeta^2} \in L^2(-\infty,\infty),\ \ \lim_{\zeta\to\pm\infty}u(\zeta) = 0\right\}$$

显然，如果 k_ζ^2 为实数，A 为自伴算子，这时方程（3.1.8）~（3.1.10）就为算子 A 的广义自伴本征问题，因为这里没有边界条件的限制，是个无约束问题。在这种问题中本征值是连续的。

现在考虑方程（3.1.8）的解。显然所有谐函数都能满足该方程，由于需要满足无穷远条件，只能选指数形式的解，即

$$X(x) = A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_xx} + B\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_xx} \tag{3.1.13}$$

而且，还要根据 x 所表示的方向只能选择其中一项。由于我们已选时间因子为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，故上式第一项代表沿 x 方向传播的波，第二项则表示沿 $-x$ 方向传播的波。为了使 $X(x)$ 满足无穷远条件，k_x 必须为复数且其虚部为负值，即

$$k_x = k'_x + \mathrm{i}k'_x,\ k''_x < 0$$

这种假设下算子 A 就不再是自伴的。为了解决这一矛盾，我们先假设 k''_x 为一很小的量，然后让其趋于零，于是 A 仍可认为是自伴的。

以上讨论也适用于方程（3.1.9）和（3.1.10）。如果我们用 $h(k_x, x)$,

$h(k_y,y)$ 和 $h(k_z,z)$ 分别代表方程（3.1.8）~（3.1.10）的解中的任何一项，则有方程（3.1.7）的一个解。

$$\psi(k,\vec{r}) = h(k_x,x)h(k_y,y)h(k_z,z) \tag{3.1.14}$$

因为没有边界条件的限制，方程（3.1.7）的解不是唯一的，无穷远条件只限定了解的范围。根据线性偏微分方程的性质，方程解的任意线性组合仍是方程的解。上面所得谐函数（3.1.14）既是空间 $\vec{r}$ 的连续函数，又是 k_x，k_y 和 k_z 的连续函数，故函数的叠加也可以通过 k_x，k_y 和 k_z 进行。因为 k_x、k_y 和 k_z 三者不是完全独立的，必须满足方程（3.1.11），只有两个可任意选取。又由于它们是连续变量，所以叠加变成了积分。因此，若用 $\psi(\vec{r})$ 表示满足方程（3.1.7）和无穷无条件的任意解，就可以被表示为

$$\psi(\vec{r}) = \int_{k_x}\int_{k_y} f(k_x,k_y)h(k_x,x)h(k_y,y)h(k_z,z)\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \tag{3.1.15}$$

令 $\vec{k} = \hat{x}k_x + \hat{y}k_y + \hat{z}k_z$，则 $|\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = k$，于是 $\vec{k}\cdot\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$，所以当用 $\psi(k,\vec{r})$ 表示其为 k 的函数时，就有

$$\begin{aligned}\psi(k,\vec{r}) &= D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_x x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_y y}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_z z}\\ &= D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\end{aligned} \tag{3.1.16}$$

这样式（3.1.15）又可有以下表示。

$$\psi(\vec{r}) = \int_{kx}\int_{ky} f(k_x,k_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \tag{3.1.17}$$

由于 $k_\zeta(\zeta = x,y,z)$ 是各坐标方向的本征值，式（3.1.15）和（3.1.17）表示一般解的本征函数展开。

既然 $\vec{E}(\vec{r})$ 的任一分量可表示为（3.1.16）的形式，故方程（3.1.6）的解 $\vec{E}(\vec{r})$ 也可以表示为

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{r}} \tag{3.1.18}$$

把式（3.1.18）代入方程（3.1.5）可得

$$\vec{k}\times\vec{k}\times\vec{E}(\vec{r}) - k^2\vec{E}(\vec{r}) = 0 \tag{3.1.19}$$

用 $\vec{k}$ 点乘上式得

$$\vec{k}\cdot\vec{E}(\vec{r}) = 0 \tag{3.1.20}$$

又由方程（3.1.1）得知，$\vec{k}\times\vec{E}(\vec{r}) = \omega\mu\vec{H}(\vec{r})$，从而又有

$$\vec{k}\cdot\vec{H}(\vec{r}) = 0 \tag{3.1.21}$$

这说明 $\vec{E}(\vec{r})$ 和 $\vec{H}(\vec{r})$ 均与 $\vec{k}$ 正交，亦即式（3.18）表示横电磁波中的电场矢量，这种波型用 TEM 表示。其中的 $\vec{E}(\vec{r})$、$\vec{H}(\vec{r})$ 和 $\vec{k}$ 形成右手定则。

对于频率为 ω 的单色波，其形态为

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \tag{3.1.22}$$

这说明，当波沿 x 方向传播时 $\vec{k} = k\hat{x}$，即 $\vec{k}$ 表示波传播的方向。若 $\vec{k}\cdot\vec{r} = ks$，s 代表 $\vec{r}$ 在 $\vec{k}$ 方向的投影，所有具有这一投影的 $\vec{r}$ 端点的轨迹表示与 $\vec{k}$ 垂直的一个平面，在这一平面上波的相位相等。这种等相面为平面的电磁波称为平面波。

所以，在均匀无界各向同性媒质中可存在一种平面电磁波，它是一种最简单的波型。我们称式（3.1.16）为直角坐标系中的基本波函数。

3.1.2　平面波函数的级数展开

上面讨论了在直角坐标系中求解方程（3.1.7）的问题，同样也可以讨论该方程在其他坐标系中的解。在考虑类似的无穷远条件的约束下，同样也导致相应的本征问题。而且所得的本征函数也构成一定函数空间的基函数，从而可把满足条件的函数用这些基函数进行展开。在柱坐标系和球坐标系中得到的本征函数主要有贝塞尔（Bessel）函数和勒让德（Legendre）多项式等。

在解决某些电磁场问题时常常需要把平面波函数用柱面波函数或球面波函数进行展开。下面就这些问题做一些讨论。

由复变函数理论知道，贝塞尔函数 $J_n(x)$ 与其生成函数有如下的关系。

$$e^{x(t-t^{-1})/2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n,\quad 0<|t|<\infty \tag{3.1.23}$$

若令 $x=kr$，$t=-ie^{i\varphi}$，则上式变为

$$\begin{aligned}e^{-ikr\cos\varphi}&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(kr)(-1)^n i^n e^{in\varphi}\\&=J_0(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}i^{-n}J_n(kr)\cos n\varphi\end{aligned} \tag{3.1.24}$$

因为

$$e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}=e^{-ikr\cos\varphi} \tag{3.1.25}$$

其中，φ 为 $\vec{k}$ 与 $\vec{r}$ 之间的夹角。所以式（3.1.24）的左侧是平面波函数 $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$，右侧是柱面波函数的级数，故称其为平面波函数的柱面波函数级数展开。

又因为勒让德多项式 $P_l(x)$ 是区间 $[-1,1]$ 上连续函数的一个完备正交基，则对平面波函数 $e^{-ikr\cos\theta}$ 而言，当 $x=\cos\theta$ 时就可作以下级数展开。

$$e^{-ikr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}C_l(kr)P_l(\cos\theta) \tag{3.1.26}$$

其中，$C_l(kr)$ 为展开系数，且

$$C_l(kr)=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}e^{-ikx}P_l(x)\,dx,\ x=\cos\theta$$

可以证明

$$C_l(kr)=(2l+1)(-1)^l i^l j_l(kr)$$

其中，$j_l(kr)$ 为球贝塞尔函数。把以上结果代入（3.1.26）即得到

$$e^{-ikr\cos\theta}=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^{-l}j_l(kr)P_l(\cos\theta) \tag{3.1.27}$$

该式右侧是球面波函数构成的级数，故该式表示平面波函数的球面波函数展开。这里的 θ 也表示 $\vec{k}$ 和 $\vec{r}$ 的夹角，为了适合球坐标的习惯把 φ 改为 θ。

3.2　无界均匀各向同性媒质空间的标量格林函数

求解非齐次波动方程的一个重要途径是利用格林函数法。所以，有关格林函数的知识对求解电磁场问题有重要意义。本节讨论不同空间维度的无界空间中的标量格林函数。

3.2.1　一维标量亥姆霍兹微分算子的格林函数

上一节讨论了无源情况下标量亥姆霍兹方程的求解问题。现在讨论相同情况下空间存在场源时的电磁场求解问题。如果场源的分量用 $f(\vec{r})$ 表示，则需要求解的亥姆霍兹方程成为

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(\vec{r}) = -f(\vec{r}) \tag{3.2.1}$$

根据以前对无界空间方程解的要求，构成以上方程的算子 L 应定义为 L

$$L = \nabla^2 + k^2$$

$$D(L) = \{\psi(\vec{r});\psi(\vec{r}),\nabla^2\psi(\vec{r}) \in L^2(R^3),\lim_{r\to\infty}\psi(\vec{r}) = 0\}$$

显然，只要 k^2 是实的，L 就是自伴的。

如果问题是一维的，则方程（3.2.1）成为

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + k^2\psi(x) = -f(x) \tag{3.2.2}$$

为求解这一方程可先求解相应的格林函数方程。

$$\frac{\mathrm{d}^2G(x,x')}{\mathrm{d}x^2} + k^2G(x,x') = -\delta(x - x') \tag{3.2.3}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} G(x,x') = 0 \tag{3.2.4}$$

$$\mathrm{Im}(k) < 0 \tag{3.2.5}$$

当 $x\neq x'$时，方程（3.2.3）变为齐次的

$$\frac{\mathrm{d}^2G(x,x')}{\mathrm{d}x^2} + k^2G(x,x') = 0 \tag{3.2.6}$$

该方程的一般解可表示为

$$G(x,x') = A(x')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + B(x')\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},\quad x > x'$$

$$G(x,x') = C(x')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + D(x')\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},\quad x < x' \tag{3.2.7}$$

根据条件（3.2.4）和假设（3.2.5），必须 $B(x') = C(x') = 0$。上面表示式中的其他两个系数要靠 $G(x,x')$ 的其他特性来决定。首先，$G(x,x')$ 是连续函数，即使在 $x = x'$ 点也是如此，如果用 ε 表示一无穷小量，则这一连续性条件由式（2.4.40）给出。同时，在 $x = x'$ 处 $G(x,x')$ 是奇异的，这一奇异性由式（2.4.42）的阶跃条件描述。根据条件（2.4.40）和（2.4.42）不难得到

$$A(x') = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx'}}{2\mathrm{i}k},\quad D(x') = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx'}}{2\mathrm{i}k} \tag{3.2.8}$$

于是最后 $G(x,x')$ 应为

$$G(x,x') = \frac{1}{2\mathrm{i}k}\begin{cases}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(x-x')}, x > x' \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x')}, \ x < x'\end{cases} \tag{3.2.9}$$

或表示为

$$G(x,x') = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k|x-x'|}}{2\mathrm{i}k} \tag{3.2.10}$$

3.2.2　二维标量亥姆霍兹微分算子的格林函数

如果问题是二维的，则所要求解的方程在直角坐标系中可表示为如下的形式。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{2y^2} + k^2\right)\psi(x,y) = -f(x,y) \tag{3.2.11}$$

所对应的格林函数方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2\right)G(x,y;x',y') = -\delta(x-x')\delta(y-y') \tag{3.2.12}$$

为了简化求解过程，我们把上式右侧所代表的点源置于坐标原点，即选 $x' = y' = 0$，而点源的作用在其所在的二维平面上与方向无关，这时把方程（3.2.12）用极坐标表示就成为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left[\rho\mathrm{d}\frac{G(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right] + k^2G(\rho) = -\delta(\rho) \tag{3.2.13}$$

其中，$\rho = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$。与前面的分析一样，这里的 $G(\rho)$ 也应该满足无穷远条件

$$\lim_{\rho\to\infty}G(\rho) = 0 \tag{3.2.14}$$

且仍假设 $\mathrm{Im}(k) < 0$。

首先考虑 $\rho \neq 0$ 时方程的解，这时的方程是

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left[\rho\frac{\mathrm{d}G(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right] + k^2G(\rho) = 0 \tag{3.2.15}$$

这是个零阶贝塞尔方程，它的两个线性无关解可由下列四种特殊函数中的任意两个构成：贝塞尔函数 $J_0(k\rho)$、纽曼函数 $N_0(k\rho)$、第一类汉克尔函数 $H_0^{(1)}(k\rho)$ 及第二类汉克尔函数 $H_0^{(2)}(k\rho)$。

当 $k\rho\to\infty$ 时，$J_0(k\rho)$ 和 $N_0(k\rho)$ 分别趋于余弦函数和正弦函数，它们显然不能满足条件（3.2.14），因此方程的解只能由两类汉克尔函数构成。又由于只有第二类汉克尔函数在时间因子为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 时表示沿 ρ 方向传播的波，于是只能选取式（3.2.15）的解为

$$G(\rho) = AH_0^{(2)}(k\rho), \quad \rho \neq 0 \tag{3.2.16}$$

其中，A 为待定常数。为了确定 A，可把得到的 $G(\rho)$ 代回 $x' = y' = 0$ 时的原方程（3.2.12），由 $G(\rho)$ 满足该方程的奇异性条件来决定。对方程在以坐标原点为圆

心、ε 为半径的圆 S_ε 内积分可得

$$\int_{S_\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + k^2\int_{S_\varepsilon} G\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -1 \tag{3.2.17}$$

由格林公式

$$\int_V(\psi\,\nabla^2\phi - \phi\,\nabla^2\psi)\,\mathrm{d}V = \oint_S\left(\psi\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\mathrm{d}s$$

当令 $\varphi = G$、$\psi = 1$ 时就成为

$$\int_{S_\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{C_\varepsilon}\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}l \tag{3.2.18}$$

其中，C_ε 为 S_ε 的边界，即以 ε 为半径的圆周。考虑到 $H_0^{(2)\prime}(k\rho) = -H_1^{(2)}(k\rho)$，$k\rho\to 0$ 时，$H_1^{(2)}(k\rho)\to \mathrm{i}\,\dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{k\rho}{2}\right)^{-1}$，则有

$$\begin{aligned}\oint_{C_\varepsilon}\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}l &= \int_0^{2\pi}\left[\rho\frac{\partial G}{\partial\rho}\right]_{\rho=\varepsilon}\mathrm{d}\varphi\\ &= 2\pi\varepsilon A\left.\frac{\mathrm{d}H_0^{(2)}(k\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right|_{\rho=\varepsilon} = -4\mathrm{i}A,\quad \varepsilon\to 0\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

这是式（3.2.19）左侧的第一项。第二项的积分为

$$\begin{aligned}\int_{S_\varepsilon} G\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\varepsilon}\int_0^{2\pi}\mathrm{i}\,\frac{2}{\pi}\ln\frac{k\rho}{2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\\ &= -4\mathrm{i}\int_0^{\varepsilon}\ln\frac{k\rho}{2}\rho\mathrm{d}\rho \to 0,\quad \varepsilon\to 0\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

综合式（3.2.19）和（3.2.20），由式（3.2.17）最后我们得到 $A = \dfrac{1}{4\mathrm{i}}$，于是二维空间标量亥姆霍兹微分算子的格林函数最终成为

$$G(\rho) = \frac{1}{4\mathrm{i}}H_0^{(2)}(k\rho) \tag{3.2.21}$$

如果源不在坐标原点而在 $\vec{\rho}\,'$ 点，但 $\rho = |\vec{\rho} - \vec{\rho}\,'|$，则该格林函数可一般地表示为

$$G(\vec{\rho},\vec{\rho}\,') = \frac{1}{4\mathrm{i}}H_0^{(2)}(k|\vec{\rho} - \vec{\rho}\,'|) \tag{3.2.22}$$

3.2.3 三维标量亥姆霍兹微分算子的格林函数

对于三维问题式（3.2.1），在直角坐标系中成为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(x,y,z) + k^2\psi(x,y,z) = -f(x,y,z) \tag{3.2.23}$$

与其相对应的格林函数方程则是

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)G(x,y,z;x',y',z') = -\delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') \tag{3.2.24}$$

先考虑 $x'=y'=z'=0$ 的情况，这时我们有

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)G(r)+k^2G(r)=-\delta(r) \tag{3.2.25}$$

其中，$r=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$。考虑到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}G(r)&=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial G(r)}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{r}\frac{\partial G(r)}{\partial r}\right]\\&=\frac{1}{r}\frac{\partial G(r)}{\partial r}+\frac{x^2}{r}\left[-\frac{1}{r^2}\frac{\partial G(r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 G(r)}{\partial r^2}\right]\end{aligned}$$

再把$\frac{\partial^2}{\partial y^2}G(r)$和$\frac{\partial^2}{\partial z^2}G(r)$的类似结果与上式相加，就能得到

$$\begin{aligned}\nabla^2G(r)&=\frac{3}{r}\frac{\partial G}{\partial r}+r\left[-\frac{1}{r^2}\frac{\partial G}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2G(r)}{\partial r^2}\right]\\&=\frac{2}{r}\frac{\partial G(r)}{\partial r}+\frac{\partial^2G(r)}{\partial r^2}\\&=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}[rG(r)]\end{aligned} \tag{3.2.26}$$

于是，可以把式（3.2.25）改写为

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}[rG(r)]+k^2G(r)=-\delta(r) \tag{3.2.27}$$

和以前一样，先考虑 $r\neq0$ 时的解，在这种情况下需要求解的方程成为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}[rG(r)]+k^2[rG(r)]=0 \tag{3.2.28}$$

这是以 $rG(r)$ 为未知函数的谐方程。考虑到解需要满足无穷远条件，其解可表示为

$$G(r)=A\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r}+B\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} \tag{3.2.29}$$

因为无限远处不存在源，故应没有入射波存在，因此取 $B=0$，这时 $G(r)$ 就成为

$$G(r)=A\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r} \tag{3.2.30}$$

为了确定 A 需要让 $G(r)$ 满足方程（3.2.29）。和以前的做法类似，对式（3.2.25）在一个球心与坐标原点重合半径为 ε 无限小的球内积分，并利用高斯定理得到

$$\int_{V_\varepsilon}\nabla^2G(r)\mathrm{d}v=\int_{V_\varepsilon}\nabla\cdot\nabla G(r)\mathrm{d}v=\oint_{S_\varepsilon}\nabla G(r)\cdot\mathrm{d}\vec{s}$$

于是有

$$\oint_{S_\varepsilon}\nabla G(r)\cdot\mathrm{d}\vec{s}+k^2\int_{V_\varepsilon}G(r)\mathrm{d}v=-1$$

其中，S_ε 为球的面积；V_ε 为球的体积。考虑到 ε 为无穷小量，上式又可变成

$$\left[4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}G(r)}{\mathrm{d}r}\right]_{r=\varepsilon} + k^2\int_0^{\varepsilon} G(r)\cdot 4\pi r^2 \mathrm{d}r = -1 \tag{3.2.31}$$

把式（3.2.30）表示的 G（r）代入，上式的第二项当 $\varepsilon\to 0$ 时消失，而第一项积分等于 $-4\pi A$，由此定出

$$A=\frac{1}{4\pi}$$

从而最后得到

$$G(r)=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{4\pi r} \tag{3.2.32}$$

如果源不在坐标原点，而在$\vec{r}\,'$，则 $r=|\vec{r}-\vec{r}\,'|$，这时的格林函数应为

$$G(\vec{r},\vec{r}\,')=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \tag{3.2.33}$$

这种格林函数在电磁理论中有非常广泛的应用。

3.3 无界媒质空间矢量微分算子的并矢格林函数

在 2.5 节中我们简单讨论了并矢格林函数的基本概念。已指出在无界均匀各向同性媒质空间电场满足式（2.5.28）所给出的矢量微分算子方程。为了求解这一方程可先由方程（2.5.32）解得并矢格林函数，所求电场就可由积分（2.5.30）求得。本节具体讨论这一并矢格林函数的求法并讨论它的奇异性。

3.3.1 无界均匀各向同性媒质空间矢量微分算子的并矢格林函数

由于我们已求得了相应空间的标量格林函数，可用间接方法求得所需的并矢格林函数。所谓间接方法是指，先求得矢势$\vec{A}$和标势 φ，然后根据下式

$$\vec{E}(\vec{r})=-\mathrm{i}\omega\vec{A}-\nabla\varphi(\vec{r}) \tag{3.3.1}$$

求得 $\vec{E}(\vec{r})$。

根据$\vec{A}(\vec{r})$ 和 $\varphi(\vec{r})$ 满足的方程（1.2.16）和（1.2.17）与方程（3.2.24）作比较，以及后者的解与格林函数（3.2.33）的关系可知

$$\vec{A}(\vec{r})=\mu\int_V G(\vec{r},\vec{r}\,')\vec{J}(\vec{r}\,')dV' \tag{3.3.2}$$

$$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{\varepsilon}\int_V G(\vec{r},\vec{r}\,')\rho(\vec{r}\,')\mathrm{d}V' \tag{3.3.3}$$

其中，式（3.3.2）的矢量是通过分量迭加得到的。

把以上结果代入式（3.3.1）即成为

$$\vec{E}(\vec{r})=-\mathrm{i}\omega\mu\int_V G(\vec{r},\vec{r}\,')\vec{J}(\vec{r}\,')\mathrm{d}V'-\frac{\nabla}{\varepsilon}\int_V G(\vec{r},\vec{r}\,')\rho(\vec{r}\,')\mathrm{d}V'$$

利用连续性方程$\nabla\cdot\vec{J}(\vec{r})=-\mathrm{i}\omega\rho(\vec{r})$ 又可表示为

$$\vec{E}(\vec{r})=-\mathrm{i}\omega\mu\int_V G(\vec{r},\vec{r}\,')\vec{J}(\vec{r}\,')\mathrm{d}V'-\frac{\nabla}{\mathrm{i}\omega\varepsilon}\int_V G(\vec{r},\vec{r}\,')\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{r}\,')\mathrm{d}V' \tag{3.3.4}$$

利用恒等式$\nabla\cdot(\phi\vec{F})=\phi\nabla\cdot\vec{F}-\vec{F}\cdot\nabla\phi$可知

$$\nabla'\cdot[G(\vec{r},\vec{r}')\vec{J}(\vec{r}')]=G(\vec{r},\vec{r}')\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{r}')+\vec{J}(\vec{r}')\cdot\nabla'G(\vec{r},\vec{r}')$$

故有

$$\int_V G(\vec{r},\vec{r}')\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{r}')\mathrm{d}V'=\int_V\nabla'\cdot[G(\vec{r},\vec{r}')\vec{J}(\vec{r}')]\mathrm{d}V'-\int_V\vec{J}(\vec{r}')\cdot\nabla'G(\vec{r},\vec{r}')\mathrm{d}V'$$

由高斯定理知

$$\int_V\nabla'\cdot[G(\vec{r},\vec{r}')\vec{J}(\vec{r}')]\mathrm{d}V'=\oint_S G(\vec{r},\vec{r}')\vec{J}(\vec{r}')\cdot\vec{n}\mathrm{d}s'=0$$

再考虑到$\nabla'G(\vec{r},\vec{r}')=-\nabla G(\vec{r},\vec{r}')$，则式（3.3.4）成为

$$\vec{E}(\vec{r})=-\mathrm{i}\omega\mu\int_V G(\vec{r},\vec{r}')\vec{J}(\vec{r}')\mathrm{d}V'+\frac{\nabla}{\mathrm{i}\omega\varepsilon}\int_V\nabla G(\vec{r},\vec{r}')\cdot\vec{J}(\vec{r}')\mathrm{d}V' \tag{3.3.5}$$

在上式中变换积分与微分的次序又可得到

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r})&=-\mathrm{i}\omega\mu\int_V\Big[G(\vec{r},\vec{r})\vec{J}(\vec{r}')+\frac{\nabla\nabla}{k^2}G(\vec{r},\vec{r}')\cdot\vec{J}(\vec{r}')\Big]\mathrm{d}V'\\&=-\mathrm{i}\omega\mu\int_V\Big[\bar{\bar{I}}+\frac{\nabla\nabla}{k^2}\Big]G(\vec{r},\vec{r}')\cdot\vec{J}(\vec{r}')\mathrm{d}V'\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

若令

$$\bar{\bar{G}}_e(\vec{r},\vec{r}')=\Big[\bar{\bar{I}}+\frac{\nabla\nabla}{k^2}\Big]G(\vec{r},\vec{r}') \tag{3.3.7}$$

则有

$$\vec{E}(\vec{r})=-\mathrm{i}\omega\mu\int_V\bar{\bar{G}}_e(\vec{r},\vec{r}')\cdot\vec{J}(\vec{r}')\mathrm{d}V' \tag{3.3.8}$$

其中，$\bar{\bar{G}}(\vec{r},\vec{r}')$就是所求的无界均匀各向同性媒质空间的电型并矢格林函数$\bar{\bar{G}}_e(\vec{r},\vec{r}')$。因为，把式（3.3.8）代入$\vec{E}(\vec{r})$应满足的方程（2.5.28），就得到$\bar{\bar{G}}_e(\vec{r},\vec{r}')$所满足的方程（2.5.32）。

3.3.2　格林函数的奇异性[5]

我们已经指出，格林函数是广义函数，明显地带有奇异性。对三维标量格林函数而言，由式（3.2.34）和（3.2.35）立即可以看出，当$r=0$时，它是无界的。由于这种无界性使得相应非齐次方程解的积分表达式在经典意义下不能成立，也使得包含格林函数的一些微积分运算变得复杂，一不小心就可能产生错误。

在已知电型源$\rho(\vec{r})$和$\vec{J}(\vec{r})$的情况下，矢势和标势分别由式（3.3.2）和（3.3.3）给出，但是由于$G(\vec{r},\vec{r}')$的奇异性在经典意义上积分是不存在的，因为在$\vec{r}=\vec{r}'$时将使被积函数无界。在经典数学中这一问题的解决方法是，当$\vec{r}\in V$时，取一个包围$\vec{r}$的小体积元V_ε，当积分在体积$V-V_\varepsilon$中进行时，由于排除了奇

点，积分便有了严格的定义。在经典数学中称此为反常积分。如果当 V_ε 趋于零时积分趋于一定的值，且与 V_ε 的形状无关，则称反常积分是收敛的，该极限称为积分主值。

因此，严格地讲式（3.3.2）和（3.3.3）应理解为反常积分，即应有形式

$$\vec{A}(\vec{r}) = \lim_{V_\varepsilon\to 0}\mu\int_{V-V_\varepsilon} G(\vec{r},\vec{r}')\vec{J}(\vec{r}')\mathrm{d}V' \tag{3.3.9}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \lim_{V_\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_{V-V_\varepsilon} G(\vec{r},\vec{r}')\rho(\vec{r}')\mathrm{d}V' \tag{3.1.10}$$

数学理论证明，只要$\vec{J}(\vec{r})$和$\rho(\vec{r})$是分段连续的，式（3.3.9）和（3.3.10）就是收敛的。这样我们就明确了这些积分存在的条件和意义。在通常情况下式（3.3.9）和（3.3.10）所表示的积分仍用式（3.3.2）和（3.3.3）的形式表示，但要明确它们的实际意义是反常积分。

有了以上的理解，我们反过来审查并矢格林函数的推导过程。首先，我们假定$\vec{J}(\vec{r})$连续，其支撑集 V 是紧的。这时式（3.3.4）和（3.3.5）右侧第一项收敛，但第二项由于它包含导数项而使问题变得复杂。理论证明，如果$\vec{J}(\vec{r})$在$\vec{r}$处满足豪尔德（Holder）条件，即存在正的常数 C、A 和 α，使当 $|\vec{r}\to\vec{r}'| < C$ 时有

$$|\vec{J}(\vec{r}) - \vec{J}(\vec{r}')| \leqslant A|\vec{r} - \vec{r}'|^{\alpha}$$

则第二项积分仍是收敛的。豪尔德条件比连续条件要严格一些，我们总是假设这些条件能得到满足。虽然如此，在以后我们获得式（3.3.8）时经过了积分与微分算符次序的交换，由于这样交换是病态的，使得式（3.3.8）所表示的反常积分在经典意义上并不收敛。具体的表现是，收敛值与 V_ε 的形状有关，V_ε 取不同的形状时，会使反常积分收敛于不同的值。这也就说明，当$\vec{r}\in V$ 时，式（3.3.8）不是唯一的，这在经典意义上说就是反常积分的主值不存在。造成这一现象的原因如前所述，是由式（3.3.5）中的$\nabla\nabla$部分所造成，因为它引入了 $O(|\vec{r}-\vec{r}'|^{3})$ 项。但是从物理上讲，电流源所产生的场必是唯一的。所以，一定存在某种办法能唯一地确定联系电场与电流源的积分（3.3.8）。

为解决这一问题我们来仔细考察式（3.3.5）中的第二项积分。这部分积分可以写作

$$\begin{aligned}
&\nabla\int_V \nabla G(\vec{r},\vec{r}')\cdot\vec{J}(\vec{r}')\mathrm{d}V' \\
&= \lim_{V_\varepsilon\to 0}\left[\nabla\int_{V-V_\varepsilon}\nabla G(\vec{r},\vec{r}')\cdot\vec{J}(\vec{r}')\mathrm{d}V' + \nabla\int_{V_\varepsilon}\nabla G(\vec{r},\vec{r}')\cdot\vec{J}(\vec{r}')\mathrm{d}V'\right] \\
&= \lim_{V_\varepsilon\to 0}\left[\int_{V-V_\varepsilon}\nabla\nabla G(\vec{r},\vec{r}')\cdot\vec{J}(\vec{r}')\mathrm{d}V' - \nabla\int_{V_\varepsilon}\nabla' G(\vec{r},\vec{r}')\cdot\vec{J}(\vec{r}')\mathrm{d}V\right]
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

由于上式第一个符号右侧第一项积分不包含$\vec{r}$处的奇点，故可以将积分号外的∇移入积分号内。又由于第二项积分包含$\vec{r}$处奇点，为保证积分收敛，则不能将

积分号外的∇移入积分号内。所以总起来讲，式（3.3.11）所表示的两项积分都是收敛的，但其收敛值依赖于 V_ε 的形状。

进一步我们考察式（3.3.11）中右侧的第二个积分，由于$\vec{J}(\vec{r})\cdot\nabla' G(\vec{r},\vec{r}')=\nabla'\cdot[G(\vec{r},\vec{r}')\vec{J}(\vec{r}')]-G(\vec{r},\vec{r}')\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{r})$，可以写成

$$\int_{V_\varepsilon}\nabla' G(\vec{r},\vec{r}')\cdot\vec{J}(\vec{r}')\mathrm{d}V'=\oint_{S_\varepsilon}\vec{n}\cdot\vec{J}(\vec{r}')G(\vec{r},\vec{r}')\mathrm{d}s'-\mathrm{i}\omega\int_{V_\varepsilon}G(\vec{r},\vec{r}')\rho(\vec{r}')\mathrm{d}V' \quad (3.3.12)$$

其中，S_ε 为 V_ε 的表面；$\vec{n}$为 S_ε 的外法向单位矢量，并在第二项积分中用了$\nabla\cdot\vec{J}(\vec{r})=-\mathrm{i}\omega\rho(\vec{r})$。对于体电流 $\rho(\vec{r})$ 是连续的，故当 $V_\varepsilon\to 0$ 时，该项积分为零。式（3.3.12）中右侧第一项被积函数中包含$\vec{n}\cdot\vec{J}(\vec{r})$，它表示在 S_ε 上的面电荷，也就是说，这项积分正比于 S_ε 面电荷在$\vec{r}$处产生的电场。由于拉普拉斯方程的尺度不变性，当 $V_\varepsilon\to 0$ 时，场也不消失，而是趋于某个依赖于 V_ε 形状的值。所以，式（3.3.12）的极限值与$\vec{J}(\vec{r})$成正比。这样，可以把式（3.3.11）写成

$$\nabla\int_V\nabla G(\vec{r},\vec{r}')\cdot\vec{J}(\vec{r}')\mathrm{d}V'=\lim_{V_\varepsilon\to 0}\int_{V-V_\varepsilon}\nabla\nabla G(\vec{r},\vec{r}')\cdot\vec{J}(\vec{r}')\mathrm{d}V'-\bar{\bar{L}}\cdot\vec{J}(\vec{r}) \quad (3.3.13)$$

其中，$\bar{\bar{L}}$是一个与 V_ε 形状有关的并矢。这样式（3.3.5）就变成

$$\vec{E}(\vec{r})=-\mathrm{i}\omega\mu\lim_{V_\varepsilon\to 0}\int_{V-V_\varepsilon}\bar{\bar{G}}(\vec{r},\vec{r}')\cdot\vec{J}(\vec{r}')\mathrm{d}V'-\frac{\bar{\bar{L}}\cdot\vec{J}(\vec{r})}{\mathrm{i}\omega\varepsilon} \quad (3.3.14)$$

上式表示，由于 V_ε 的存在产生了本不该存在的场，为了修正而增加了第二项，用以消除 V_ε 的影响。

一般用 *P. V.* 表示一个依赖于形状的主值积分，于是又可把上式写成

$$\vec{E}(\vec{r})=-\mathrm{i}\omega\mu P.V.\int_V\bar{\bar{G}}(\vec{r},\vec{r}')\cdot\vec{J}(\vec{r}')\mathrm{d}V'-\frac{\bar{\bar{L}}\cdot\vec{J}(\vec{r})}{\mathrm{i}\omega\varepsilon} \quad (3.3.15)$$

这就是说，当$\vec{r}\in V$时，应该用（3.3.15）代替（3.3.8）。

研究表明 V_ε 为以下几种形状时的$\bar{\bar{L}}$为[34]

（1）球体或立方体$\bar{\bar{L}}=\dfrac{\bar{\bar{I}}}{3}$；

（2）圆盘$\bar{\bar{L}}=\hat{z}\hat{z}$；

（3）针状体$\bar{\bar{L}}=\dfrac{\hat{x}\hat{x}+\hat{y}\hat{y}}{2}$；

（4）直立椭球体$\bar{\bar{L}}=L_1\hat{x}\hat{x}+L_2\hat{y}\hat{y}+L_3\hat{z}\hat{z}$。

虽然式（3.3.8）在经典函数的意义上不成立，只是因为$\bar{\bar{G}}(\vec{r},\vec{r}')$是广义函数，如果用广义函数来理解，它还是成立的。这是因为，在广义函数论中，函数不是逐点定义的，其性质要由它与别的函数的作用，即与其他函数乘积的积分来决定。

3.3.3　非齐次矢量波动方程的积分解和无界空间的辐射条件

考虑的问题如图 3 - 1 所示，其中体积 V 由两个封闭曲面 S_0 和 S 包围，V 内为各向同性的均匀媒质，其特性由 ε 和 μ 描述，并存在体分布源 $\vec{J}(\vec{r})$ 和 $\vec{M}(\vec{r})$。

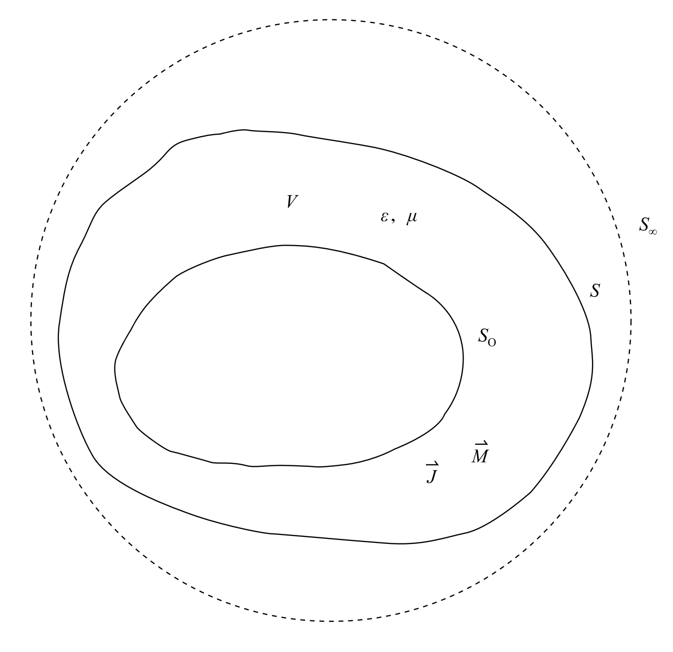


图 3 - 1　一般性电磁场问题

在频域 V 内的电场和磁场分别满足如下形式的矢量波动方程。

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) - k^2 \vec{E}(\vec{r}) = - \mathrm{i}\omega\mu \vec{J}(\vec{r}) - \nabla \times \vec{M}(\vec{r}), \quad \vec{r} \in V \tag{3.3.16}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) - k^2 \vec{H}(\vec{r}) = - \mathrm{i}\omega\varepsilon \vec{M}(\vec{r}) + \nabla \times \vec{J}(\vec{r}), \quad \vec{r} \in V \tag{3.3.17}$$

设矢量函数 $\vec{P}$ 和 $\vec{Q}$ 在 V 内存在不低于二阶的连续导数，并在 $\Sigma = S + S_0$ 上存在一阶连续导数，则有如下的矢量格林定理。

$$\int_V (\vec{Q} \cdot \nabla \times \nabla \times \vec{P} - \vec{P} \cdot \nabla \times \nabla \times \vec{Q})\mathrm{d}V = \int_{\Sigma} (\vec{P} \times \nabla \times \vec{Q} - \vec{Q} \times \nabla \times \vec{P}) \cdot \vec{n}\mathrm{d}s \tag{3.3.18}$$

其中，$\vec{n}$ 为 Σ 的外法向单位矢量。令 $\vec{P} = \vec{E}$，$Q = G\vec{a}$，其中 $\vec{a}$ 为任意常矢量，G 为三维无界均匀媒质空间的标量格林函数。由于除 $\vec{r} = \vec{r}'$ 外 $G\vec{a}$ 处处满足对 Q 的要求，可用一封闭面 S'_0 包围点 $\vec{r} = \vec{r}'$，并用 V' 表示除去 S'_0 所围体积后的 V，便可利用矢量格林定理而得到

$$\int_{V'} (G\vec{a} \cdot \nabla \times \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \nabla \times G\vec{a})\mathrm{d}V$$

$$= \int_{\sum + S'_0} (\vec{E} \times \nabla \times G\vec{a} - G\vec{a} \times \nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{n} \mathrm{d}s \tag{3.3.19}$$

考虑到

$$\nabla \times \nabla \times = (\nabla\nabla \cdot) - \nabla \cdot \nabla$$

$$\nabla \cdot (G\vec{a}) = G\nabla \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \nabla G = \vec{a} \cdot \nabla G$$

$$\nabla \cdot \nabla G + k^2 G = 0, \quad \vec{r} \neq \vec{r}'$$

以及方程（2.6.1），可以得到

$$\begin{aligned} &G\vec{a} \cdot \nabla \times \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \nabla \times G\vec{a} \\ &= -\vec{a} \cdot (\mathrm{i}\omega\mu G\vec{J}) - G\nabla \times \vec{M} - \vec{E} \cdot \nabla(\vec{a} \cdot \nabla G) \end{aligned} \tag{3.3.20}$$

再考虑到

$$\nabla \times (G\vec{M}) = G\nabla \times \vec{M} - \vec{M} \times \nabla G$$

$$\vec{E} \cdot \nabla (\vec{a} \cdot \nabla G) = \nabla \cdot [\vec{E} (\vec{a} \cdot \nabla G)] - (\vec{a} \cdot \nabla G) \nabla \cdot \vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon$$

可将方程（3.3.20）改写成

$$\begin{aligned} &G\vec{a} \cdot \nabla \times \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \nabla \times G\vec{a} \\ &= -\vec{a} \cdot \mathrm{i}\omega\mu G\vec{J} - \vec{a} \cdot \nabla \times G\vec{M} + \vec{M} \times \nabla G \\ &\quad - \nabla \cdot [\vec{E}(\vec{a} \cdot \nabla G)] + \frac{\rho}{\varepsilon} \vec{a} \cdot \nabla G \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

利用这一关系可将式（3.3.19）表示成

$$\begin{aligned} &\vec{a} \cdot \int_{V'} (-\mathrm{i}\omega\mu G\vec{J} - \vec{M} \times \nabla G + \frac{\rho}{\varepsilon} \nabla G) \mathrm{d}V - \vec{a} \cdot \int_{V'} \nabla \times G\vec{M} \mathrm{d}V \\ &- \int_{V'} \nabla \cdot [\vec{E}(\vec{a} \cdot \nabla G)] \mathrm{d}V = \int_{\varepsilon + S'_0} (\vec{E} \times \nabla \times G\vec{a} - G\vec{a} \times \nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{n} \mathrm{d}s \end{aligned} \tag{3.3.22}$$

考虑到

$$\nabla \cdot (G\vec{M} \times \vec{a}) = \vec{a} \cdot \nabla \times G\vec{M} - G\vec{M} \cdot \nabla \times \vec{a}$$

我们有

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \int_{V'} (\nabla \times G\vec{M}) \mathrm{d}V &= \int_{V'} \nabla \cdot (G\vec{M} \times \vec{a}) \mathrm{d}V \\ &\int_{\varepsilon + S'_0} (G\vec{M} \times \vec{a}) \cdot \vec{n} \mathrm{d}s \end{aligned} \tag{3.3.23}$$

$$\begin{aligned} \int_{V'} \nabla \cdot [\vec{E}(\vec{a} \cdot \nabla G)] \mathrm{d}V &= \int_{\varepsilon + S'_0} (G\vec{M} \times \vec{a}) \cdot \vec{n} \mathrm{d}s \\ &= \vec{a} \cdot \int_{\varepsilon + S'_0} \vec{E} \cdot \vec{n} \nabla G \mathrm{d}s \end{aligned} \tag{3.3.24}$$

于是方程（3.3.22）左侧第二项和第三项的体积分可化作面积分。再利用

$$\nabla \times G\vec{a} = G\nabla \times \vec{a} - \vec{a} \times \nabla G$$

和矢量恒等式$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$ 又有

$$(\vec{E} \times \nabla \times G\vec{a}) \cdot \vec{n} = (\vec{E} \times \nabla G \times \vec{a}) \cdot \vec{n} - (G\vec{E} \times \nabla \times \vec{a}) \cdot \vec{n}$$

$$= (\vec{n} \times \vec{E} \times \nabla G) \cdot \vec{a} \tag{3.3.25}$$

而利用$\nabla \times \vec{E} = -\mathrm{i}\omega\mu \vec{H} - \vec{M}$得到

$$(G\vec{a} \times \nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{n} = (-\mathrm{i}\omega\mu G\vec{a} \times \vec{H}) \cdot \vec{n} - (G\vec{a} \times \vec{M}) \cdot \vec{n}$$
$$= \mathrm{i}\omega\mu G\vec{a} \cdot (\vec{n} \times \vec{H}) + (G\vec{M} \times \vec{a}) \cdot \vec{n}, \tag{3.3.26}$$

把式（3.3.23）~（3.3.26）代入式（3.3.22）即有

$$\int_{V'}\left(-\mathrm{i}\omega\mu G\vec{J} - \vec{M} \times \nabla G + \frac{\rho}{\varepsilon}\nabla G\right)\mathrm{d}V$$
$$= \int_{\varepsilon+S'_0}(-\mathrm{i}\omega\mu G\vec{n} \times \vec{H} + \vec{n} \times \vec{E} \times \nabla G + \vec{n} \cdot \vec{E}\nabla G)\mathrm{d}s \tag{3.3.27}$$

把上式中S'_0上的面积分分离出来，然后将$\vec{r}$与$\vec{r}'$对换，就得到

$$\int_{S'_0}(-\mathrm{i}\omega\mu G\vec{n} \times \vec{H} + \vec{n} \times \vec{E} \times \nabla' G + \vec{n} \cdot \vec{E}\nabla' G)\mathrm{d}s'$$
$$= \int_V(-\mathrm{i}\omega\mu G\vec{J} - \vec{M} \times \nabla' G + \frac{\rho}{\varepsilon}\nabla' G)\mathrm{d}V'$$
$$- \int_\varepsilon(-\mathrm{i}\omega\mu G\vec{n} \times \vec{H} + \vec{n} \times \vec{E} \times \nabla' G + \vec{n} \cdot \vec{E}\nabla' G)\mathrm{d}s' \tag{3.3.28}$$

为方便起见把S_0'视为以$\vec{r} = \vec{r}'$点为中心，ε为半径的球面，并令$r = |\vec{r} - \vec{r}'|$，则

$$\nabla' G\Big|_{r=\varepsilon} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{4\pi r}\Big|_{r=\varepsilon}\vec{n}_0 = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \mathrm{i}k\right)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\varepsilon}}{4\pi\varepsilon}\vec{n} \tag{3.3.29}$$

其中，$\vec{n}_0$为球面S_0'上的外法向单位矢量，且$\vec{n}_0 = -\vec{n}$。再考虑到$\vec{n} \times (\vec{E} \times \vec{n}) = (\vec{n} \cdot \vec{n})\vec{E} - (\vec{n} \cdot \vec{E})\vec{n}$，$\mathrm{d}\Omega = \dfrac{\mathrm{d}s}{\varepsilon^2}$，又能把（3.3.28）式中$S'_0$上的积分表示为

$$\int_{S_0}(-\mathrm{i}\omega\mu G\vec{n} \times \vec{H} - \vec{n} \times \vec{E} \times \nabla' G + \vec{n} \cdot \vec{E}\nabla' G)\mathrm{d}s'$$
$$= \frac{\mathrm{i}\varepsilon\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\varepsilon}}{4\pi}\int_{S_0'}(-\omega\mu\vec{n} \times \vec{H} + k\vec{n} \times \vec{E} \times \vec{n} + k(\vec{n} \cdot \vec{E})\vec{n})\mathrm{d}\Omega'$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\varepsilon}\int_{S_0'}[\vec{n} \times \vec{E} \times \vec{n} + (\vec{n} \cdot \vec{E})\vec{n}]\mathrm{d}\Omega'$$
$$= \frac{\mathrm{i}\varepsilon\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\varepsilon}}{4\pi}\int_{S_0'}(-\omega\mu\vec{n} \times \vec{H} + k\vec{E})\mathrm{d}\Omega + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\varepsilon}}{4\pi}\int_{S_0'}\vec{E}\mathrm{d}\Omega'$$
$$= -\mathrm{i}\varepsilon\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\varepsilon}(\omega\mu\vec{n} \times \vec{H}_{\mathrm{ave}} + k\vec{E}_{\mathrm{ave}}) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\varepsilon}\vec{E}_{\mathrm{ave}} \tag{3.3.30}$$

其中，$\vec{E}_{\mathrm{ave}}$和$\vec{H}_{\mathrm{ave}}$分别为$\vec{E}$和$\vec{H}$在S_0'面上的平均值。显然，当$\varepsilon \to 0$时，上式右侧第一项趋于零，而第二项趋于$\vec{E}$（$\vec{r}$）且$V' \to V$，于是由式（3.3.28）得到

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_V\left[-\mathrm{i}\omega\mu GJ(\vec{r}') - \vec{M}(\vec{r}') \times \nabla' G + \frac{\rho(\vec{r}')}{\varepsilon}\nabla' G\right]\mathrm{d}V'$$
$$+ \int_\Sigma(\mathrm{i}\omega\mu G\vec{n} \times \vec{H}(\vec{r}') - \vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}') \times \nabla' G - \vec{n} \cdot \vec{E}(\vec{r}')\nabla' G)\mathrm{d}s' \tag{3.3.31}$$

用类似的方法或直接运用对偶性原理可以得到磁场的积分。

$$\vec{H}(\vec{r}) = \int_V \left[-\mathrm{i}\omega\varepsilon G \vec{M}(\vec{r}') + \vec{J}(\vec{r}') \times \nabla' G + \frac{\rho_{\mathrm{m}}(\vec{r}')}{\mu} \nabla' G \right] \mathrm{d}V'$$
$$- \int_S [\mathrm{i}\omega\varepsilon G \vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}') + \vec{n} \times \vec{H}(\vec{r}') \times \nabla' G + \vec{n} \cdot \vec{H}(\vec{r}') \nabla' G] \mathrm{d}s' \tag{3.3.32}$$

式（3.3.31）和（3.3.32）就是著名的 Stratton-Chu 公式。以上两式表明 V 内 $\vec{r}$ 处的电磁场由 V 内的体分布源以及 V 的表面上的等效源决定。

下面考虑一种特殊情况，假定 V 内的源只存在于一个局部区域 V_0 内，而 S 为一个扩展到无限远的球面 S_∞，S_∞ 外不存在源。根据能量有限原理，局部区域的源产生的电磁场在无穷远处的面积分应该为零。于是对于电场应该有

$$\int_{S_\infty} (\mathrm{i}\omega\mu G \vec{n} \times \vec{H} - \vec{n} \times \vec{E} \times \nabla' G - \vec{n} \cdot \vec{E} \nabla' G) \mathrm{d}s' = 0 \tag{3.3.33}$$

把式（3.3.29）代入上式后可知

$$\begin{aligned}
&\int_{S_\infty} (\mathrm{i}\omega\mu G \vec{n} \times \vec{H} - \vec{n} \times \vec{E} \times \nabla' G - \vec{n} \cdot \vec{E} \nabla' G) \mathrm{d}s' \\
&= \int_{S_\infty} \left\{ \mathrm{i}\omega\mu \hat{r} \times \vec{H} + \left(\frac{1}{r} + \mathrm{i}k\right) [\hat{r} \times \vec{E} \times \hat{r} + (\hat{r} \cdot \vec{E})\hat{r}] \right\} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{4\pi r} \mathrm{d}s' \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{S_\infty} \left[\mathrm{i}\omega\mu \hat{r} \times \vec{H} + \left(\frac{1}{r} + \mathrm{i}k\right) \vec{E} \right] \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r} \mathrm{d}s' \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{S_\infty} \left[\mathrm{i}\omega\mu \hat{r} \times \vec{H} + \frac{\vec{E}}{r} + \mathrm{i}k \vec{E} \right] \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r} \mathrm{d}s' \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{S_\infty} \left[\mathrm{i}\omega\mu r \left(\hat{r} \times \vec{H} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \vec{E} \right) + \frac{r\vec{E}}{r} \right] \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r^2} \mathrm{d}s'
\end{aligned} \tag{3.3.34}$$

由上式可以看出，为了使式（3.3.33）成立必须满足以下条件。

$$\lim_{r\to\infty} rE = 0 \tag{3.3.35}$$

$$\lim_{r\to\infty} r\left[\hat{r} \times \vec{H} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \vec{E} \right] = 0 \tag{3.3.36}$$

由式（3.3.31）可以证明以下无穷远条件。

$$\lim_{r\to\infty} rH = 0 \tag{3.3.37}$$

$$\lim_{r\to\infty} r\left[\vec{H} - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \hat{r} \times \vec{E} \right] = 0 \tag{3.3.38}$$

利用无源区的麦克斯韦方程可把以上无穷远条件概括为

$$\lim_{r\to\infty} r\left[\nabla \times \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{Bmatrix} + \mathrm{i}k\hat{r} \times \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{Bmatrix} \right] = 0 \tag{3.3.39}$$

这就是著名的索末菲辐射条件。该条件要求局部源在无穷远处产生的电场和磁场要以 $r\to\infty$ 更快的速度趋于零，同时只有外向波存在。后一要求可从只带有因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}$ 的场才能满足辐射条件看出。

这一辐射条件与前面我们讨论无界空间电磁场问题时要求场在无穷远处满足

的条件是一致的。

3.4 无界均匀各向同性媒质空间中典型源的场[38]

经过上面的一些准备，现在我们可以讨论一些理想化的、在空间具有一些特殊分布的、简单又典型的源在无界均匀各向同性媒质空间所产生的电磁场。通过这种讨论我们可获得很多重要的概念和关系，它们在电磁理论中具有广泛的意义。

3.4.1 无限大平面片状电流源

设电流分布在直角坐标系的 xy 平面上，电流的流向沿 x 轴，在 z 方向分布在无限薄的一层上。该电流源的电流密度可表示为

$$\vec{J}(z) = \hat{x}J_s\delta(z) \tag{3.4.1}$$

其中，J_s 为常数，表示表面电流密度，单位为 A/m。

当空间只有电流源（3.4.1）时，频域麦克斯韦旋度方程具有的形式为

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{i}\omega\mu\vec{H}(\vec{r}) \tag{3.4.2}$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \mathrm{i}\omega\varepsilon\vec{E}(\vec{r}) + \vec{J}(\vec{r}) \tag{3.4.3}$$

其中，ε 当媒质有耗时为复数。

由于场源只随 z 有变化，媒质又是均匀各向同性的，则该源所产生的场也与 x 和 y 无关，式（3.4.2）和（3.4.3）在直角坐标系中展开成为

$$\frac{\mathrm{d}E_y(z)}{\mathrm{d}z} = \mathrm{i}\omega\mu H_x(z) \tag{3.4.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}E_x(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{i}\omega\mu H_y(z) \tag{3.4.5}$$

$$\mathrm{i}\omega\mu H_z(z) = 0 \tag{3.4.6}$$

$$-\frac{\mathrm{d}H_y(z)}{\mathrm{d}z} = \mathrm{i}\omega\varepsilon E_x(z) + J_s\delta(z) \tag{3.4.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}H_x}{\mathrm{d}z}(z) = \mathrm{i}\omega\varepsilon E_y(z) \tag{3.4.8}$$

$$\mathrm{i}\omega\varepsilon E_z(z) = 0 \tag{3.4.9}$$

由式（3.4.6）和（3.4.9）知

$$H_z = E_z = 0 \tag{3.4.10}$$

其他的方程分为互相独立的两组。

$$\frac{\mathrm{d}E_x(z)}{\mathrm{d}z} = -\mathrm{i}\omega\mu H_y(z) \tag{3.4.11}$$

$$-\frac{\mathrm{d}H_y(z)}{\mathrm{d}z} = \mathrm{i}\omega\varepsilon E_x(z) + J_s\delta(z) \tag{3.4.12}$$

以及

$$\frac{\mathrm{d}E_y(z)}{\mathrm{d}z} = \mathrm{i}\omega\mu H_x(z) \tag{3.4.13}$$

$$\frac{\mathrm{d}H_x(z)}{\mathrm{d}z} = \mathrm{i}\omega\varepsilon E_y(z) \tag{3.4.14}$$

容易看出，场的源只出现在第一组方程中，第二组方程不仅不包含场源，其中的 E_y 和 H_x 也与第一组中的场量无关。在这种情况下只能认为第二组方程只有平凡解，即

$$E_y = H_x = 0 \tag{3.4.15}$$

于是，问题的场解只有 E_x 和 H_y，且由方程（3.4.11）和（3.4.12）描述。如果先求解 E_x，则可利用两式消去 H_y 而得 $E_x(z)$ 所满足的微分算子方程。

$$\frac{\mathrm{d}^2E_x(z)}{\mathrm{d}z^2} + k^2E_x(z) = \mathrm{i}\omega\mu J_s\delta(z) \tag{3.4.16}$$

在求解这一方程时 $E_x(z)$ 须满足无穷远条件。

$$\lim_{z\to\pm\infty} E_x(z) = 0 \tag{3.4.17}$$

若令

$$E_x(z) = -\mathrm{i}\omega\mu J_s g(z) \tag{3.4.18}$$

则由（3.4.16）知 $g(z)$ 应满足方程

$$\frac{\mathrm{d}^2g(z)}{\mathrm{d}z^2} + k^2g(z) = -\delta(z) \tag{3.4.19}$$

同时有无穷远条件

$$\lim_{z\to\pm\infty} g(z) = 0 \tag{3.4.20}$$

显然，这里的 $g(z)$ 就是满足方程（3.2.3）的 $G(x, x')$ 在 $x'=0$ 时的结果，即知

$$g(z) = G(z,0) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k|z|}}{2\mathrm{i}k},\quad \mathrm{Im}(k) < 0 \tag{3.4.21}$$

再由式（3.4.18）就可得到

$$E_x(z) = -\frac{\omega\mu}{2k}J_s\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k|z|} \tag{3.4.22}$$

如果取

$$J_s = -\frac{2k}{\omega\mu} \tag{3.4.23}$$

$E_x(z)$ 又可在 $z=0$ 处具有单位幅度，即

$$E_x(z) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k|z|} \tag{3.4.24}$$

$E_x(z)$ 知道后，就可代入（3.4.11）而得到磁场。

$$H_y(z) = \frac{1}{\eta}\begin{cases}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}, & z > 0\\ -\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}, & z < 0\end{cases} \tag{3.4.25}$$

其中

$$\eta = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{3.4.26}$$

并称为特性阻抗。

以上解我们还可以用另一种形式表达出来。利用 $\delta(z)$ 的谱表示

$$\delta(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z}\mathrm{d}\beta \tag{3.4.27}$$

以及 $g(z)$ 的傅里叶变换

$$G(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta z}\mathrm{d}z \tag{3.4.28}$$

和逆变换

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\beta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z}\mathrm{d}\beta \tag{3.4.29}$$

把式（3.4.27）和（3.4.29）代入式（3.4.19）便能得到

$$G(\beta) = \frac{1}{\beta^2 - k^2} \tag{3.4.30}$$

于是由（3.4.29）得

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z}}{\beta^2 - k^2}\mathrm{d}\beta \tag{3.4.31}$$

把此结果代入式（3.4.18）并利用式（3.4.23）即可得 E_x 的另一种表示。

$$E_x(z) = -\frac{\mathrm{i}k}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z}}{k^2 - \beta^2}\mathrm{d}\beta \tag{3.4.32}$$

这是 E_x 的一种谱域表示。

式（3.4.32）和（3.4.24）都表示方程（3.4.16）的解，但方程的解是唯一的，故两种形式的解应该相等。因此我们又可得到

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k|z|} = \frac{\mathrm{i}k}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z}}{\beta^2 - k^2}\mathrm{d}\beta, \quad \mathrm{Im}(k) < 0 \tag{3.4.33}$$

这是一个非常有用的关系，它把平面波函数表示成谱域的形式。

3.4.2 无限长直线电流源

设一无限长直线电流源沿直角坐标系的 z 轴放置，其电流密度 $\vec{J}(\rho)$ 可表示为

$$\vec{J}(\rho) = \hat{z}I_0\delta(x)\delta(y) \tag{3.4.34}$$

其中，I_0 为常数；$\rho = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$。显然该问题在圆柱坐标系中讨论更为方便，在这种坐标系中电流源应表示为

$$\vec{J}(\rho) = \hat{z}I_0\frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho} \tag{3.4.35}$$

该源所产生的电磁场应该与 z 和 φ 无关，只是 ρ 的函数。在频域中电磁场满足的方程仍如式（3.4.2）和（3.4.3）所示。在圆柱坐标系中展开这两个方程便有

$$\frac{\mathrm{d}E_z(\rho)}{\mathrm{d}\rho} = \mathrm{i}\omega\mu H_\rho(\rho) \tag{3.4.36}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}[\rho H_\varphi(\rho)] = I_0\frac{\sigma(\rho)}{2\pi\rho} + \mathrm{i}\omega\varepsilon E_z(\rho) \tag{3.4.37}$$

$$\frac{\mathrm{d}H_z(\rho)}{\mathrm{d}\rho} = -\mathrm{i}\omega\varepsilon E_\varphi(\rho) \tag{3.4.38}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}[\rho E_\varphi(\rho)] = -\mathrm{i}\omega\mu H_z(\rho) \tag{3.4.39}$$

$$E_\rho = H_\rho = 0 \tag{3.4.40}$$

这些方程分成相互独立的两组，方程（3.4.38）和（3.4.39）中的 H_z 和 E_φ 既与源无关，也不与其他场耦和，故应设

$$H_z = E_\varphi = 0$$

这样，空间只存在 E_z 和 H_φ，由式（3.4.36）和（3.4.37）可求得它们满足以下算子方程。

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left[\rho\frac{\mathrm{d}E_z(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right] + k^2E_z = \mathrm{i}\omega\mu I_0\frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho} \tag{3.4.41}$$

$$H_\varphi = \frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\frac{\mathrm{d}E_z(\rho)}{\mathrm{d}\rho} \tag{3.4.42}$$

因此，可先由式（3.4.41）解得 $E_z(\rho)$，再由式（3.4.42）计算 $H_\varphi(\rho)$. 为此我们设

$$g(\rho) = -\frac{2\pi E_z(\rho)}{\mathrm{i}\omega\mu I_0} \tag{3.4.43}$$

则 $g(\rho)$ 满足算子方程

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left[\rho\frac{\mathrm{d}g(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right] + k^2g(\rho) = -\frac{\delta(\rho)}{\rho} \tag{3.4.44}$$

还要满足无限远条件

$$\lim_{\rho\to\infty}g(\rho) = 0 \tag{3.4.45}$$

为了求出 $g(\rho)$ 我们先考虑更一般的情况，即先求得满足以下方程的 $g(\rho,\rho')$。

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left[\rho\frac{\mathrm{d}g(\rho,\rho')}{\mathrm{d}\rho}\right] + k^2g(\rho,\rho') = -\frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho} \tag{3.4.46}$$

它同样也要满足条件（3.4.45）。除此之外，从物理上很容易理解的是，在 $\rho=0$ 时 $g(\rho, \rho')$ 必须是有限的。和以前的方法一样，先考虑 $\rho\neq\rho'$ 的情况，这时式（3.4.46）变成一个零阶贝塞尔方程。这类方程的解在一般情况下可选贝塞尔函数、纽曼函数和两类汉克尔函数的线性组合。考虑到需要满足上面提到的条件，可选解的形式为

$$g(\rho,\rho') = \begin{cases} AJ_0(k\rho) + BY_0(k\rho), & \rho < \rho' \\ CH_0^{(1)}(k\rho) + DH_0^{(2)}(k\rho), & \rho > \rho' \end{cases} \tag{3.4.47}$$

根据这些函数的渐近性质不难发现，为了满足无穷远条件，必须使 $C=0$，为了满足 $\rho=0$ 的有限条件又要求 $B=0$。考虑了以上要求之后，解（3.4.47）变成以下的形式。

$$g(\rho,\rho')=\begin{cases}AJ_0(k\rho), & \rho<\rho'\\ DH_0^{(2)}(k\rho), & \rho>\rho'\end{cases} \tag{3.4.48}$$

剩下的两个常数要由 $\rho=\rho'$时要求来确定。连续性条件要求

$$AJ_0(k\rho')=DH_0^{(2)}(k\rho') \tag{3.4.49}$$

为满足阶跃条件，必须

$$\left[D\frac{\mathrm{d}H_0^{(2)}(k\rho)}{\mathrm{d}\rho}-A\frac{\mathrm{d}J_0(k\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right]_{\rho=\rho'}=-\frac{1}{\rho'} \tag{3.4.50}$$

利用关系

$$J_1(x)H_0^2(x)-J_0(x)H_1^{(2)}(x)=\frac{2}{\mathrm{i}\pi x} \tag{3.4.51}$$

可从以上两方程中解得

$$A=\frac{\pi}{2\mathrm{i}}H_0^{(2)}(k\rho'),\quad D=\frac{\pi}{2\mathrm{i}}J_0(k\rho') \tag{3.4.52}$$

于是，最后得到方程（3.4.46）的解为

$$g(\rho,\rho')=\begin{cases}H_0^{(2)}(k\rho')J_0(k\rho), \rho<\rho'\\ H_0^{(2)}(k\rho)J_0(k\rho'), \rho>\rho'\end{cases} \tag{3.4.53}$$

为了获得 $g(\rho)$，我们把方程（3.4.44）看作方程（3.4.46）在 $\rho'\to 0$ 的极限情况。因此，方程（3.4.44）的解可由式（3.4.53）取极限 $\rho'\to 0$ 而得到。所以我们有

$$g(\rho)=g(\rho,0)=\frac{\pi}{2\mathrm{i}}H_0^{(2)}(k\rho) \tag{3.4.54}$$

这样，由式（3.4.43）就可得到待求的 $E_z(\rho)$ 为

$$E_z(\rho)=-\frac{\omega\mu I_0}{4}H_0^{(2)}(k\rho) \tag{3.4.55}$$

再由式（3.4.42）又可求得 H_φ 为

$$H_\varphi(\rho)=-\frac{\mathrm{i}kI_0}{4}H_1^{(2)}(k\rho) \tag{3.4.56}$$

为得到以上结果的谱域表示，我们利用关系

$$\frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho}=\int_0^\infty J_0(\beta\rho)J_0(k\rho')\beta\mathrm{d}\beta \tag{3.4.57}$$

和傅里叶－贝塞尔变换

$$F(\beta)=\int_0^\infty f(\rho)J_0(\beta\rho)\rho\mathrm{d}\rho \tag{3.4.58}$$

$$f(\rho)=\int_0^\infty F(\beta)J_0(\beta\rho)\beta\mathrm{d}\beta \tag{3.4.59}$$

于方程（3.4.46），即可得到

$$(-\beta^2+k^2)G(\beta,\rho')=-J_0(\beta\rho') \tag{3.4.60}$$

其中，$G(\beta,\rho')$ 为 $g(\rho,\rho')$ 的傅里叶－贝塞尔变换。由上式解出 $G(\beta,\rho')$，再做逆变换便得到

$$g(\rho,\rho')=\int_0^\infty \frac{J_0(\beta\rho)J_0(\beta\rho')}{\beta^2-k^2}\beta\mathrm{d}\beta \tag{3.4.61}$$

当令 $\rho'\to 0$ 时又得到

$$g(\rho)=g(\rho,0)=\int_0^\infty \frac{J_0(\beta\rho)}{\beta^2-k^2}\beta\mathrm{d}\beta \tag{3.4.62}$$

这就是 $g(\rho)$ 的谱域表示，进而有 $E_z(\rho)$ 的谱域表示

$$E_z(\rho)=\frac{\mathrm{i}\omega\mu I_0}{2\pi}\int_0^\infty \frac{J_0(\beta\rho)}{\beta^2-k^2}\beta\mathrm{d}\beta \tag{3.4.63}$$

再利用解的唯一性，式（3.4.55）与（3.4.63）所表示的 $E_z(\rho)$ 应该相等，由此又有

$$H_0^{(2)}(k\rho)=\frac{2\mathrm{i}}{\pi}\int_0^\infty \frac{J_0(\beta\rho)}{\beta^2-k^2}\beta\mathrm{d}\beta \tag{3.4.64}$$

这是汉克尔函数与贝塞尔函数之间的一个重要关系。

这一问题当然也可以在直角坐标系中描述并求解，而且由此还能获得一些很重要的关系，值得展开讨论。显然，由于源在 z 方向均匀无限，由它激发的电磁场应该与 z 无关。在直角坐标系中展开麦克斯韦方程的两个旋度方程就成为

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}=-\mathrm{i}\omega\mu H_x \tag{3.4.65}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x}=\mathrm{i}\omega\mu H_y \tag{3.4.66}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=I_0\delta(x)\delta(y)+\mathrm{i}\omega\varepsilon E_z \tag{3.4.67}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y}=\mathrm{i}\omega\varepsilon E_x \tag{3.4.68}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x}=-\mathrm{i}\omega\varepsilon E_y \tag{3.4.69}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\mathrm{i}\omega\mu H_z \tag{3.4.70}$$

显然，这些方程分为相互独立的两组。式（3.4.65）~（3.4.67）为第一组，它包括电流源；式（3.4.68）~（3.4.70）为第二组，其中没有电流源。根据和前面分析中相同的理由可以认为

$$H_z=E_x=E_y=0 \tag{3.4.71}$$

第一组方程属于 TM_z 波，其中的 E_z 满足算子方程

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+k^2E_z=\mathrm{i}\omega\mu I_0\delta(x)\delta(y) \tag{3.4.72}$$

由此解出 E_z 后就可由式（3.4.65）和（3.4.66）得到 H_x 和 H_y。解方程（3.4.72）时需要考虑无穷远条件

$$\lim_{x\to\pm\infty} E_z(x,y) = 0 \tag{3.4.73}$$

$$\lim_{y\to\pm\infty} E_z(x,y) = 0 \tag{3.4.74}$$

利用傅里叶变换

$$E_z(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}_z(k_x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_x x}\mathrm{d}k_x \tag{3.4.75}$$

和 $\delta(x)$ 的谱表示式（3.4.27）

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x}\mathrm{d}k_x \tag{3.4.76}$$

由方程（3.4.72）得到 $\hat{E}_z$ 满足的算子方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 \hat{E}_z}{\mathrm{d}y^2} + k_y^2 \hat{E}_z = \mathrm{i}\omega\mu I_0\delta(y) \tag{3.4.77}$$

其中

$$k_y = \sqrt{k^2 - k_x^2} \tag{3.4.78}$$

若令

$$G = -\frac{\hat{E}_z}{\mathrm{i}\omega\mu I_0} \tag{3.4.79}$$

则有关于 G 的方程

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} + k_y^2\right)G = -\delta(y) \tag{3.4.80}$$

$$\lim_{y\to\pm\infty} G(k_x,y) = 0 \tag{3.4.81}$$

显然该问题与（3.4.19）类似，故其解为

$$G = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_y|y|}}{2\mathrm{i}k_y}, \quad \mathrm{Im}(k_y) < 0 \tag{3.4.82}$$

而且

$$\hat{E}_z = -\frac{\omega\mu I_0}{2k_y}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_y|y|} \tag{3.4.83}$$

再经傅里叶逆变换即得到

$$E_z(x,y) = -\frac{\omega\mu I_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_y|y|}}{k_y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x}\mathrm{d}k_x \tag{3.4.84}$$

这样我们就得到了 E_z 的另一种表达形式。但是 E_z 是唯一的，式（3.4.84）与（3.4.55）必须相等，由此知

$$H_0^{(2)}[k(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}] = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k^2-k_x^2)^{\frac{1}{2}}|y|}}{(k^2 - k_x^2)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x}\mathrm{d}k_x \tag{3.4.85}$$

其中

$$\operatorname{Im}(k^2-k_x^2)^{\frac{1}{2}}<0 \tag{3.4.86}$$

该式可视作柱面波由平面波的叠加而成。

对式（3.4.85）两边取变换又可得

$$\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k^2-k_x^2)^{\frac{1}{2}}|y|}}{(k^2-k_x^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}H_0^{(2)}[k(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_x x}\mathrm{d}x \tag{3.4.87}$$

由上面求解的过程可知，上式中的 x 和 y 及 k_x 和 k_y 可以对换。

如果对式（3.4.72）直接作二重傅里叶变换就能得到

$$(k^2-k_x^2-k_y^2)\hat{E}_z(k_x,k_y)=\mathrm{i}\omega\mu I_0 \tag{3.4.88}$$

解出 $\hat{E}_z$ 后再做二重傅里叶逆变换就可得到 $E_z(x,y)$ 的另一种表示

$$E_z(x,y)=\mathrm{i}\omega\mu I_0\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x x+k_y y)}}{k^2-k_x^2-k_y^2}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \tag{3.4.89}$$

因为该式也必须与式（3.4.55）相等，便又得到第二类汉克尔函数的另一种表示

$$H_0^{(2)}[k(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}]=\frac{1}{\mathrm{i}\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x x+k_y y)}}{k^2-k_x^2-k_y^2}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \tag{3.4.90}$$

对上式做二维傅里叶变换又得到

$$\frac{1}{k^2-k_x^2-k_y^2}=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}H_0^{(2)}[k(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_x x+k_y y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.4.91}$$

这些结果在电磁场理论中有重要意义。

3.4.3　点源

考虑一无限短的一个线源，其长度为 l。把它置于直角坐标系的原点，电流沿 z 轴方向。因为 l 为无限短，故可视作一个点源，并表示为

$$\begin{aligned}\vec{J}&=\hat{z}I_0 l\delta(x)\delta(y)\delta(z)\\&=\hat{z}I_0 l\delta(\vec{r})\end{aligned} \tag{3.4.92}$$

用矢量位 $\vec{A}$ 讨论该问题较为方便。在频域与 $\vec{J}$ 相关的 $\vec{A}$ 满足算子方程（1.2.16），即

$$(\nabla^2+k^2)\vec{A}=-\mu\vec{J} \tag{3.4.93}$$

$\vec{A}$ 知道后，就可通过式

$$\vec{H}=\frac{1}{\mu}(\nabla\times\vec{A}) \tag{3.4.94}$$

求得磁场。再通过式（1.2.18）和（1.2.10）可知

$$\vec{E}=-\mathrm{i}\omega\left[\vec{A}+\frac{1}{k^2}\nabla(\nabla\cdot\vec{A})\right] \tag{3.4.95}$$

由此又可以求得电场。由于 $\vec{J}$ 只有 z 分量，因此 $\vec{A}$ 也只有 z 分量，故

$$\vec{A}=\hat{z}A_z \tag{3.4.96}$$

把式（3.4.92）代入式（3.4.93）就有

$$(\Delta^2+k^2)A_z=\mu I_0 l\delta(\vec{r}) \tag{3.4.97}$$

若令

$$g = \frac{A_z}{\mu I_0 l} \tag{3.4.98}$$

则满足

$$(\nabla^2 + k^2) g = -\delta(\vec{r}) \tag{3.4.99}$$

它在直角坐标系中的形式为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) g = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \tag{3.4.100}$$

还要满足无穷远条件

$$\lim_{s \to \pm\infty} g = 0, \quad s = x, y, z \tag{3.4.101}$$

若 $g(k_x, k_y, k_z)$ 表示 g 的三重傅里叶变换，则由（3.4.100）可得

$$(k^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2)\,\hat{g} = -1 \tag{3.4.102}$$

然后再求$\hat{g}$的反变换，即为

$$g(x, y, z) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}}{k^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2} dk_x dk_y dk_z \tag{3.4.103}$$

由式（3.4.98）就可求得 A_z（x，y，z）为

$$A_z = -\frac{\mu I_0 l}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}}{k^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2} dk_x dk_y dk_z \tag{3.4.104}$$

由于我们已求得方程（3.4.100）另一种形式的解（3.2.34），即

$$g(x, y, z) = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}$$

根据解的唯一性，可得到一种重要关系

$$\frac{e^{-ikr}}{r} = -\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}}{k^2 - k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} dk_x dk_y dk_z \tag{3.4.105}$$

方程（3.4.99）还可以在其他坐标系中求解，从而可以得到 g 和 A_z 的其他表达形式。同样地根据唯一性定理也可以得到$\frac{e^{-ikr}}{r}$的其他表达式[38]，如

$$\frac{e^{-ikr}}{r} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\beta|z|}}{2i\beta} e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \tag{3.4.106}$$

其中

$$\beta = (k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{e^{-ikr}}{r} = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\Gamma|z|}}{2i\Gamma} J_0(\lambda\rho)\lambda\, d\lambda \tag{3.4.107}$$

其中

$$\Gamma = (k^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{e^{-ikr}}{r} = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(2)}(\tau\rho) e^{ik_z z} dk_z \tag{3.4.108}$$

其中

$$\tau = (k^2 - k_z^2)^{\frac{1}{2}}$$

这些关系把球面波与其他形式的基本波型联系了起来。

3.4.4　电流细圆环

考虑一个由线电流构成的圆环，环中心位于圆柱坐标系的 z 轴的 z'处，环面与 z 轴垂直。若我们把它看作一个磁流源$\vec{M}$，则可以表示为

$$\vec{M} = P_0 \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho} \delta(z - z') \hat{\varphi} \tag{3.4.109}$$

其中，P_0 为磁流矩；$\hat{\varphi}$ 为坐标 φ 的单位矢量；ρ'为电流线的 ρ 坐标。把仅含磁流源的频域麦克斯韦旋度方程在圆柱坐标系中展开成为

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = -\mathrm{i}\omega\varepsilon E_\rho \tag{3.4.110}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho H_\varphi) = \mathrm{i}\omega\varepsilon E_z \tag{3.4.111}$$

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = -\mathrm{i}\omega\mu H_\varphi - M_\varphi \tag{3.4.112}$$

$$\frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = \mathrm{i}\omega\mu H_z \tag{3.4.113}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho E_\varphi) = -\mathrm{i}\omega\mu H_z \tag{3.4.114}$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = \mathrm{i}\omega\varepsilon E_\varphi \tag{3.4.115}$$

它们又可分为两个相互独立的方程组，前三个方程产生 TE_φ 波，后三个方程中各分量构成的 TM_φ 波将不被激发。由方程（3.4.110）~（3.4.112）可以看出，只要求得 H_φ，就可由（3.4.110）和（3.4.111）求得 E_ρ 和 E_z，而不难求得 H_φ 满足的方程为

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] H_\varphi + \left(k^2 - \frac{1}{\rho^2}\right) H_\varphi = \mathrm{i}\omega\varepsilon M_\varphi \tag{3.4.116}$$

其中

$$M_\varphi = P_0 \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho} \delta(z - z') \tag{3.4.117}$$

若令

$$g = -\frac{H_\varphi}{\mathrm{i}\omega\varepsilon P_0} \tag{3.4.118}$$

则 g 满足以下方程

$$(L_\rho + L_z - k^2) g = \frac{\delta(\rho - \rho')}{\rho} \delta(z - z') \tag{3.4.119}$$

其中

$$L_\rho = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2} \tag{3.4.120}$$

$$L_z = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{3.4.121}$$

还要满足无穷远条件

$$\lim_{\rho\to\infty} g = 0 \tag{3.4.122}$$

$$\lim_{z\to\pm\infty} g = 0 \tag{3.4.123}$$

和有界条件

$$\lim_{\rho\to 0} g \text{ 有界} \tag{3.4.124}$$

根据以上条件首先可考虑对 $g(\rho,z,\rho',z')$ 的傅里叶变换$\hat{g}(\rho,k_z,\rho',z')$，由于

$$\delta(z-z') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_z(z-z')}\,dk_z \tag{3.4.125}$$

则可由（3.4.119）得

$$L_\rho\,\hat{g} - k_\rho^2\,\hat{g} = e^{-ik_z z'}\frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho} \tag{3.4.126}$$

其中

$$k_\rho^2 = k^2 - k_z^2 \tag{3.4.127}$$

再令

$$G = \frac{\hat{g}}{e^{-ik_z z'}} \tag{3.4.128}$$

又可得到 G 所满足的方程

$$\frac{1}{\rho}\left(\rho\frac{\partial G}{\partial\rho}\right)+\left(k_\rho^2-\frac{1}{\rho^2}\right)G = -\frac{\delta(\rho-\rho')}{\rho} \tag{3.4.129}$$

和相应的条件

$$\lim_{\rho\to\infty} G = 0 \tag{3.4.130}$$

$$\lim_{\rho\to 0} G \text{ 有限} \tag{3.4.131}$$

当$\rho\neq\rho'$时，方程（3.4.129）为一阶贝塞尔方程，可以给出一般解，然后再根据所给条件，通过与解方程（3.4.46）类似的过程可以确定。

$$G = \frac{\pi}{2i}\begin{cases} H_1^{(2)}(k_\rho\rho')J_1(k_\rho\rho), & \rho<\rho' \\ H_1^{(2)}(k_\rho\rho)J_1(k_\rho\rho'), & \rho>\rho' \end{cases} \tag{3.4.132}$$

再返回去就可求得所需要的 H_φ，

$$H_\varphi = -\frac{\omega\varepsilon P_0}{4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_z(z-z')}\,dk_z\begin{cases} H_1^{(2)}(k_\rho\rho')J_1(k_\rho\rho), & \rho<\rho' \\ H_1^{(2)}(k_\rho\rho)J_1(k_\rho\rho'), & \rho>\rho' \end{cases} \tag{3.4.133}$$

还可以用其他方法得到其他形式的解。

3.5 无界均匀各向异性媒质空间中的平面电磁波

各向异性媒质中的电磁波将有更复杂的形态，通过直接求解麦克斯韦方程了

解可能存在的各种电磁模式有很多困难。我们已经知道，平面电磁波具有最简单的形式。而且，很多不同形式的电磁波可以表示为平面电磁波的叠加，所以，我们通过各向异性媒质中的平面电磁波解来了解各向异性媒质中电磁场的一些特性。

3.5.1　各向异性媒质的一般特性

在宏观电磁理论中媒质的电磁特性或与电磁场的相互作用可通过本构关系表现出来，表示$\vec{D}$与$\vec{E}$和$\vec{B}$与$\vec{H}$之间的关系，对有耗介质也包括$\vec{J}$与$\vec{E}$之间的关系。各向同性媒质的特点是它们保持相同方向。如果$\vec{D}$与$\vec{E}$、$\vec{B}$与$\vec{H}$和$\vec{J}$与$\vec{E}$不再相互平行，就称这种媒质是各向异性的。更复杂的情况是$\vec{D}$不仅与$\vec{E}$有关，也与$\vec{H}$有关；$\vec{B}$不仅与$\vec{H}$有关，也与$\vec{E}$有关。一般地可表示为

$$\vec{D} = \bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \vec{E} + \bar{\bar{\lambda}} \cdot \vec{H} \tag{3.5.1}$$

$$\vec{B} = \bar{\bar{\nu}} \cdot \vec{E} + \bar{\bar{\mu}} \cdot \vec{H} \tag{3.5.2}$$

我们称这种媒质为双各向异性的。如果 $\bar{\bar{\lambda}} = \bar{\bar{\nu}} = 0$，就是一般的各向异性媒质，我们主要讨论这种情况。对这种媒质我们已经给出了电磁场在频域所满足的矢量波动方程为式（1.1.61）和（1.1.62）。在无源区域，这些方程成为

$$\nabla \times \bar{\bar{\mu}}^{-1} \cdot \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) - \omega^2 \bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0 \tag{3.5.3}$$

$$\nabla \times \bar{\bar{\varepsilon}}^{-1} \cdot \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) - \omega^2 \bar{\bar{\mu}} \cdot \vec{H}(\vec{r}) = 0 \tag{3.5.4}$$

最常遇到的各向异性媒质又可分为两类：一类称为各向异性电介质，对这种媒质 $\bar{\bar{\mu}}$ 可用 μ 替代；另一类称为各向异性磁介质，对这种媒质而言 $\bar{\bar{\varepsilon}}$ 可由 ε 替代。下面我们分别讨论这两类媒质中的平面电磁波。

3.5.2　单轴电介质中的平面电磁波

水晶体是一种常见的各向异性电介质，其介电常数张量是对称的。对这种介质总可找到一个坐标系使介电常数张量只有对角元素，例如，$\bar{\bar{\varepsilon}}$ 可表示成

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{3.5.5}$$

这个坐标系称为主坐标系，三个坐标轴称为水晶体的主轴。对正方系、六角系和菱面系水晶体而言，$\bar{\bar{\varepsilon}}$ 的三个对角参数中总有两个是相等的，这样的水晶体称为单轴晶体，并把呈现各向异性的主轴称为光轴。如果在（3.5.5）中 $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon$，则 z 轴就是光轴。这样的单轴晶体的介电常数张量为

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{3.5.6}$$

现在我们来考察在这种媒质构成的均匀无界空间中可能存在的平面电磁波解及其可能行为。正如以前所讨论的那样，在频域平面电磁波中的电场和磁场可表

示为

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tag{3.5.7}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tag{3.5.8}$$

它们应该满足麦克斯韦方程

$$\nabla \times \vec{E} = -i\omega\mu \vec{H} \tag{3.5.9}$$

$$\nabla \times \vec{H} = i\omega\bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \vec{E} \tag{3.5.10}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 \tag{3.5.11}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{3.5.12}$$

以及由其导出的矢量波动方程

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} - \omega^2\mu\bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \vec{E} = 0 \tag{3.5.13}$$

$$\nabla \times \bar{\bar{\varepsilon}}^{-1} \cdot \nabla \times \vec{H} - \omega^2\mu \vec{H} = 0 \tag{3.5.14}$$

把平面波表示式代入上两方程并利用关系$\nabla\times\nabla\times\vec{E}=\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}$，便可得到$\vec{k}$应满足的方程

$$k^2 \vec{E}_0 - \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}_0) - \omega^2\mu\bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \vec{E}_0 = 0 \tag{3.5.15}$$

$$\vec{k} \times \bar{\bar{\varepsilon}}^{-1} \cdot (\vec{k} \times \vec{H}_0) + \omega^2\mu \vec{H}_0 = 0 \tag{3.5.16}$$

由这些方程所确定的$\vec{k}$可以表明平面电磁波的行为特点。因为$\vec{k}$是 ω 的函数，所以称这些方程为平面电磁波的色散方程。把平面波解代入式（3.5.11）和（3.5.12）又可得到

$$\vec{k} \cdot \vec{D} = 0 \tag{3.5.17}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = \mu \vec{k} \cdot \vec{H} = 0 \tag{3.5.18}$$

这说明，$\vec{k}$与$\vec{D}$和$\vec{B}$（或$\vec{H}$）都是正交的。对于式（3.5.6）所表示的单轴电介质而言式（3.5.17）表明

$$\vec{k} \cdot (\bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \vec{E}_0) = \varepsilon k_x E_{0x} + \varepsilon k_y E_{0y} + \varepsilon_z k_z E_{0z} = 0$$

即有

$$k_x E_{0x} + k_y E_{0y} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon} k_z E_{0z} \tag{3.5.19}$$

由此可知

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = \left(1 - \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\right) k_z E_{0z} \tag{3.5.20}$$

考虑到这一结果，当我们在直角坐标系中对单轴电介质把式（3.5.15）展开为分量形式并用矩阵表示就得到以下方程。

$$\begin{bmatrix} k^2 - \omega^2\mu\varepsilon & 0 & -(1-\varepsilon_z/\varepsilon)k_x k_z \\ 0 & k^2 - \omega^2\mu\varepsilon & -(1-\varepsilon_z/\varepsilon)k_y k_z \\ 0 & 0 & k_x^2 + k_y^2 - \dfrac{\varepsilon_z}{\varepsilon}k_z^2 - \omega^2\mu\varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix} = 0 \tag{3.5.21}$$

由于该方程有非零解的条件是其行列式等于零，并由此得到色散方程。很容易看

出，该色散方程至少存在以下两个解。

$$k^2 = \omega^2\mu\varepsilon \tag{3.5.22}$$

$$k_x^2 + k_y^2 + \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}k_z^2 = \omega^2\mu\varepsilon_z \tag{3.5.23}$$

这说明，在单轴电介质中，至少可以存在两种形式的平面电磁波。

先看第一种情况，把式（3.5.22）代入方程（3.5.21）立即发现，在这种平面波中

$$E_z = 0 \tag{3.5.24}$$

因此又可由式（3.5.20）得

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \tag{3.5.25}$$

这表明，这一种平面波的电场矢量$\vec{E}$与传播方向正交。再加上式（3.5.18）所表示的$\vec{H}$与$\vec{k}$的正交性，就说明这种平面波是 TEM 波，这与各向同性媒质中的平面波相同，故被称为各向异性媒质中的寻常平面波（ordinary plane wave）。进而由式（3.5.22）又可以推知寻常波的相速度为

$$v_{\mathrm{p}} = (\mu\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} \tag{3.5.26}$$

这种相速度与传播方向和频率无关。

为了讨论第二种平面波的特性，我们把波矢$\vec{k}$与 z 轴所在的平面选为 yz 平面，这不会影响讨论的一般性。在这样选定的坐标系中显然有 $k_x=0$。把这一结果和式（3.5.23）代入方程（3.5.21）立即可以证明，在这种平面波中 $E_{0x}=0$，亦即

$$E_x = 0 \tag{3.5.27}$$

也就是说电场矢量$\vec{E}$也落在 yz 平面内。这样，电场会有沿$\vec{k}$方向的分量，从而不再是 TEM 波。而且，因为$\vec{D}$总是与$\vec{k}$正交，故$\vec{E}$与$\vec{D}$不再是相互平行的。这些都说明，满足式（3.5.23）的平面波与各向同性媒质中的平面波不同，常称它为非寻常平面波（extraordinary plane wave）。

如果我们用 θ 表示$\vec{k}$与 z 轴之间的夹角，则 $k_z=k\cos\theta$，于是式（3.5.23）又可表示为

$$k^2\left(\sin^2\theta + \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\cos^2\theta\right) = \omega^2\mu\varepsilon_z \tag{3.5.28}$$

所以，第二种亦即非寻常平面波的相速度可表示为

$$v_{\mathrm{p}} = \left(\frac{\sin^2\theta}{\mu\varepsilon_z} + \frac{\cos^2\theta}{\mu\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.5.29}$$

这表明非寻常平面波的相速度与波的传播方向有关，这是非寻常波与寻常波之间又一个重要的区别。

3.5.3　磁化等离子体中的平面电磁波

另一种常遇到的各向异性电介质是磁化等离子体。如果外加均匀恒定磁场沿

z 方向，则其介电常数张量可表示为

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & -\mathrm{i}\varepsilon_2 & 0 \\ \mathrm{i}\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \tag{3.5.30}$$

其特点是 $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}^*$，$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}$，采用现在的表示是为了避免与单轴介质中的参数相混淆。

因为都是各向异性电介质，所以其中的平面波解仍满足色散方程（3.5.15），在直角坐标系中用分量表示，并写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} k^2 - k_x^2 - \omega^2\mu\varepsilon_1 & -k_xk_y + \mathrm{i}\omega^2\mu\varepsilon_2 & -k_xk_z \\ -k_xk_y - \mathrm{i}\omega^2\mu\varepsilon_2 & k^2 - k_y^2 - \omega^2\mu\varepsilon_1 & -k_yk_z \\ -k_xk_z & -k_yk_z & k^2 - k_z^2 - \omega^2\mu\varepsilon_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix} = 0 \tag{3.5.31}$$

显然，直接求解这一方程相当复杂，下面仅讨论一种特殊的情况。

我们讨论沿外加磁场方向传播的平面波，这种波只有 z 向的波矢量，所以

$$k_x = k_y = 0, \quad k_z = k \tag{3.5.32}$$

这时方程（3.5.31）简化为

$$\begin{bmatrix} k^2 - \omega^2\mu\varepsilon_1 & \mathrm{i}\omega^2\mu\varepsilon_2 & 0 \\ -\mathrm{i}\omega^2\mu\varepsilon_2 & k^2 - \omega^2\mu\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega^2\mu\varepsilon_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix} = 0 \tag{3.5.33}$$

由该方程有非零解的条件立即得到色散方程（3.5.33）的解为

$$k = \pm\omega[\mu(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2)]^{\frac{1}{2}} \tag{3.5.34}$$

这里括号外的 ± 号表示沿 ±z 方向传播的平面波，只需讨论沿 +z 方向传播的波就可了解这种平面波的传播特性。把取 + 号的 k 代回到方程（3.5.33）中，容易看出其解为

$$E_{0z} = 0, \quad \frac{E_0y}{E_{0x}} = \pm\mathrm{i} \tag{3.5.35}$$

故这种平面波中的电场具有以下形式。

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_{0x}(\hat{x} \pm \mathrm{i}\,\hat{y})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz} \tag{3.5.36}$$

对于单色波，在时域就成为

$$\vec{E} = E_0\left[\hat{x}\cos(\omega t - kz) + \hat{y}\cos\left(\omega t - kz \pm \frac{\pi}{2}\right)\right] \tag{3.5.37}$$

这是两个圆极化波，取 $+\frac{\pi}{2}$时电场矢量沿逆时针方向旋转，取 $-\frac{\pi}{2}$时，电场矢量沿顺时针方向旋转。

磁场$\vec{H}$仍满足式（3.5.18），所以这种平面电磁波仍是 TEM 波。

由此我们看到，磁化等离子体中电磁场所满足的波动方程有两个沿外磁场方

向传播的平面波特解，它们是旋转方向相反的两个圆极化波。由于两个圆极化波的相速度不同，使得在传播过程中的合成波的极化方向也在旋转。所以，磁化等离子体也称为回旋电介质。

电磁波在回旋磁介质（如铁氧体）中的传播问题可以用类似的方法进行讨论，其中的平面电磁波也有极化方向旋转效应。

第 4 章　平面分层媒质中的电磁场[57]

平面分层媒质作为一种物理结构模型有很多实际意义，可作为地球和电离层的简化模型，也可与印刷电路的某些结构有关。作为电磁边值问题，由于可简化为二维求解，可使求解方法和过程得以简化，这有利于在由浅入深、由简到难的学习过程中逐步全面地掌握电磁问题的主要分析方法。而且，由于问题比较简明单纯，也使得掌握复杂电磁过程和新的物理概念比较容易。这些正是选择本章内容时所考虑的主要问题。

4.1　均匀填充平行板波导

平行板波导虽然不是实用的导波系统，但其中所发生的电磁过程却能反映一般传输系统的主要特性。从处理问题的数学方法方面看，也能较全面地反映解决类似电磁问题的主要方法和技巧。所以，由此入手讨论问题是比较理想的。

4.1.1　平行板波导中的自然电磁模式

平行板波导及坐标选择见图 4－1，它由相互平行的两块无限大金属平板构成，中间为均匀媒质，其特性由 ε、μ 表示，且均为常数。假设激发场的源只有电型的，其分布与 y 无关。由于系统结构及场源均与 y 无关，则系统中的场也将与 y 无关，成为一个二维电磁场问题。在频域支配该系统中电磁场的方程如下所示。

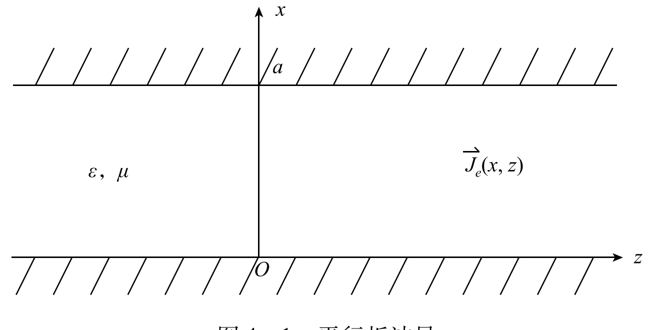


图 4－1　平行板波导

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{\rho}) = -\mathrm{i}\omega\mu \vec{H}(\vec{\rho}) \tag{4.1.1}$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{\rho}) = \mathrm{i}\omega\varepsilon \vec{E}(\vec{\rho}) + \vec{J}_e(\vec{\rho}) \tag{4.1.2}$$

其中，$\vec{\rho}=\hat{x}x+\hat{y}y$。在直角坐标系中，考虑到，$\dfrac{\partial}{\partial y}=0$，以上方程可展开为

$$\frac{\partial E_y}{az} = \mathrm{i}\omega\mu H_x \tag{4.1.3}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mathrm{i}\omega\mu H_z \tag{4.1.4}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \mathrm{i}\omega\varepsilon E_y + J_{ey} \tag{4.1.5}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\mathrm{i}\omega\varepsilon E_x - J_{ex} \tag{4.1.6}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \mathrm{i}\omega\varepsilon E_z + J_{ez} \tag{4.1.7}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mathrm{i}\omega\mu H_y \tag{4.1.8}$$

显然，该系统中的电磁场可分为完全独立的两组，式（4.1.3）~（4.1.5）一组所表示的电磁场对 z 坐标为横电（纵磁）模式，记作 TE^z（H），而方程（4.1.6）~（4.1.8）一组表示的是对 z 坐标的横磁（纵电）模式，记作 TM^z（E）。系统中被激发什么模式要看源的设置。显然，$\vec{J}_e$ 若只有 y 方向分量，就只会激发 TE^z 模式。

容易导出，TE^z 模的电场 E_y 满足微分算子方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k^2\right)E_y=\mathrm{i}\omega\mu J_{ey} \tag{4.1.9}$$

求得 E_y 后，H_x 和 H_z 就可由方程（4.1.3）和（4.1.4）求出。为了确定 E_y，除了控制方程（4.1.9）外还需必要的定解条件。由于解域在 $\pm z$ 方向趋于无穷远，为使所求电磁场满足能量有限原理，即要求

$$\lim_{z\to\pm\infty} E_y(x,z) = 0 \tag{4.1.10}$$

这样可保证 $E_y(x, z)$ 属于平方可积函数空间。

为了简化，假设构成平行板波导的金属为理想导体，则 E_y 又须满足边界条件

$$E_y(0,z) = E_y(a,z) = 0 \tag{4.1.11}$$

如果定义

$$\Omega \equiv \{x \in (0,a),\quad z \in (-\infty,\infty)\}$$

则 $E_y \in L^2(\Omega)$，$L^2(\Omega)$ 为希尔伯特空间 H。

于是构成方程（4.1.9）的算子为

$$L = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k^2\right) \tag{4.1.12}$$

其定义域为

$$D(L) = \{E_y : E_y, LE_y \in L^2(\Omega), E_y(0,z) = E_y(a,z) = 0,$$

$$\lim_{z\to\pm\infty} E_y(x,z) = 0\} \tag{4.1.13}$$

容易证明，当 k^2 为实数时，L 为一自伴标量亥姆霍兹算子。

现在我们考虑没有外源存在的情况下，系统中可能存在的与 y 无关的电磁模式。对 TE^z 而言这些模式决定于算子方程

$$LE_y(x,z) = 0 \tag{4.1.14}$$

外源 $J_{ey}(x, z)$ 的作用只是通过方程（4.1.9）决定这些模式的幅度。我们称无外源情况下可能存在的电磁模式为自然波导模式。

求解算子方程（4.1.14）的常用方法是分离变量法，为此设

$$E_y(x,z) = E_y(x)E_y(z) \tag{4.1.15}$$

代入方程（4.1.14）后即可得到

$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - k_x^2\right)E_y(x) = 0 \tag{4.1.16}$$

$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} - k_z^2\right)E_y(z) = 0 \tag{4.1.17}$$

并且分别满足条件

$$E_y(x=0) = E_y(x=a) = 0 \tag{4.1.18}$$

$$\lim_{z\to\pm\infty} E_y(z) = 0 \tag{4.1.19}$$

其中，$k_x^2 + k_y^2 = k^2$。

作为一维标准边值问题 $\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \lambda\right)E_y(x) = 0$ 的解是熟知的。即有

$$k_x^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \tag{4.1.20}$$

对应的归一化电场解为

$$E_y(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x \tag{4.1.21}$$

对于广义边值问题，式（4.1.17）和（4.1.19）可取解的形式为

$$E_y(z) = A\mathrm{e}^{-k_z z} + B\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z} \tag{4.1.22}$$

为了确定，我们假设 $\mathrm{Im}(k_z) < 0$。当 $z > 0$。为了满足条件（4.1.19）应在式（4.1.22）中取 $B = 0$，即 $E_y(z) = A\mathrm{e}^{-k_z z}$；当 $z < 0$ 时，应取 $A = 0$，即 $E_y(z) = B\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}$。总起来可以把广义边值问题的解表示成

$$E_y(z) = C\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}k_z z} \in L^2(-\infty, \infty) \tag{4.1.23}$$

当 $z > 0$ 时取负号，当 $z < 0$ 时取正号，其中 C 为任意常数。k_z 的值由关系 $k_x^2 + k_z^2 = k^2$ 决定，即

$$k_z = k_{z,n} = \left[k^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{4.1.24}$$

根据式（4.1.15），方程（4.1.14）的解，即 TE^z 中的 $E_y(x, z)$ 可以表示为

$$E_y(x,z) = C\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\sqrt{k^2-(n\pi/a)^2}z} \tag{4.1.25}$$

类似地，TM^z 中的 $H_y(x,\ z)$ 满足方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)H_y\ (x,\ z) = -\frac{\partial J_{ex}}{\partial z}+\frac{\partial J_{ez}}{\partial x} \tag{4.1.26}$$

为了求得自然波导 TM^z 模只需求解方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)H_y(x,z) = 0 \tag{4.1.27}$$

定解条件为

$$\frac{\partial H_y(0,z)}{\partial x} = \frac{\partial H_y(a,z)}{\partial x} = 0,\quad \lim_{z\to\pm\infty}H_y(x,z) = 0 \tag{4.1.28}$$

利用完全类似的方法可以求得

$$H_y(x,z) = C\sqrt{\frac{\varepsilon_n}{a}}\cos\frac{n\pi}{a}x\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\sqrt{k^2-(n\pi/a)^2}z} \tag{4.1.29}$$

其中，ε_n 为 Neumann 数。

对于无耗媒质，$k^2=\omega^2\varepsilon\mu\in R$，当 $k^2>\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ 时，考虑到与时间的关系 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，式（4.1.25）和（4.1.29）表示无衰减沿 z 相反两方向传播的电磁波。因此，这种场解不属于 $L^2(\Omega^\pm)$，其中 $\Omega^\pm=\{(x,\ z):\ x\in(0,\ a),\ z\in(0,\ \pm\infty)\}$，即不符合解的要求。为了解决这一矛盾，可先假定媒质存在微小损耗，然后再让损耗趋于零。这样，仍然可把场解归入 $L^2(\Omega^\pm)$。

当 $n=1,\ 2,\ \cdots$时，式（4.1.25）和（4.1.29）代表第 n 个自然波导模式。当 $k^2>\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ 时，表示沿 $\pm z$ 方向传播的波导模式，沿 x 方向为驻波分布。其传播的相位常数 β_n 为频率的函数，即

$$\beta_n(\omega) = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \tag{4.1.30}$$

由此知，TE^z 和 TM^z 传播的自然波导模式是一种色散波，其相速度是频率的函数。

当 $k^2<\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ 时，上述模式成为沿 $\pm z$ 方向的消失波，其衰减因子 α_n 为

$$\alpha_n(\omega) = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2-k^2} \tag{4.1.31}$$

由传输模到消失模的转换频率称为截止频率，其值为

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\left(\frac{n\pi}{a}\right) \tag{4.1.32}$$

当 $n=0$ 时，TE^z 模消失，TM^z 模中只保留 H_y 和 E_x，这一点可从式（4.1.29）、（4.1.6）及（4.1.7）看出。这时的电场和磁场都与传播方向正交，

故称为 TEM 波，这是一种无截止频率的非色散波，是平行板波导中的第三种自然波导模式。

4.1.2　平行板波导的本征函数及其与自然波导模的关系

如果我们用 $u(x,\ z)$ 既表示 E_y 也表示 H_y，则可把方程（4.1.9）和（4.1.26）统一表示为

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)u(x,z)=f(x,z) \tag{4.1.33}$$

其中，$f(x,\ z)$ 代表两方程的非齐次部分。现在研究平行板结构的本征值问题。如果定义

$$\Omega=\{(x,z):x\in[0,a],z\in(-\infty,\infty)\}$$

则可统一定义算子 L：$L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$，且

$$L=-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)$$

$$D(L)=\{u,u,Lu\in L^2(\Omega),B(u)=0,\lim_{z\to\pm\infty}u(x,z)=0\} \tag{4.1.34}$$

对于 $E_y(x,\ z)$，$B(u)=u(0,\ z)=u(a,\ z)=0$，而对于 $H_y(x,\ z)$ 有

$$B(u)=\frac{\partial u(0,z)}{\partial x}=\frac{\partial u(a,z)}{\partial x}=0$$

这样的算子构成以下二维本征值问题。

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)u_{n,\nu}(x,z)=\lambda_{n,\nu}u_{n,\nu}(x,z) \tag{4.1.35}$$

加上适当的定解条件，其中 n 对应 x 坐标，ν 对应 z 坐标。

求解方程（4.1.35）仍采用分离变量法，即设 $u_{n,\nu}(x,\ z)=u_{x,n}(x)u_{z,\nu}(z)$，于是得到

$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-\lambda_{x,n}\right)u_{x,n}(x)=0 \tag{4.1.36}$$

$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}-\lambda_{z,\nu}\right)u_{z,\nu}(z)=0 \tag{4.1.37}$$

其中

$$\lambda_{x,n}+\lambda_{z,\nu}-k^2=\lambda_{n,\nu} \tag{4.1.38}$$

我们在前面已经在同样的条件下求解过这两个本征方程。对于 x 坐标的结果如下。

对 TE^z 模有

$$u_{x,n}^h(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x$$

$$\lambda_{x,n}^h=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \tag{4.1.39}$$

对 TM^z 模有

$$u_{x,n}^{e}(x) = \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{a}}\cos\frac{n\pi}{a}x$$
$$\lambda_{x,n}^{e} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 = \lambda_{x,n}^{H} \tag{4.1.40}$$

对于 z 坐标，两种模式的场 E_y 和 H_y 满足相同的方程和同样的极限条件。根据前面的结果，归一化后的本征函数和本征值可以表示为

$$u_{z,\nu}^{h,e}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu z}$$
$$\lambda_{z,\nu} = \nu^2, \quad \nu \in (-\infty, \infty) \tag{4.1.41}$$

这样，作为二维本征值问题的方程（4.1.35）的解就可表示成

$$u_{n,\nu}^{h}(x,z,\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu z} \tag{4.1.42}$$

$$u_{n,\nu}^{e}(x,z,\nu) = \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{2\pi a}}\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu z} \tag{4.1.43}$$

$$\lambda_{n,\nu} = \nu^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - k^2 \tag{4.1.44}$$

根据自伴算子本征函数的正交性，我们有

$$\langle u_{n,\nu}^{h,e}, u_{m,p}^{h,e}\rangle = \delta_{n,m}\delta(\nu - p) \tag{4.1.45}$$

把方程（4.1.14）和（4.1.27）与式（4.1.35）对比可以发现，前两个方程对应于式（4.1.35）中 $\lambda_{n,\nu}=0$ 的情况。这说明自然波导模是算子 L 的零空间中本征函数。由式（4.1.44）可知，自然波导模的传输常数与 z 方向连续本征值的关系为

$$\nu^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - k^2 = 0 \text{ 或 } \nu = \pm\sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \tag{4.1.46}$$

也就是说，自然波导模的传输常数只是连续本征值中的一些离散点。

自然波导模由传输模到消失模的截止点为 $k^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$，它对应 $\nu=0$。显然，这时的自然波导模式仍属于本征函数。但是，当 $k^2 < \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ 时变为消失模，不再被认为是算子 L 的本征函数，因为在 R 上是无界的。这样一来就出现了很有意思的结果，尽管消失模在物理上真实存在也有很重要的意义，但纯谱理论却不涉及它们。不过，消失模还是可以从 ν 平面上用解析连续从谱本征函数中获得[57]。

4.1.3　平行板结构的格林函数和源产生的电磁场

作为以上所设定的二维问题，为了决定特定源在平行板结构中所产生的场需要求解非齐次算子方程。由方程（4.1.3）~（4.1.8）可以看出，不同类型的源，产生不同类型的波型（模式）。对于 $\mathrm{TE}^z(H)$ 模和 $\mathrm{TM}^z(E)$ 模两种类型的源所产生的场，由方程（4.1.33）及其相应的定解条件决定。

如果用格林函数方法求解算子方程（4.1.33）则所要求的格林函数应满足方程

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)g(x,z,x',z') = \delta(x-x')\delta(z-z') \tag{4.1.47}$$

及其相应的边界条件。

这是个二维格林函数方程，由于在不同坐标方向上满足不同的边界条件，不能用普通的方法直接求解，我们得采用部分本征函数展开法。由于在 x 方向前面所求得的本征函数（4.1.39）和（4.1.40）构成 $L^2(0,\ a)$ 空间的正交归一基函数，作为 x 的函数可把格林函数表示为

$$g(x,z,x',z') = \sum_n a_n(z,x',z',n)u_{x,n}(x) \tag{4.1.48}$$

其中，$u_{x,n}(x)$ 代表 $u_{x,n}^H$ 和 $u_{x,n}^E$ 的任何一种。

把式（4.1.48）代入方程（4.1.47）即有

$$-\left(\sum_n a_n\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_{x,n}+\sum_n u_{x,n}\frac{\partial^2}{\partial z^2}a_n+k^2\sum_n a_n u_{x,n}\right) = \delta(x-x')\delta(z-z')$$

再用 $u_{x,n}(x)$ 对上式两侧求内积又可得

$$-\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\left(k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right)\right]a_n(z,x',z',n) = u_{x,n}^*(x')\delta(z-z') \tag{4.1.49}$$

假设

$$g_z(z,x',z',n) = \frac{a_n(z,x,z',n)}{u_{n,x}^*(x')}$$

则作为一维格林函数方程与方程（3.2.3）相同，而且有相同的定解条件，立刻可以写出它的解

$$g_z(z,x',z',n) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}|z-z'|}}{2\mathrm{i}\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}} \tag{4.1.50}$$

它对于两种模式是一样的。由此得到 a_n

$$a_n(z,x',z',n) = u_{x,n}(x')\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}|z-z'|}}{2\mathrm{i}\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}} \tag{4.1.51}$$

把式（4.1.50）代回式（4.1.48）并代入相应模式的 $u_{x,n}(x)$ 就得到对应模式的二维格林函数

$$g^h(x,z,x',z') = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{i}a}\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{a}x' \cdot\frac{1}{\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}|z-z'|} \tag{4.1.52}$$

$$g^e(x,z,x',z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2\mathrm{i}a} \cos\frac{n\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{a}x' \cdot \frac{1}{\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{k^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}|z-z'|} \tag{4.1.53}$$

这个求解过程也可以换个顺序进行，即先把格林函数用 z 方向的本征函数展开，然后再求 g_x。因为 z 方向的本征函数和本征值由式（4.1.40）表示，本征值为连续的，故展开式表示为

$$g(x,z,x',z') = \int_{\nu} a(x,x',z',\nu)u_{z,\nu}(z)\mathrm{d}\nu \tag{4.1.54}$$

把该式代入方程（4.1.47）然后用 $u^*_{z,\nu}$做内积即有

$$\left[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+(\nu^2-k^2)a(x,x',z',\nu)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu z'}\delta(x-x')$$

若令

$$g_x(x,x',z',\nu) = \sqrt{2\pi}\frac{a(x,x',z',\nu)}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu z'}} \tag{4.1.55}$$

则得关于 g_x 的方程

$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\gamma^2\right)g_x(x,x',z',\nu) = \delta(x-x') \tag{4.1.56}$$

其中，$\gamma^2=\nu^2-k^2$。

以下我们需要分两种情况进行讨论。对 TE^z 模而言应满足边界条件

$$g_x^h(0,x',\gamma) = g_x^h(a,x',\gamma) = 0$$

为此，g_x^h 可取以下形式

$$g_x^h(x,x',\gamma) = \begin{cases} A(x')\sinh\gamma x + B(x')\cosh\gamma x, & x > x' \\ C(x')\sinh\gamma x + D(x')\cosh\gamma x, & x < x' \end{cases} \tag{4.1.57}$$

这里有四个待定系数。为确定这四个系数，除了上述边界条件外，还须考虑连续性条件（2.4.40）和阶跃条件（2.4.42）。四个系数确定后，g_x^h 可表示为

$$g^h(x,x',\gamma) = \frac{\sinh(a-x_>)\sinh\gamma x_<}{\gamma\sinh\gamma a} \tag{4.1.58}$$

其中，$x_>$和 $x_<$分别表示数对（x，x'）中较大者和较小者。例如，若 $x>x'$，则 $x_>=x$ 和 $x_<=x'$。

对于 TM^z 模，g_x^e 应满足的边界条件变为

$$\frac{\partial g_x^e(0,x',\gamma)}{\partial x} = \frac{\partial g_x^e(a,x',\gamma)}{\partial x} = 0$$

由此得到

$$g_x^e(x,x',\gamma) = -\frac{\cosh\gamma(a-x_>)\cosh\gamma x_<}{\gamma\sinh\gamma a} \tag{4.1.59}$$

于是，相应的二维格林函数便是

$$g^h(x,z,x',z') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh\gamma(a - x_>)\sinh\gamma x_<}{\gamma\sinh\gamma a} e^{i\nu(z-z')} d\nu \tag{4.1.60}$$

$$g^e(x,z,x',z') = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh\gamma(a - x_>)\cosh\gamma x_<}{\gamma\sinh\gamma a} e^{i\nu(z-z')} d\nu \tag{4.1.61}$$

两种方法所得结果根据唯一性应该是等价的。

把式（4.1.52）和（4.1.53）与式（4.1.25）和（4.1.29）比较可知，这里的格林函数是波导模的展开，不如说是纯本征函数的展开。式（4.1.60）和（4.1.61）形式的格林函数则由全部可能的沿 z 传输的平面波展开，且纵向本征函数调整。当然，以上两种形式的格林函数是等价的。

格林函数求出后，就可进一步求出实际场源所产生的场，也就是求得相应非齐次方程的解。由于现在是边值问题，不能直接引用无界问题的结论。

我们已把 E_y 和 H_y 满足的非齐次算子方程表示为由式（4.1.33）所表示的形式，而相应的格林函数 g^e 和 g^h 所满足的方程统一表示为式（4.1.47）所给出的形式。作为二维函数，u 和 g 可用二维标量格林第二类恒等式表示出它们之间的积分关系。

$$\int_\Omega [u\nabla^2 g - g\nabla^2 u] ds = \oint_L [g\nabla u - u\nabla g]\cdot \vec{n} dl \tag{4.1.62}$$

利用式（4.1.33）和（4.1.47）由上式又可得

$$u(\vec{\rho}') = \int g(\vec{\rho},\vec{\rho}')f(\vec{\rho}) ds - \oint_L [g(\vec{\rho},\vec{\rho}')\nabla u(\vec{\rho}) - u(\vec{\rho})\nabla g(\vec{\rho},\vec{\rho}')]\cdot\vec{n} dl \tag{4.1.63}$$

其中，Ω 为平行板波导的任一 $x-z$ 横截面；L 为其边界，L 的一部分为理想导体，一部分为无穷远边界。根据在这两部分边界上 E_y，g^e 和 H_y，g^h 所满足的条件不难发现，在 L 上的积分将消失。再考虑到场源的支撑集假定为紧的，且用 Ω_S 表示，则由式（4.1.63）便得到

$$u(\vec{\rho}) = \int_{\Omega_S} g(\vec{\rho},\vec{\rho}')f(\vec{\rho}') ds' \tag{4.1.64}$$

在该式中已把 $\vec{\rho}$ 和 $\vec{\rho}'$ 作了对换，而且用到了

$$g(\vec{\rho},\vec{\rho}') = g(\vec{\rho}',\vec{\rho})$$

在式（4.1.64）中代入 g^E 或 g^H 及相应的电流源，就得到了 $E_y(\vec{\rho})$ 或 $H_y(\vec{\rho})$ 的积分表达式。

4.2　接地介质层

无限大理想导体上面存在分层介质，是地球表面的一种简化的理想物理模型，也是由介质和导体构成的一些导波系统的简单模拟。在这一结构中发生的一

些电磁现象有着非常广泛而重要的意义。处理问题的数学方法也在上一节的基础上有所发展。

4.2.1　接地介质层结构的本征函数

在上一节对平行板波导的分析中我们已看到，导波系统的自然波导模式只是相应算子零空间中的一部分本征函数。所以，本征函数在求解电磁场问题中具有更重要的意义，对接地介质层系统的分析就从求解本征函数开始。

我们考虑的结构由图 4－2 给出。该系统在无限大平面理想导电体上面覆盖了由无限大交界平面分开的两种媒质，上层媒质沿伸到无限远。如果我们仍保持上节对系统中电磁场及场源的与 y 无关的基本假设，则仍可作为一个二维电磁场问题进行分析。区别主要在于现在媒质的电磁参数对整个系统而言是 x 的函数，而且在 x 方向沿伸至无穷远。

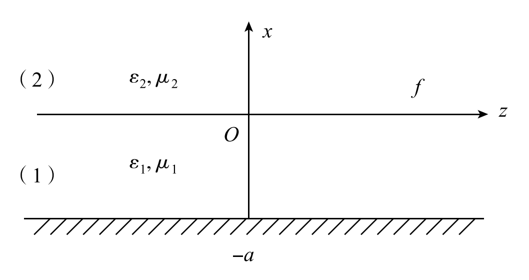


图 4－2　接地介质层

尽管如此，系统中的电磁场仍可分为两种基本模式，即 $TE^z(H)$ 模和 $TM^z(E)$ 模。如果我们仍用 $u(x,z)$ 表示 E_y 和 H_y，则仍可由方程（4.1.3）~（4.1.8）导出 $u(x,z)$ 所满足的算子方程

$$-\left(s\frac{\partial}{\partial x}s^{-1}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2(x)\right)u(x,z)=f(x,z) \tag{4.2.1}$$

其中，$k^2(x)=\omega^2\varepsilon(x)\mu(x)$。对于 $TE^z(H)$ 模，$u(x,z)=E_y(x,z)$，$s=\mu(x)$，$f=-\mathrm{i}\omega\mu J_{ey}$；对于 $TM^z(E)$ 模，$u(x,z)=H_y(x,z)$，$s=\varepsilon(x)$，$f=\dfrac{\partial J_{ex}}{\partial z}-\dfrac{\partial J_{ez}}{\partial x}$。在无穷远处我们要求

$$\lim_{z\to\pm\infty}u(x,z)=0 \tag{4.2.2}$$

$$\lim_{x\to\infty}u(x,z)=0 \tag{4.2.3}$$

而在 $x=-a$ 处分别有

$$TE^z\text{ 模：}u(-a,z)=0 \tag{4.2.4}$$

$$TM^z\text{ 模：}\frac{\partial u(-a,z)}{\partial x}=0 \tag{4.2.5}$$

如果定义 $\Omega=\{(x,z):x\in(-a,\infty),z\in(-\infty,\infty)\}$，则所给条件保证 $u(x,z)\in L^2(\Omega)$。定义算子 L：$L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$，其中

$$L = -\left(s\frac{\partial}{\partial x}s^{-1}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2(x)\right) \tag{4.2.6}$$

$$D(L) = \{u:u,Lu \in L^2(\Omega),B(a) = 0,\lim_{z\to\pm\infty} u = 0,\lim_{x\to\infty} u = 0\} \tag{4.2.7}$$

其中，对 TE^z 模，$B(u)=0$ 为式（4.2.4）；对 TM^z 模，$B(u)=0$ 为式（4.2.5）。

为了求得算子 L 的本征函数，我们考虑本征函数所满足的方程

$$-\left(s\frac{\partial}{\partial x}s^{-1}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2(x)\right)u_{\alpha,\beta}(x,z) = \lambda_{\alpha,\beta}u_{\alpha,\beta}(x,z) \tag{4.2.8}$$

其中，α 用以表示坐标方向；β 表示本征值类型。仍采用通常的方法，设 $u_{\alpha,\beta}(x,z)=u_{x,\beta}(x)u_{z,\beta}(z)$，则导致相应的方程

$$\left[-s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}s^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-(k^2(x)+\lambda_x)\right]u_{x,\beta}(x) = 0 \tag{4.2.9}$$

$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}-\lambda_z\right)u_{z,\beta} = 0 \tag{4.2.10}$$

而且

$$\lambda_x + \lambda_z = \lambda_{\alpha,\beta} \tag{4.2.11}$$

对于方程（4.2.10）及其相应的条件

$$\lim_{z\to\pm\infty} u_{z,\beta}(z) = 0$$

这个本征值问题我们已知其解为

$$u_{z,\beta}(z) = u_{z,\nu}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu z}$$

$$\lambda_z(\nu) = \nu^2,\quad \nu \in (-\infty,\infty)$$

它构成空间 $L^2(-\infty,\infty)$ 的归一化正交基。

方程（4.2.9）及其相应的条件

$$\lim_{x\to 0} u_{x,\beta}(x) = 0 \tag{4.2.12}$$

$$u_{x,\beta}(-a) = 0 \text{ 或 } \frac{\partial u_{x,\beta}(-a)}{\partial x} = 0 \tag{4.2.13}$$

构成一个斯特姆－刘维尔型的本征值问题，但有其一定的特殊性。

首先，如果媒质是有耗的，则对应的 p、q 和 w 就不再是实的，于是相应的算子就不是自伴的。但如果损耗很小，只要能满足极限条件（4.2.12），则仍可认为是自伴的。其次，由于媒质是分层的，这些参数不再是连续的。这个问题可通过分区求解来解决，在每一区域内它们都是连续的。区域 1 为 $-a\leqslant x\leqslant 0$，区域 2 为 $0\leqslant x<\infty$。与上一节不同的是，该系统在 x 方向的本征值既有分立部分又有连续部分，即既有标准本征函数，又有广义本征函数。为了方便，分 TE^z(H) 模和 TM^z(E) 模两种情况分别进行讨论。

对于 TE^z 模和 TM^z 模，两个区域的 $u_{x,\beta}(x)$ 分别满足同样形式的方程

$$\left[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-(k_1^2+\lambda_x)\right]u^1_{x,\beta}(x) = 0 \tag{4.2.14}$$

$$\left[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-(k_2^2+\lambda_x)\right]u_{x,\beta}^2=0 \tag{4.2.15}$$

其中，角标 1 和 2 分别表示区域 1 和区域 2，而且 $k_1^2=\omega^2\varepsilon_1\mu_1$，$k_2^2=\omega^2\varepsilon_2\mu_2$。$u_{x,\beta}^1$ 和 $u_{x,\beta}^2$ 除了必须满足相应的边界条件外，还要在连接边界 $x=0$ 处满足连续性条件。

对于 TE^z 模，$u_{x,\beta}$ 代表 E_y，对 $x=0$ 的分界面，E_y 为切向分量，根据电场切向分量连续的要求，我们可以得到一个连续性条件

$$u_{x,\beta}^1(x)-u_{x,\beta}^2(x)\Big|_{x=0}=0 \tag{4.2.16}$$

在 $x=0$ 平面磁场的切向分量为 H_z。由于在 TE^z 模中

$$-\mathrm{i}\omega\mu H_z=\frac{\partial E_y}{\partial x}$$

故知，由磁场切向分量的连续性又可得到另一个连续性条件

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{\mathrm{d}u_{x,\beta}^1(x)}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{\mu_2}\frac{\mathrm{d}u_{x,\beta}^2(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=0 \tag{4.2.17}$$

如果令 $\gamma_j=k_j^2+\lambda_x$，$j=1$，2，则为了确定系数的方便，我们把 TE^z 模的分立谱表示成如下的形式。

$$\begin{aligned} u_{x,\beta}^1(x) &= A\sin[\sqrt{\gamma_1}(x+a)]+B\cos[\sqrt{\gamma_1}(x+a)] \\ u_{x,\beta}^2(x) &= C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}x}+D\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}x} \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

它们显然分别满足式（4.2.14）和（4.2.15）。为了满足边界条件（4.2.13），即 $u_{x,\beta}^1(-a)=0$，必须有 $B=0$。如果假定 $\mathrm{Im}\sqrt{\gamma_2}<0$，为使 $u_{x,\beta}^2(x)\in L^2(0,\infty)$，需满足条件（4.2.12），即 $\lim\limits_{x\to\infty}u_{x,\beta}^2(x)=0$，这导致 $D=0$。

利用连续条件（4.2.16）和（4.2.17）我们又得到

$$A=\frac{C}{\sin\sqrt{\gamma_1}a}$$

$$A=-C\mathrm{i}\frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}}\frac{1}{\cos\sqrt{\gamma_1}a}$$

因此有

$$\cot\sqrt{\gamma_1}a=-\mathrm{i}\frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}} \tag{4.2.19}$$

该式称为 TE^z 模的色散方程。

由以上系数关系，我们就可得到 TE^z 模的分立本征函数，用 n 代替 β 就可得

$$u_{x,n}^1(x)=C_n\frac{\sin[\sqrt{\gamma_1}(x+a)]}{\sin\sqrt{\gamma_1}a},\quad -a<x<0 \tag{4.2.20}$$

$$u_{x,n}^2(x)=C_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}x},x>0 \tag{4.2.21}$$

离散本征值记作 $\lambda_{x,n}$ 且有关系 $\gamma_j = k_j^2 + \lambda_{x,n}$，并通过方程（4.2.19）求出。由于在无限小损耗的条件下，方程（4.2.9）系自伴本征值问题，故 $\lambda_{x,n}$ 必须是实的，且 $k_j^2 \in R$。这样从已有关系中得知，$\gamma_j > 0$ 或 $\gamma_j < 0$。如果 $\gamma_{1,2}$ 二者都是实的且是正的，则方程（4.2.19）无解。因此，γ_1 与 γ_2 两者之一或二者同时必须为负的。如果进一步假定 $\varepsilon_1\mu_1 > \varepsilon_2\mu_2$，则当 $-k_1^2 < \lambda_{x,n} < -k_2^2$ 时有 $\gamma_1 > 0$ 和 $\gamma_2 < 0$，而当 $\lambda_{x,n} < -k_1^2$，则 γ_1，$\gamma_2 < 0$。不过，在 $\text{Im}\sqrt{\gamma_2} < 0$ 时，这后一种情况是不可能的，因为方程（4.2.19）的左侧和右侧是实的，但带有不同的符号，这样一来方程（4.2.19）就无解。所以，如果方程（4.2.19）有解，必须 $\gamma_2 < 0$ 和 $\gamma_1 > 0$，于是

$$-k_1^2 < \lambda_{x,n} < -k_2^2 \tag{4.2.22}$$

令 $\sqrt{\gamma_2} = -\mathrm{i}\sqrt{-k_2^2 - \lambda_{x,n}} = -\mathrm{i}\alpha$，则根据关系（4.2.22）可知 $\alpha > 0$，于是

$$u_{x,n}^2(x) = C_n \mathrm{e}^{-\alpha x}$$

这说明，$u_{x,n}^2$ 沿 x 方向，在 $x > 0$ 区域有幅度的指数衰减特性。为了确定 C_n，我们利用本征函数的正交特性，并归一化为

$$\langle u_{x,n}, u_{x,n} \rangle = 1$$

于是有

$$C_n^2 \left\{ \int_{-a}^{0} \left[\frac{\sin(\sqrt{\gamma_1}(x+a))}{\sin\sqrt{\gamma_1}a} \right] \frac{1}{\mu_1} \mathrm{d}x + \int_0^{\infty} (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}x})^2 \frac{1}{\mu_2} \mathrm{d}x \right\} = 1$$

由此可得

$$C_n^2 = \frac{2\mu_2}{\dfrac{\mu_2}{\mu_1} \dfrac{a}{\sin^2\sqrt{\gamma_1}a} + \mathrm{i}\dfrac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1\sqrt{\gamma_2}}} \tag{4.2.23}$$

下面再考虑 TE^z 模的广义本征函数，这时本征值是连续的，将用 v 表示。考虑到广义本征函数并不一定要求属于 $L^2(0, \infty)$，则本征方程可以取以下广义本征函数解。

$$u_{x,v}^1(x, \lambda_x) = A\sin[\sqrt{\gamma_1}(x+a)] + B\cos[\sqrt{\gamma_1}(x+a)]$$

$$u_{x,v}^2(x, \lambda_x) = C\sin\sqrt{\gamma_2}x + D\cos\sqrt{\gamma_2}x \tag{4.2.24}$$

利用前面给出的边界条件和连续性条件可知 $B = 0$ 和

$$A = C\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\sqrt{\gamma_2}}{\sqrt{\gamma_1}}\frac{1}{\cos\sqrt{\gamma_1}a}$$

$$D = C\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\sqrt{\gamma_2}}{\sqrt{\gamma_1}}\frac{1}{\tan\sqrt{\gamma_1}a}$$

于是 TE^z 的广义本征函数又可表示成

$$u_{x,v}^1(x, \lambda_x) = D_v \frac{\sin[\sqrt{\gamma_1}(x+a)]}{\sin\sqrt{\gamma_1}a}, \quad -a < x < 0$$

$$u_{x,v}^{2}(x,\lambda_x) = D_v\left[\cos\sqrt{\gamma_2}\ x + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_2}}\cot\sqrt{\gamma_1}\ a\right)\sin\sqrt{\gamma_2}\ x\right],\quad x > 0 \tag{4.2.25}$$

下面我们将看到，作为连续本征值 $\lambda_x \in(-k_2^2,\ \infty)$，因此 $\gamma_{1,2} \geqslant 0$，于是 $u_{x,v}^{1,2}(x,\ \lambda_x)$ 为实值函数。

因为现在的问题是非自伴的，为决定 D_v 需要以下正交关系。

$$\langle u_{x,v}(x), u_{x,p}^{a}(x)\rangle = \int_{-a}^{\infty} u_{x,v}(x,v)\, u_{x,p}^{a}(x,p)^{*}\mu(x)^{-1}\mathrm{d}x = \delta(\boldsymbol{v} - p)$$

其中，u^a 为（4.2.9）伴随问题的解；$v = \sqrt{\gamma_2}$。由于 $u_{x,v}^{a}(x,v) = u_{x,v}(x,\boldsymbol{v})$，$\lambda_x^a = \lambda_x$，则 $p = \sqrt{\gamma_2^{*}}$。再考虑到上面分析的结果和利用关系

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin vx\sin px\,\mathrm{d}x = \delta(v - p)$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin vx\cos px\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\frac{v}{v^2 - p^2}$$

即可得

$$D_v = \left[\frac{\pi}{2}\frac{1}{\mu_2}\left(1 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_2}}\cot\sqrt{\gamma_1}a\right)^2\right)\right]^{-1/2} \tag{4.2.26}$$

到此我们可以给出式（4.2.6）所表示的二维微分算子 L 的本征函数和本征值对TE^z 模的表达形式。为了区分，对 TE^z 模我们加注 h 角标。

对于横向分立模我们有

$$u_{n,v}^{1h}(x,z,\boldsymbol{v}) = \frac{C_n}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin[\sqrt{\gamma_1}(x + a)]}{\sin\sqrt{\gamma_1}a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu z},\quad -a < x < 0$$

$$u_{n,\nu}^{2h}(x,z,\nu) = \frac{C_n}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}\ x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu z},\quad x > 0 \tag{4.2.27}$$

其中，$\gamma_j = k_j^2 + \lambda_{x,n}$，对应的本征值为

$$\lambda_{n,v} = \lambda_x + \lambda_z = \lambda_{x,n} + \nu^2,\quad \nu \in(-\infty,\infty) \tag{4.2.28}$$

$\lambda_{x,n}$为方程（4.2.19）的解，C_n 则由（4.2.23）给出。以上本征函数应满足正交归一关系

$$\langle u_{n,\nu}, u_{m,p}\rangle = \delta_{n,m}\delta(\nu - p) \tag{4.2.29}$$

对于横向广义本征函数我们有

$$u_{v,\nu}^{1h}(x,z,v,\nu) = \frac{D_v}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin[\sqrt{\gamma_1}(x + a)]}{\sin\sqrt{\gamma_1}a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu z},\quad -a < x < 0$$

$$u_{v,\nu}^{2h}(x,z,v,\nu) = \frac{D_v}{\sqrt{2\pi}}\left[\cos vx + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_2}}\cot\sqrt{\gamma_1}a\right)\sin\sqrt{\gamma_2}x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu z},\quad x > 0\right. \tag{4.2.30}$$

其中，$\gamma_j = k_j^2 + \lambda_x$，$j = 1,\ 2$，$\lambda_x \in\ (-k_2^2,\ \infty)$，$\lambda_{v,\nu} = \lambda_x + \lambda_z = \lambda_x + \nu^2$，因 $\nu =$

$\sqrt{\gamma^2}=k_2^2+\lambda_x$，所以有

$$\lambda_{v,\nu}=v^2+\nu^2-k_2^2,\quad v\in(0,\infty),\quad \nu\in(-\infty,\infty)\tag{4.2.31}$$

这种本征函数的正交归一化关系为

$$\langle u_{v,\nu},u_{p,g}\rangle=\delta(v-p)\delta(\nu-g)\tag{4.2.32}$$

对于 TM^z 模求解方程（4.2.15）和（4.2.16）时所需要的连续性条件可从 $\vec{H}$ 和 $\vec{E}$ 的连续性导出，它们是

$$u_{x,\beta}^1(x)-u_{x,\beta}^2(x)\Big|_{x=0}=0\tag{4.2.33}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\mathrm{d}u_{x,\beta}^1(x)}{\partial x}-\frac{1}{\varepsilon_2}\frac{\partial u_{x,\beta}^2(x)}{\partial x}\Big|_{x=0}=0\tag{4.2.34}$$

这里假设在 $x=0$ 面上不存在外源，因为本征问题不考虑源的作用。

用类似于解 TE^z 问题的方法可以求得 TM^z 问题的解，这里没必要再给出求解过程。其结果如下。

对分立本征问题有

$$u_{x,n}^1(x)=C_n\frac{\cos[\sqrt{\gamma_1}(x+a)]}{\cos\sqrt{\gamma_1}a},\quad -a<x<0$$

$$u_{x,n}^2(x)=C_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}\,x},\quad x>0\tag{4.2.35}$$

其中，$\gamma_j=k_j^2+\lambda_{x,n}$，$j=1$，2，并有色散方程

$$\tan\sqrt{\gamma_1}a=\mathrm{i}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{\sqrt{\gamma_2}}{\sqrt{\gamma_1}}\tag{4.2.36}$$

而且

$$-k_1^2<\lambda_{x,n}<-k_2^2\tag{4.2.37}$$

$$C_n^2=\frac{2\varepsilon_2}{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\dfrac{a}{\cos^2\sqrt{\gamma_1}a}+\mathrm{i}\dfrac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_1\sqrt{\gamma_2}}}\tag{4.2.38}$$

其连续本征值问题的解为

$$u_{x,v}^1(x,\lambda_x)=D_v\frac{\cos[\sqrt{\gamma_1}(x+a)]}{\cos\sqrt{\gamma_1}a},\quad -a<x<0$$

$$u_{x,v}^2(x,\lambda_x)=D_v\left[\cos\sqrt{\gamma_2}x-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_2}}\tan\sqrt{\gamma_1}a\sin\sqrt{\gamma_2}x\right],\quad x>0$$

$$\tag{4.2.39}$$

系数 D_v 为

$$D_v=\left[\frac{\pi}{2}\frac{1}{\varepsilon_2}\left(1+\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_2}}\tan\sqrt{\gamma_1}a\right)^2\right)\right]^{-1/2}\tag{4.2.40}$$

TM^z 模的二维本征函数可归纳如下。

对分立情况有

$$u_{n,\nu}^{1e}(x,z,\nu) = \frac{C_n}{\sqrt{2\pi}} \frac{\cos[\sqrt{\gamma_1}(x+a)]}{\cos\sqrt{\gamma_1}a} e^{i\nu z}, \quad -a < x < 0$$

$$u_{n,\nu}^{2e}(x,z,\nu) = \frac{C_n}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\sqrt{\gamma_2}x} e^{i\nu z}, \quad x > 0 \tag{4.2.41}$$

对连续情况有

$$u_{v,\nu}^{1e}(x,z,v,\nu) = \frac{D_v}{\sqrt{2\pi}} \frac{\cos[\sqrt{\gamma_1}(x+a)]}{\cos\sqrt{\gamma_1}a} e^{i\nu z}, \quad -a < x < 0$$

$$u_{v,\nu}^{2e}(x,z,v,\nu) = \frac{D_v}{\sqrt{2\pi}} \left[\cos vx - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_2}} \tan\sqrt{\gamma_1}a \sin vx\right] e^{i\nu z}, \quad x > 0$$

$$\tag{4.2.42}$$

相应的本征值 $\lambda_{\alpha,\beta}$ 及正交关系与 TE^z 的表示形式相同。

4.2.2　接地介质层中的自然波导模、表面波模、辐射模和漏模

在上一节我们已经指出，自然波导模满足的方程是（4.2.1）的齐次形式。若用 $\varphi(x,z)$ 代表 E_y 或 H_y，则自然波导模满足方程

$$-\left(s\frac{\partial}{\partial x}s^{-1}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2(x)\right)\varphi(x,z) = 0 \tag{4.2.43}$$

其中，$k^2 = \omega^2\varepsilon(x)\mu(x)$，仍然把解表示成两个单一坐标函数的乘积，$\varphi(x,z) = \varphi_x(x)\varphi_z(z)$，则分别满足方程

$$\left[-s\frac{d}{dx}s^{-1}\frac{d}{dx} - (k^2(x) + \lambda_x)\right]\varphi_x(x) = 0 \tag{4.2.44}$$

$$\left(-\frac{d^2}{dz^2} - \lambda_z\right)\varphi_z(z) = 0 \tag{4.2.45}$$

其中，$\lambda_x + \lambda_z = 0$，以及与本征函数相同的定解条件。

对方程（4.2.45）而言，由于与平行板波导的求解条件相同，故立即可得到与方程（4.1.17）同样形式的解

$$\varphi_z(z) = Ae^{\mp i\sqrt{\lambda_z}z} \tag{4.2.46}$$

这里仍假设 $\text{Im}\sqrt{\lambda_z} < 0$，$A$ 为任意常数。对于方程（4.2.44），由于与相应的本征值问题（4.2.9）完全一样，因此有相同的解和本征值特性。也就是说，对于分立本征值 $\lambda_{x,n}$，满足关系（4.2.22）。由于

$$\sqrt{\lambda_z} = \sqrt{\lambda_{z,n}} = \sqrt{-\lambda_x} = \sqrt{-\lambda_{x,n}}$$

则对于无耗媒质 $\sqrt{\lambda_z}$ 取正值。所以式（4.2.46）表示一个沿 z 单纯振荡的函数。为了使解属于 $L^2(\Omega)$，已假定存在极小损耗，以便满足 $z = \pm\infty$ 的极限条件。

根据以上分析，我们可以直接给出方程（4.2.43）对应分立本征值的自然波导模解，对 TE^z 和 TM^z 情况分别给出

$$\varphi_n^{1h}(x,z) = \frac{A \cdot C_n \sin[\sqrt{\gamma_1}(x+a)]}{\sin\sqrt{\gamma_1}a} e^{\mp i\sqrt{-\lambda_{x,n}}z}, \quad -a < x < 0$$

$$\varphi_n^{2h}(x,z) = A \cdot C_n e^{-i\sqrt{\gamma_2}x} e^{\mp i\sqrt{-\lambda_{x,n}}z}, \quad x > 0 \tag{4.2.47}$$

和

$$\varphi_n^{1e}(x,z) = A \cdot C_n \frac{\cos[\sqrt{\gamma_1}(x+a)]}{\cos\sqrt{\gamma_1}a} e^{\mp i\sqrt{-\lambda_{x,n}}z}, \quad -a < x < 0$$

$$\varphi_n^{2e}(x,z) = A \cdot C_n e^{-i\sqrt{\gamma_2}x} e^{\mp i\sqrt{-\lambda_{x,n}}z}, \quad x > 0 \tag{4.2.48}$$

其中，$\gamma_j = k_j^2 + \lambda_{x,n}$，$j=1$，2。

由于已假定 $k_1^2 \geqslant k_2^2$，而 $\gamma_2 = k_2^2 + \lambda_{x,n}$，则由条件（4.2.22）知，$\gamma_2$ 为纯负虚数。于是上面的结果表明，在 $x>0$ 区域自然波导模中的分立模部分场值沿 x 方向呈指数衰减状态。这种沿表面传播并在垂直表面方向指数衰减的波称为表面波。

相对于连续本征值的自然波导模解分别为

$$\varphi_v^{1h}(x,z) = A \cdot D_v \frac{\sin[\sqrt{\gamma_1}(x+a)]}{\sin\sqrt{\gamma_1}a} e^{\mp i\sqrt{-\lambda_{x,v}}z}, \quad -a < x < 0$$

$$\varphi_v^{2h}(x,z) = A \cdot D_v \left(\cos vx + \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\tan\sqrt{\gamma_1}a\sin vx\right) e^{\mp i\sqrt{-\lambda_{x,v}}z}, \quad x < 0$$

$$\tag{4.2.49}$$

以及

$$\varphi_v^{1e}(x,z) = A \cdot D_v \frac{\cos[\sqrt{\gamma_1}(x+a)]}{\cos\sqrt{\gamma_1}a} e^{\mp i\sqrt{-\lambda_{x,v}}z}, \quad -a < x < 0$$

$$\varphi_v^{2e}(x,z) = A \cdot D_v \left(\cos vx - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_2}}\cot\sqrt{\gamma_1}a\sin vx\right) e^{\mp i\sqrt{-\lambda_{x,v}}z}, \quad x > 0$$

$$\tag{4.2.50}$$

其中，$v = \sqrt{\gamma_2}$，$\lambda_{x,v} \in (-k_2^2, \infty)$。

分析解式在 x 方向的分布和在 z 方向的传播因子 $\sqrt{-\lambda_{x,v}}$ 可以了解对应连续本征值部分的自然波导模在该系统中的传输特性。由式（4.2.49）和（4.2.50）立刻可以看出，这些模式仍然保持驻波分布，即使在 $x\to\infty$ 时仍然保持有界，这一点与表面波有本质上的差别。在 z 方向的特性分为两种情况。当 $\lambda_{x,v} \in (-k_2^2, 0)$ 时与 z 的关系成为 $e^{\mp i\sqrt{|\lambda_{x,v}|}z}$，这表示沿 $\pm z$ 方向呈现无衰减的传输特性（当然是在无损耗的极限条件下）；而当 $\lambda_{x,v} \in (0, \infty)$ 时 $e^{\mp i\sqrt{-\lambda_{x,v}}z} = e^{\sqrt{\lambda_{x,v}}z}$（在得到解 $e^{\pm i\sqrt{\lambda_z}z}$ 时选择负号是由 $\mathrm{Im}\sqrt{\lambda_z}<0$ 的假定所决定的，暗含着一种物理选择，即舍去指数增长部分，此处也如此），这时沿 z 方向呈现指数衰减。这类在 x 方向为有界分布的自然波导模式称为辐射模。当 $\lambda_{x,v} \in (-k_2^2, 0)$ 时称为传播辐射模，当 $\lambda_{x,v} \in (0, \infty)$ 时称为消失辐射模。顺便指出，消失辐射模由于在 R 上无

界，不属于二维微分算子 L 的本征函数，尽管它属于 L 的零空间。

上面我们已讨论了方程（4.2.19）和（4.2.36）的实数解及其所对应的本征函数。这些方程还存在复数解 $\tilde{\lambda}_x$，它们虽然不是方程（4.2.9）的本征值，却有其物理意义。应用图解法可以得到，对于非常高的实值频率 ω，本征值 $\lambda_{x,n}$ 趋于 $-k_2^2$，而频率低时，$\lambda_{x,n}$ 则趋于 $-k_2^2$，对某个足够低的频率我们有 $\lambda_{x,n}=-k_2^2$ 从而 $\gamma_2=0$，这时对应的频率称为截止频率，并记作 ω_c，且对于 TM^z 模可表示为

$$\omega_c=\frac{n\pi}{a\sqrt{\varepsilon_1\mu_1-\varepsilon_2\mu_2}},\quad n=0,1,2,\cdots \tag{4.2.51}$$

对于 TE^z 模则用 $n+\dfrac{1}{2}$ 代替 n。

当频率进一步降低时本征值方程不再有实值解，复值 $\tilde{\lambda}_{x,n}$ 的存在由复 λ 平面的分析可知，它表示低于截止频率的实本征值 $\lambda_{x,n}$ 的解析连续，与 $\lambda_{x,n}$ 通过在 $\lambda_x=-k_2^2$ 处的分支点相联系，而位于黎曼面 $\mathrm{Im}(\sqrt{\lambda_x})>0$。由于

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}\,x}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{Re}(\sqrt{\gamma_2})x}\mathrm{e}^{\mathrm{Im}(\sqrt{\gamma_2})x}$$

可以看出这种模式的行为特点是沿垂直方向指数增加。我们把这种对应于 $\tilde{\lambda}_{x,n}$ 的模式称为漏模（leaky mode），这种模式的非物理行为被解释为在有限空间区域与辐射场相联系的物理波。对该问题比较详细的讨论见于文献[46，51]。

4.2.3　接地介质层的格林函数

由平行板波导中二维格林函数方程（4.1.46）的求解过程可以看到，当用部分本征函数展开法时仍需要求解相关的一维格林函数方程。

对于接地介质层结构二维格林函数满足以下算子方程。

$$\left(s\frac{\partial}{\partial x}s^{-1}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2(x)\right)g(x,z,x',z')=-s(x)\delta(x-x')\delta(z-z') \tag{4.2.52}$$

当用 x 坐标的本征函数 $u_{x,n}$ 和 $u_{x,v}$ 或 $u_{z,v}$ 展开二维格林函数时，分别导致求解 $g_z(z,z',\lambda_z)$ 和 $g_x(x,x',\lambda_x)$ 所满足的如下一维算子方程。

$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}-\lambda_z\right)g_z(z,z',\lambda_z)=\delta(z-z') \tag{4.2.53}$$

$$\left[-s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}s^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-(k^2(x)+\lambda_x)\right]g_x(x,x',\lambda_x)=s(x)\delta(x-x') \tag{4.2.54}$$

由于方程（4.2.53）与（3.2.3）相同，定解条件也一致，立即可以给出相应的格林函数

$$g_z(z,z',\lambda_z)=\frac{1}{2\mathrm{i}\sqrt{\lambda_z}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda_z}|z-z'|} \tag{4.2.55}$$

为了求解方程（4.2.54），仍把 x 方向分成两个区域，并假定源只存在于区

域 2 中，于是可以把式（4.2.54）改写为

$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-\gamma_j\right)g_x^j(x,x',\gamma_j)=\begin{cases}0, & j=1\\ s(x)\delta(x-x'), & j=2\end{cases} \tag{4.2.56}$$

其中，$\gamma_j=k_j^2+\lambda_x$，$j=1$，2。当 $x\neq x'$时方程的解可表示为

$$g_x^1(x,x',\gamma_1)=A\sin\sqrt{\gamma_1}(x+a)+B\cos\sqrt{\gamma_1}(x+a),\quad -a<x<0$$

$$g_x^2(x,x',\gamma_2)=C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}x}+D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}x},\quad 0<x<x'$$

$$g_x^2(x,x',\gamma_2)=E\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}x}+F\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}x},\quad x'>x \tag{4.2.57}$$

为了确定以上各式中的待定系数，下面列出必须满足的各种条件（这些都可以从以前的讨论中得知所依据的理由）。对于 TE^z 模用 h 标出，对 TM^z 模用 e 标出，分别为

$$g_x^{1h}(-a,x',\gamma_1)=0 \tag{4.2.58}$$

$$g_x^{2h}(0,x',\gamma_2)=g_x^{1h}(0,x',\gamma_1) \tag{4.2.59}$$

$$\frac{1}{\mu_2}\frac{\mathrm{d}g_x^{2h}(x,x',\gamma_2)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0}=\frac{1}{\mu_1}\frac{\mathrm{d}g_x^{1h}(x,x',\gamma_1)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0} \tag{4.2.60}$$

$$g_x^{2h}(x,x',\gamma_2)\big|_{x=x'+\varepsilon}=g_x^{2h}(x,x',\gamma_2)\big|_{x=x'-\varepsilon} \tag{4.2.61}$$

$$\frac{\mathrm{d}g_x^{2h}(x,x',\gamma_2)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x'+\varepsilon}-\frac{\mathrm{d}g_x^{2h}(x,x',\gamma_2)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x'-\varepsilon}=-\mu(x') \tag{4.2.62}$$

$$g_x^{2h}(x,x',\gamma_2)\big|_{x>x'}\in L^2(x',\infty) \tag{4.2.63}$$

以及

$$\frac{\mathrm{d}g_x^{1e}(x,x',\gamma_1)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=-a}=0 \tag{4.2.64}$$

$$g_x^{2e}(0,x',\gamma_2)=g_x^{1e}(0,x',\gamma_1) \tag{4.2.65}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_2}\frac{\mathrm{d}g_x^{2e}(x,x',\gamma_2)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0}=\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\mathrm{d}g_x^{1e}(x,x',\gamma_1)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0} \tag{4.2.66}$$

$$g_x^{2e}(x,x',\gamma_2)\big|_{x=x'+\varepsilon}=g_x^{2e}(x,x',\gamma_2)\big|_{x=x'-\varepsilon} \tag{4.2.67}$$

$$\frac{\mathrm{d}g_x^{2e}(x,x',\gamma_2)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x'+\varepsilon}-\frac{\mathrm{d}g_x^{2e}(x,x',\gamma_2)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x'-\varepsilon}=-\varepsilon(x') \tag{4.2.68}$$

$$g_x^{2e}(x,x',\gamma_2)\big|_{x>x'}\in L^2(x',\infty) \tag{4.2.69}$$

对 TE^z 模应用以上条件得到

$$B=E=0$$

$$A=\mu_2\frac{1}{2\sqrt{\gamma_1}}\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}x'}}{\cos\sqrt{\gamma_1}a}\frac{(Z^h-N^h)}{Z^h}$$

$$C=\mu_2\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}x'}}{2\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}}$$

$$D=\mu_2\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}x'}}{2\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}}\frac{N^h}{Z^h}$$

$$F = \mu_2 \frac{1}{2\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}x'} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}x'}\frac{N^h}{Z^h}\right]$$

其中

$$Z^h = 1 - \mathrm{i}\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_2}}\cot\sqrt{\gamma_1}a$$

$$N^h = 1 + \mathrm{i}\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_2}}\cot\sqrt{\gamma_1}a$$

因而可把 TE^z 模的横向格林函数表示为

$$g_x^h(x,x',\lambda_x) = \begin{cases} \mu_2 \dfrac{1}{\sqrt{\gamma_1}}\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}x'}}{\cos\sqrt{\gamma_1}a}\dfrac{(Z^h - N^h)}{Z^h}\sin\sqrt{\gamma_1}(x+a), & -a < x < 0 \\ \mu_2 \dfrac{1}{2\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}|x-x'|} + \dfrac{N^h}{Z^h}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}(x+x')}\right], & x > 0 \end{cases} \tag{4.2.70}$$

同时还有与式（4.2.19）相同的色散方程。

对于 TM^z 模相应的系数则为

$$A = E = 0$$

$$B = -\varepsilon_2 \frac{1}{2\sqrt{\gamma_1}}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}x'}}{\sin\sqrt{\gamma_1}a}\frac{(Z^e - N^e)}{Z^e}$$

$$D = \varepsilon_2 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}x'}}{2\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}}\frac{N^e}{Z^e}$$

$$F = \varepsilon_2 \frac{1}{2\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}x'} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}x'}\frac{N^e}{Z^e}\right)$$

$$C = \varepsilon_2 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}x'}}{2i\sqrt{\gamma_2}}$$

其中

$$Z^e = 1 + \mathrm{i}\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_2}}\tan\sqrt{\gamma_1}a$$

$$N^e = 1 - \mathrm{i}\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{\gamma_2}}\tan\sqrt{\gamma_1}a$$

于是 TM^z 模的横向格林函数成为

$$g_x^e(x,x',\lambda_x) = \begin{cases} -\varepsilon_2 \dfrac{1}{2\sqrt{\gamma_1}}\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}x'}}{\sin\sqrt{\gamma_1}a}\dfrac{(Z^e - N^e)}{Z^e}\cos\sqrt{\gamma_1}(x+a), & -a < x < 0 \\ \varepsilon_2 \dfrac{1}{2\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}|x-x'|} + \dfrac{N^e}{Z^e}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}(x+x')}\right], & x > 0 \end{cases} \tag{4.2.71}$$

并有与式（4.2.36）相同的色散方程。

如果我们选用 $u_{x,\beta}$（x）作为基函数进行展开，则由于 $u_{x,\beta}$（x）既有离散本征值对应的函数，又有连续本征值对应的函数，故展开式包括两部分，即

$$g(x,z,x',z') = \sum_{n=1}^{N} a_n(z,x',z',n)u_{x,n}(x) + \int_v a(z,x',z',v)u_{x,v}(x,v)\mathrm{d}v \tag{4.2.72}$$

与上一节用此法获得二维格林函数的过程相同，所得结果可表达为

$$g(x,z,x',z') = \sum_{n=1}^{N} u_{x,n}(x)u_{x,n}^{*}(x')\frac{1}{2\mathrm{i}\sqrt{-\lambda_{x,n}}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{-\lambda_{x,n}}|z-z'|} + \int_0^{\infty} u_{x,v}(x,v)u_{x,v}^{*}(x',v)\frac{1}{2\mathrm{i}\sqrt{k_2^2-v^2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{k_2^2-v^2}|z-z'|}\mathrm{d}v \tag{4.2.73}$$

对于 TE^z 和 TM^z 模这里的 $u_{x,n}$ 和 $u_{x,v}$ 分别由式（4.2.20）和（4.2.25）及式（4.2.35）和（4.2.39）给出。

如果媒质是有耗的，相应的算子 L 不再是自伴的，这时需要同时考虑非自伴本征值问题，问题的复杂性要大得多[57]。

如果把二维格林函数先用 z 方向的本征函数基展开，则导致出现 x 坐标的格林函数问题。在对该问题求解的基础上，可分别得到与 TE^z 模和 TM^z 模相应的二维格林函数。

$$g^h(x,z,x',z') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\nu\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu(z-z')} \cdot \begin{cases} \dfrac{\mu_1}{2\sqrt{\gamma_1}}\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}x'}}{\cos\sqrt{\gamma_1}a}\left(\dfrac{Z^h-N^h}{Z^h}\right)\sin\sqrt{\gamma_1}(x+a), & -a<x<0 \\ \dfrac{\mu_2}{2\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}|x-x'|}+\dfrac{N^h}{Z^h}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}(x+x')}\right], & x>0 \end{cases} \tag{4.2.74}$$

$$g^e(x,z,x',z') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\nu\mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu(z-z')} \cdot \begin{cases} -\dfrac{\varepsilon_1}{2\sqrt{\gamma_1}}\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\gamma_1}x'}}{\sin\sqrt{\gamma_1}a}\left(\dfrac{Z^e-N^e}{Z^e}\right)\cos\sqrt{\gamma_1}(x+a), & -a<x<0 \\ \dfrac{\varepsilon_2}{2\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}|x-x'|}+\dfrac{N^e}{Z^e}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\gamma_2}(x+x')}\right], & x>0 \end{cases} \tag{4.2.75}$$

4.3　平面分层媒质结构的一般性分析

上面分析了平面分层媒质的两种典型结构，其中使用了分析这类结构的主要

数学方法，表明了其中的主要电磁模式。本节把这种分析方法推广到适用了这类结构的一般情况，作一些总结性分析。

4.3.1　平面分层媒质问题的一般性描述

平面分层媒质结构的一般几何构形及坐标选择由图 4－3 给出。该结构的特性与 $x=-x_b$，x_t 和 $z=-z_l$，z_r 的四壁的位置和性质有很大关系，也决定于 $\varepsilon_i(x)$ 和 $\mu_i(x)$ 的性质与分布。为保持二维系统的特点，仍假设系统的所有参数都与坐标 y 无关。

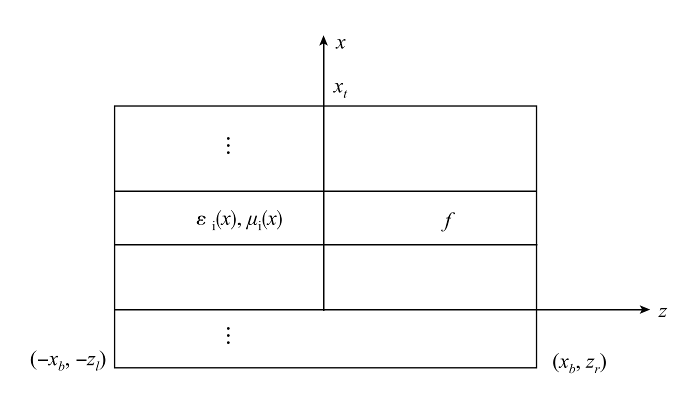


图 4－3　平面分层媒质波导结构

在频域支配该系统电磁运动的基本方程仍如式（4.1.1）和（4.1.2）所示，只是其中的 ε 和 μ 变为 x 的函数。尽管如此，在直角坐标系中两个基本方程仍分裂为如式（4.1.3）~（4.1.5）和式（4.1.6）~（4.1.8）两种方程，分别为 TE^z（H）模和 TM^z（E）模。对 TE^z 模求得 E_y 和对 TM^z 模求得 H_y 后就可以利用其他方程求得相应的其他分量，而 E_y 和 H_y 分别满足以下算子方程。

$$-\left(\mu\frac{\partial}{\partial x}\mu^{-1}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2(x)\right)=-\mathrm{i}\omega\mu J_{ey} \tag{4.3.1}$$

$$-\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2(x)\right)=-\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\varepsilon^{-1}J_{ex}+\frac{\partial J_{ex}}{\partial z} \tag{4.3.2}$$

其中 $k^2(x)=\omega^2\varepsilon(x)\mu(x)$。

以上两个方程可以统一表示为

$$-\left(s\frac{\partial}{\partial x}s^{-1}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2(x)\right)u(x,z)=f(x,z) \tag{4.3.3}$$

对于 TE^z 模 $u=E_y$，$s=\mu(x)$，对于 TM^z 模 $u=H_y$，$s=\varepsilon(x)$，而 f 则表示电流源。如果定义

$$\Omega=\{(x,z):x\in(-x_b,x_t),z\in(-z_l,z_r)\} \tag{4.3.4}$$

$$L=-\left(s\frac{\partial}{\partial x}s^{-1}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2(x)\right) \tag{4.3.5}$$

$$D(L) = \{u: u, \quad Lu \in H, B(u) = 0\} \tag{4.3.6}$$

其中，$H=L_w^2(\Omega)$；$w=s^{-1}$；$B(u)=0$ 为边界条件和极限条件（当边壁趋于无穷远时），这是个斯特姆－刘维尔型算子。正如前面已指出的，满足极限条件与假定媒质有耗相关，其目的是保证算子的定义域在平方可积的函数空间内。

但是，如果媒质是有耗的，则 $k^2(x)\in C$ 或 $s\in C$，这时根据斯特姆－刘维尔理论可知，不管边界条件如何，算子 L 都是非自伴的。这样一来就出现了矛盾，如果媒质是无耗的，则场就不满足无穷远条件，因而在无界问题中场就不属于平方可积函数空间，相应的算子就不可能是自伴的，即使满足辐射条件也是如此；为了使场满足无穷远条件我们又假设媒质存在某种损耗，但上面已指出，这时的算子不可能是自伴的。为了使以上算子在无界情况下对无耗媒质也是自伴的，我们采用了一种微扰的方法，即假设媒质有非常小的损耗，使场能满足极限条件但同时仍可认为 k^2 和 s 是实的。由于假设了损耗，同时也就满足了外向波条件。

4.3.2 平面分层媒质结构的本征函数和自然模

相对于算子方程（4.3.3）的本征值方程可以一般地表示为

$$-\left(s\frac{\partial}{\partial x}s^{-1}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2(x)\right)u_{\alpha,\beta}(x,z) = \lambda_{\alpha,\beta}u_{\alpha,\beta}(x,z) \tag{4.3.7}$$

其中，α 和 β 分别表示对应于 x 和 z 坐标的本征值的性质，可能是分立的，也可能是连续的，这取决于与结构相适应的边界状态。根据对具体结构的分析，二维问题的本征值可以有四种类型，从而构成四种本征值方程。四种本征值方程分别为

$$Lu_{n,m}(x,z) = \lambda_{n,m}u_{n,m}(x,z) \tag{4.3.8}$$

$$Lu_{n,\nu}(x,z,\nu) = \lambda_{n,\nu}u_{n,\nu}(x,z,\nu) \tag{4.3.9}$$

$$Lu_{v,m}(x,z,v) = \lambda_{v,m}u_{v,m}(x,z,v) \tag{4.3.10}$$

$$Lu_{v,\nu}(x,z,v,\nu) = \lambda_{v,\nu}u_{v,\nu}(x,z,v,\nu) \tag{4.3.11}$$

其中，n 和 m 表示分立本征值；v 和 γ 则表示连续本征值。方程（4.3.7）的求解一般采用分离变量法，即 $u_{\alpha,\beta}(x,z)=u_{x,\alpha}(x)u_{z,\beta}(z)$，于是化为两个一维本征值问题，即

$$-\left[s\frac{\partial}{\partial x}s^{-1}\frac{\partial}{\partial x}+(k^2(x)+\lambda_x)\right]u_{x,\alpha}(x) = 0 \tag{4.3.12}$$

$$-\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}+\lambda_z\right)u_{z,\beta}(z) = 0 \tag{4.3.13}$$

及相应的定解条件。其中，$\lambda_x+\lambda_z=\lambda_{\alpha,\beta}$。

若算子 L 是自伴的，则式（4.3.12）和（4.3.13）也是自伴本征问题，其本征函数具备以下正交化关系。

$$\begin{aligned}
\langle u_{s,n}, u_{s,m}\rangle &= \delta_{nm}\\
\langle u_{s,v}, u_{s,p}\rangle &= \delta(v-p)\\
\langle u_{s,n}, u_{s,v}\rangle &= 0
\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

其中，$s=x$，z，v 和 p 表示连续本征值。

根据式（4.3.14）可以很容易写出二维自伴本征函数的正交关系。

如果 L 不是自伴的，则需要考虑其伴随本征值问题，其方程为

$$-\left(s\frac{\partial}{\partial x}s^{-1}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2(x)\right)^* u^a_{\alpha,\beta}(x,z)=\lambda^*_{\alpha,\beta}u^a_{\alpha,\beta}(x,z) \tag{4.3.15}$$

其中，$\lambda^a_{\alpha,\beta}=\lambda^*_{\alpha,\beta}$，并应满足相应的定解条件。若令 $u^a_{\alpha,\beta}=u^a_{x,\alpha}(x)u^a_{z,\beta}(z)$，则 $u^a_{x,\alpha}(x)$ 和 $u^a_{z,\beta}(z)$ 分别满足类似于式（4.3.12）和（4.3.13）的一维伴随本征值方程。原问题的一维本征函数与伴随问题的一维本征函数之间存在双正交关系[57]

$$\begin{aligned}\langle u_{s,n},u^a_{s,m}\rangle&=\delta_{nm}\\ \langle u_{s,v},u^a_{s,p}\rangle&=\delta(v-p)\\ \langle u_{s,n},u^a_{s,v}\rangle&=0\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

二维非自伴问题的本征函数的正交关系不难根据（4.3.16）得出。

以上没有讨论本征函数的简并问题。由于简并的本征函数仍可正交归一化，所以所有自伴问题的本征函数都能构成某个相应的希尔伯特空间 $H=L^2(\Omega)$ 的归一化正交基。

从前面讨论具体的平面分层媒质结构中已清楚地看出，本征函数对求解边值问题的重要性。无论是非齐次算子方程的解和相应的格林函数都可由本征函数表示出来。

除了本征函数我们还讨论了相应结构中的自然波导模，它是一个电磁波传输系统最重要的具有实际物理意义和技术重要性的电磁场的运动形态，反映的是在无外加源作用的情况下系统内可能存在的电磁形态。

在一般平面分层媒质结构中自然波导模 $\varphi(x,z)$ 满足的算子方程为

$$-\left(s\frac{\partial}{\partial x}s^{-1}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2(x)\right)\varphi(x,z)=0 \tag{4.3.17}$$

其中，$k^2(x)$ 为已知；当然 $\varphi(x,z)$ 还要满足相应的定解条件。把方程（4.3.17）与（4.3.7）比较显然可知，自然波导模是该二方程对应的二维微分算子零空间的本征函数，但前面的讨论已指出消失模不属于其列。

自然波导模和本征函数有很重要的区别。自然模更具实际的物理意义，而本征函数则更具数学意义，主要用于谱表示。

4.3.3　本征函数展开法的应用

我们已经看到，对于平面分层媒质问题，由于结构的边界和媒质的性质不同，表征电磁场问题的算子可能是自伴的，也可能是非自伴的，对应的本征值问题可能有分立的本征值，也可能是连续的本征值，或者是两者同时具有。现在在这种较一般的情况下简要讨论一下本征函数展开方法的应用。

对于一维空间的算子方程

$$(L-\lambda)u(x)=f(x) \tag{4.3.18}$$

L 不必是自伴的，且其本征值既有分立部分，也有连续部分，即有

$$Lu_n = \lambda_n u_n,\quad Lu_v = \lambda_v u_v$$
$$L^a u_n^a = \lambda_n^a u_n^a,\quad L^a u_v^a = \lambda_v^a u_v^a \tag{4.3.19}$$

其中，L^a 是 L 的伴随算子；$\lambda_n^a = \lambda_n^*$；$\lambda_v^a = \lambda_v^*$；$u_v = u(x,v)$，$u_v^a = u^a(x,v)$。这时 $u(x)$ 可以表示成

$$u(x) = \sum_n \langle u, u_n^* \rangle u_n + \int_v \langle u, u_v^* \rangle u_v \mathrm{d}v \tag{4.3.20}$$

把该展开式代入方程（4.3.18）即可得

$$\sum_n (\lambda_n - \lambda)\langle u, u_n^a\rangle u_n + \int_v (\lambda_v - \lambda)\langle u, u_v^a\rangle u_v \mathrm{d}v = f$$

用 $u_n(x)$ 和 $u^a(x,p)$ 对上式分别做内积可知

$$\langle u, u_m^a\rangle = \frac{\langle f, u_m^a\rangle}{\lambda_m - \lambda},\quad \langle u, u_p^a\rangle = \frac{\langle f, u_p^a\rangle}{\lambda_p - \lambda}$$

因此

$$u(x) = \sum_n \frac{\langle f, u_n^a\rangle}{\lambda_n - \lambda} u_n(x) + \int_v \frac{\langle f, u_v^a\rangle}{\lambda_v - \lambda} u(x,v)\mathrm{d}v \tag{4.3.21}$$

类似地可得相应格林函数 $g(x, x', \lambda)$ 的谱表示

$$g(x,x',\lambda) = \sum_n \frac{u_n(x) u_n^a(x)^*}{\lambda_n - \lambda} + \int_v \frac{u_n(x,v) u_n^a(x,v)^*}{\lambda_v - \lambda}\mathrm{d}v \tag{4.3.22}$$

对于二维算子方程（4.3.3），根据相同的原理在一般情况下可以把解表示为

$$\begin{aligned} u(x,z) = & \sum_n \sum_m \langle u, u_{n,m}^a\rangle u_{n,m}(x,z) + \sum_n \int_\nu \langle u, u_{n,\nu}^a\rangle u_{n,\nu}(x,z,\nu)\mathrm{d}\nu \\ & + \sum_m \int_v \langle u, u_{v,m}^a\rangle u_{v,m}(x,z,v)\mathrm{d}v \\ & + \int_v\int_\nu \langle u, u_{v,\nu}^a\rangle u_{v,\nu}\langle x,z,v,\nu\rangle \mathrm{d}\nu\mathrm{d}v \end{aligned} \tag{4.3.23}$$

再利用二维本征函数的正交关系进一步可知

$$\begin{aligned} u(x,z) = & \sum_n \sum_m \frac{\langle f, u_{n,m}^a\rangle}{\lambda_{n,m} - \lambda} u_{n,m}(x,z) + \sum_n \int_\nu \frac{\langle f, u_{n,\nu}^a\rangle}{\lambda_{n,\nu} - \lambda} u_{n,\nu}(x,z,\nu)\mathrm{d}\nu \\ & + \sum_m \int_v \frac{\langle f, u_{v,m}^a\rangle}{\lambda_{v,m} - \lambda} u_{v,m}(s,z,v)\mathrm{d}v \\ & + \int_v\int_\nu \frac{\langle f, u_{v,\nu}^a\rangle}{\lambda_{v,\nu} - \lambda} u_{v,\nu}(x,z,v,\nu)\mathrm{d}v\mathrm{d}\nu \end{aligned} \tag{4.3.24}$$

同样的道理把式（4.3.22）推广到二维便是

$$\begin{aligned} g(x,z,x',z',\lambda) = & \sum_n \sum_m \frac{u_{n,m}^a(x',z')^*}{\lambda_{n,m} - \lambda} u_{n,m}(x,z) \\ & + \sum_n \int_\nu \frac{u_{n,\nu}^a(x',z',\nu)^*}{\lambda_{n,\nu} - \lambda} u_{n,\nu}(x,z,\nu)\mathrm{d}\nu \\ & + \int_v \sum_m \frac{u_{v,m}^a(x',z',v)^*}{\lambda_{v,m} - \lambda} u_{v,m}(x,z,v)\mathrm{d}v \end{aligned}$$

$$+\int_{v}\int_{\nu}\frac{u_{v,\nu}^{a}(x',z',v,\boldsymbol{\nu})^{*}}{\boldsymbol{\lambda}_{v,\nu}-\boldsymbol{\lambda}}u_{v,\nu}(x,z,v,\boldsymbol{\nu})\mathrm{d}v\mathrm{d}\boldsymbol{\nu} \tag{4.3.25}$$

二维格林函数 g（x，z，x'，z'，λ）还可以采用部分本征函数展开法求得，只需求得相应的一维本征函数和由一维本征函数展开式导出的相应的一维格林函数。所以，这种方法把求解二维格林函数方程降低为求解一维格林函数方程。

第5章　柱形导波系统中的电磁场

在微波、毫米波和光波的应用技术中需要各种类型的导波系统，它们引导电磁能量沿一定方向传输并由其构成各种类型的功能部件。为了分析这些系统中电磁波的分布和传输特性，可从最简单但能反映基本特性的物理模型出发，在此基础上再考虑其他因素的影响。最简单的模型为，系统由理想导体或介质构成，纵向结构均匀并延伸至无限远，横向可以是一些特定的构形，空间为均匀媒质。这种模型所代表的实际系统则为矩形或圆形金属空心波导、同轴线或介质波导和光纤等。

5.1　柱形金属波导中电磁场的一般特性分析

柱形空心金属壁波导是微波波段电磁导波系统的主要组成部分，它们把电磁场限定在系统的内部空间，这个空间的横截面构成一个封闭的连通区域，正是这一特点把它们与上面所讨论的平行板导波系统区分开来。假定这一系统在纵向是均匀的，且延伸至无穷远。下面首先对这一简单物理模型中所传输的电磁场具有的一般共同特性进行分析，作为对更复杂问题分析的基础。

5.1.1　纵向分量表示法和自然模的分类

这里所考虑的系统模型的最大特点是电磁场所在的区域无论纵向和横向都是均匀的，媒质为各向同性，系统的纵向延伸至无穷远，要求在系统的无穷远处电磁场满足外行波条件。这里最基本也是最简单的问题是，在不考虑源的影响时系统中可能存在的电磁模式，前面我们已经把这种模式称为自然模。既然是可能存在的电磁场，就应该是连续且连续可微的良态函数。

我们选择系统的纵向坐标为 z，而横向区域的位矢用$\vec{\rho}$表示，因此有$\vec{r}=\vec{\rho}+\hat{z}z$。根据变数分离的思想，我们可以把电磁场$\vec{E}(\vec{r})$和$\vec{H}(\vec{r})$表示为以$\vec{\rho}$和 z 为变量的两个函数的乘积。由于我们关心的是沿系统可能传输的电磁模式，则与 z 有关的函数应该表示为 $e^{\pm\gamma z}$。我们假定 $\mathrm{Re}(\gamma)\geqslant 0$，$\mathrm{Im}(\gamma)<0$，则沿 $+z$ 方向传输的电磁场应选 $e^{-\gamma z}$，反之沿 $-z$ 方向传输的电磁场则应选 $e^{\gamma z}$。选定了这种函数后未知的主要是场的横向结构，而选哪一种纵向函数已经不重要。如果我们选沿 $+z$ 方向传输的场作为分析对象，则系统中可能存在的电磁场可一般地表示为

$$
\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}(\vec{\rho})e^{-\gamma z} \\
\vec{H}(\vec{r}) &= \vec{H}(\vec{\rho})e^{-\gamma z}
\end{aligned}
\tag{5.1.1}
$$

于是，只要确定了$\vec{E}(\vec{\rho})$ 和$\vec{H}(\vec{\rho})$，这种系统中的电磁传输模式也就确定了。

由于我们已设所分析的区域中媒质是均匀的，故没有电荷积累，即应该有

$$\nabla \cdot (\varepsilon \vec{E}(\vec{r})) = 0$$

若设$\nabla = \nabla_t + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$，其中$\nabla_t$ 表示横向二维梯度算符，则有

$$\left(\nabla_t + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (\varepsilon \vec{E}(\vec{r})) = \left(\nabla_t + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \varepsilon(\vec{E}_t(\vec{r}) + \hat{z}E_z(\vec{r})) = 0 \quad (5.1.2)$$

其中，$\vec{E}_t(\vec{r})$ 表示电场的横向分量，而且有

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_t(\vec{\rho})e^{-\gamma z} + \hat{z}E_z(\vec{\rho})e^{-\gamma z}$$

所以，把这一表示代入式（5.1.2）就有

$$E_z(\vec{\rho}) = \frac{1}{\gamma}\nabla_t \cdot \vec{E}_t(\vec{\rho}) \quad (5.1.3)$$

这一结果表明，作为横向函数$\vec{E}(\vec{\rho})$ 的横向分量$\vec{E}_t(\vec{\rho})$ 和纵向分量 $E_z(\vec{\rho})$ 不是相互独立的，利用这种依赖关系，可以相互表示。对磁场也可以进行类似的分析。为了对系统中的自然电磁模式进行分类研究，我们把横向场用纵向分量表示出来，为此令

$$\vec{E}(\vec{\rho}) = \vec{E}_t(\vec{\rho}) + \hat{z}E_z(\vec{\rho}) \quad (5.1.4)$$

$$\vec{H}(\vec{\rho}) = \vec{H}_t(\vec{\rho}) + \hat{z}Hz(\vec{\rho})$$

把这一表示代入无源时的频域麦克斯韦方程即可得到

$$\left(\nabla_t + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\vec{E}_t(\vec{\rho}) + \hat{z}E_z(\vec{\rho}))e^{-\gamma z} = -\mathrm{i}\omega\mu(\vec{H}_t(\vec{\rho}) + \hat{z}H_z(\vec{\rho}))e^{-\gamma z}$$

$$\left(\nabla_t + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\vec{H}_t(\vec{\rho}) + \hat{z}H_z(\vec{\rho}))e^{-\gamma z} = \mathrm{i}\omega\varepsilon(\vec{E}_t(\vec{\rho}) + \hat{z}E_z(\vec{\rho}))e^{-\gamma z}$$

经运算整理，使两侧的纵向分量和横向分量分别相等就可得到

$$\begin{aligned} &\nabla_t \times \vec{E}_t(\vec{\rho}) = -\mathrm{i}\omega\mu H_z(\vec{\rho})\,\hat{z} \\ &\hat{z} \times \nabla_t E_z(\vec{\rho}) + \gamma\,\hat{z} \times \vec{E}_t(\vec{\rho}) = \mathrm{i}\omega\mu\,\vec{H}_t(\vec{\rho}) \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

$$\begin{aligned} &\nabla_t \times \vec{H}_t(\vec{\rho}) = \mathrm{i}\omega\varepsilon E_z(\vec{\rho})\,\hat{z} \\ &\hat{z} \times \nabla_t H_z(\vec{\rho}) + \gamma\,\hat{z} \times \vec{H}_t(\vec{\rho}) = -\mathrm{i}\omega\varepsilon\,\vec{E}_t(\vec{\rho}) \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

以上两式中分别消去$\vec{E}_t(\vec{\rho})$ 或$\vec{H}_t(\vec{\rho})$ 就又得到

$$(\omega^2\varepsilon\mu + \gamma^2)\,\vec{E}_t(\vec{\rho}) = \mathrm{i}\omega\mu\,\hat{z} \times \nabla_t H_z(\vec{\rho}) - \gamma\,\nabla_t E_z(\vec{\rho})$$

$$(\omega^2\varepsilon\mu + \gamma^2)\,\vec{H}_t(\vec{\rho}) = -\mathrm{i}\omega\varepsilon\,\hat{z} \times \nabla_t E_z(\vec{\rho}) - \gamma\,\nabla_t H_z(\vec{\rho})$$

若令

$$k_c^2 = \omega^2\varepsilon\mu + \gamma^2 = k^2 + \gamma^2 \quad (5.1.7)$$

又可把上式表示成

$$\vec{E}_t(\vec{\rho}) = \frac{1}{k_c^2}(-\gamma\,\nabla_t E_z(\vec{\rho}) + \mathrm{i}\omega\mu\,\hat{z} \times \nabla_t H_z(\vec{\rho})) \quad (5.1.8)$$

$$\vec{H}_t(\vec{\rho}) = \frac{1}{k_c^2}(-\gamma\nabla_t H_z(\vec{\rho}) - \mathrm{i}\omega\varepsilon\,\hat{z}\times\nabla_t E_z(\vec{\rho})) \tag{5.1.9}$$

由此可以看出，只要求得了纵向场分量 $E_z(\vec{\rho})$ 和 $H_z(\vec{\rho})$，横向场$\vec{E}_t(\vec{\rho})$ 和 $\vec{H}_t$（$\vec{\rho}$）也就完全确定了。对上两式用∇_t 进行叉乘，再利用式（5.1.5）和（5.1.6）中的关系就可知 $E_z(\vec{\rho})$ 和 $H_z(\vec{\rho})$ 分别满足

$$\nabla_t^2 E_z(\vec{\rho}) + k_c^2 E_z(\vec{\rho}) = 0 \tag{5.1.10}$$

$$\nabla_t^2 H_z(\vec{\rho}) + k_c^2 H_z(\vec{\rho}) = 0 \tag{5.1.11}$$

在给定边界条件后，由这两个方程就可完全确定 $E_z(\vec{\rho})$ 和 $H_z(\vec{\rho})$ 了。

有意思的是，从式（5.1.8）和（5.1.9）可以看出，不仅$\vec{E}_t(\vec{\rho})$ 和$\vec{H}_t(\vec{\rho})$ 可以由 $E_z(\vec{\rho})$ 和 $H_z(\vec{\rho})$ 确定，而且 $E_z(\vec{\rho})$ 和 $H_z(\vec{\rho})$ 可以完全分离，使得这种传输系统中的电磁场传输模式可以表示为两类模式结构之和，在一类模式中 $E_z(\vec{\rho})\neq 0$，而 $H_z(\vec{\rho})=0$；另一类模式则相反，即 $H_z(\vec{\rho})\neq 0$，而 $E_z(\vec{\rho})=0$。前一类模式称为纵电波或横磁波，用 TM 或 E 表示，后一类称为纵磁波或横电波，用 TE 或 H 表示。为了区分这两类模式的电磁场，我们在场量的右上角加上 e 或 h，这样两类模式的场方程就可表示如下。

对于 TM(E) 模

$$\begin{aligned}\vec{E}_t^e(\vec{\rho}) &= -\frac{\gamma}{k_c^2}\nabla_t E_z^e(\vec{\rho})\\ \vec{H}_t^e(\vec{\rho}) &= -\frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon}{k_c^2}\hat{z}\times\nabla_t E_z^e(\vec{\rho})\end{aligned} \tag{5.1.12}$$

对于 TE(H) 模

$$\begin{aligned}\vec{E}_t^h(\vec{\rho}) &= \frac{\mathrm{i}\omega\mu}{k_c^2}\hat{z}\times\nabla_t H_z^h(\vec{\rho})\\ \vec{H}_t^h(\vec{\rho}) &= -\frac{\gamma}{k_c^2}\nabla_t H_z^h(\vec{\rho})\end{aligned} \tag{5.1.13}$$

除了以上两类模式外，还有一种情况值得考虑，即如果 $E_z(\vec{\rho})$ 和 $H_z(\vec{\rho})$ 同时为零又会怎样？在什么样的条件下才可以维持这种纵向场全为零的横电磁（TEM）模式呢？

由式（5.1.5）和（5.1.6）可知，这种模式的横向场满足

$$\nabla\times\vec{E}_t(\vec{\rho}) = 0,\quad \nabla\times\vec{H}_t(\vec{\rho}) = 0 \tag{5.1.14}$$

亦即，它们是无旋的，而且

$$\nabla_t\times\nabla_t\times\vec{E}_t(\vec{\rho}) = 0,\quad \nabla_t\times\nabla_t\times\vec{H}_t(\vec{\rho}) = 0 \tag{5.1.15}$$

又因场区无电荷积累，又必须

$$\nabla_t\cdot\vec{E}_t(\vec{\rho}) = 0,\quad \nabla_t\cdot\vec{H}_t(\vec{\rho}) = 0 \tag{5.1.16}$$

由以上两种关系可知，必有

$$\nabla_t^2\vec{E}_t(\vec{\rho}) = 0,\quad \nabla_t^2\vec{H}_t(\vec{\rho}) = 0 \tag{5.1.17}$$

也就是说，这种模式的横向场不仅无旋，还要满足拉普拉斯方程。这是一种静电

场和静磁场的特性。为了维持这种场结构，导波系统的横截面必须是多导体结构。在封闭系统中同轴线就是最典型的一种。

5.1.2　模式场的正交性

从前面的分析中已知，柱形金属壁导波系统中的电磁模式 TE 和 TM 可以由其纵向分量完全确定，而且纵向电场和磁场分量都满足标量形式的亥姆霍兹方程（5.1.10）或（5.1.11）。如果导波系统的横截面区域用 Ω 表示，其边界为 2Ω，再用 $\psi(\vec{\rho})$ 表示 $E_z^e(\vec{\rho})$ 或 $H_z^h(\vec{\rho})$ 中的任何一个，则因在假设条件下可认为所有场量均为平方可积函数。于是，在数学上我们归结于讨论下面定义的算子 A 及其构成的方程。

$$A: L^2(\Omega)\to L^2(\Omega),\ A(\psi)=(\nabla_t^2+k_c^2)\psi$$

$$D(A)=\left\{\psi:\ \psi,\ \nabla_t^2\psi\in L^2(\Omega),\ \psi\Big|_{\partial\Omega}=0\ \text{或}\ \frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0\right\}$$

其中，所列的边界条件对理想导体而言，分别由纵向电场和纵向磁场所满足。

由于 $k_c^2=k^2+\gamma^2=\omega^2\varepsilon\mu+\gamma^2$，在原来的假设中，为了使无限长柱形导波系统中的场满足无限远极限条件，且使场量满足平方可积条件，让系统中有小的损耗。但是，为了使系统中的模式场具有正交特性，算子 A 必须是自伴的或对称的。这要求 $k_c^2\in R$。为了克服这一矛盾，我们假定系统中存在的损耗为无限小，从而把 k_c^2 近似地看作是实的，也就可把算子 A 视作自伴的。对于这样一个有界区域上的自伴算子，其本征值是离散的，不同本征值所对应的本征函数是相互正交的，且本征函数在 A 的定义域中构成一个正交基。

由于 $k^2=\omega^2\varepsilon\mu$ 由系统参数决定，所以我们把算子 A 的本征值方程表示成

$$(\nabla_t^2+k^2)\psi=-\gamma^2\psi \tag{5.1.18}$$

如果我们用 ψ_i 和 ψ_j 分别表示对应于本征值 γ_i^2 和 γ_j^2 的本征函数，则分别有

$$(\nabla_t^2+k^2)\psi_i=-\gamma_i^2\psi_i \tag{5.1.19}$$

$$(\nabla_t^2+k^2)\psi_j=-\gamma_j^2\psi_j \tag{5.1.20}$$

用 ψ_j^* 乘式（5.1.19），对式（5.1.20）取共轭然后乘以 ψ_i，再把两式相减，即可得

$$\psi_i\nabla_t^2\psi_j^*-\psi_j^*\nabla_t^2\psi_i=(\gamma_i-\gamma_j)\psi_i\psi_j^* \tag{5.1.21}$$

对该式在 Ω 上积分并应用二维格林第二恒等式，我们又可得到

$$\begin{aligned}(\gamma_i^2-\gamma_j^2)\int_\Omega\psi_i\psi_j^*\,\mathrm{d}\Omega&=\int_\Omega(\psi_i\nabla_t^2\psi_j^*-\psi_j^*\nabla_t^2\psi_i)\,\mathrm{d}\Omega\\&=\int_{\partial\Omega}\left(\psi_i\frac{\partial\psi_j^*}{\partial n}-\psi_j^*\frac{\partial\psi_i}{\partial n}\right)\mathrm{d}l\end{aligned} \tag{5.1.22}$$

根据已知边界条件，无论 ψ 代表 TM（E）模还是代表 TE（H）模，式（5.1.22）右侧的积分均为零，所以我们有

$$\langle\psi_i^{e,h},\psi_j^{e,h}\rangle=0,\quad\gamma_i^2\neq\gamma_j^2 \tag{5.1.23}$$

根据这一结果很容易证明，无论是 TM 模还是 TE 模，其横向电场或横向磁场对不同模式而言相互之间都是正交的。

横向电场的正交性表示为

$$\langle \vec{E}_{ti}^{e,h}, \vec{E}_{tj}^{e,h} \rangle = 0 \tag{5.1.24}$$

由式（5.1.12）可以看出，对于 TM 模而言，这就要求

$$\langle \nabla_t \psi_i^e, \nabla_t \psi_j^e \rangle = 0 \tag{5.1.25}$$

利用二维格林第一恒等式我们有

$$\int_\Omega \nabla_t \psi_i^e \cdot \nabla_t (\psi_j^e)^* \mathrm{d}\Omega = -\int_\Omega \psi_i^e \nabla_t^2 (\psi_j^e)^* \mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega} \psi_i^e \frac{\partial(\psi_j^e)^*}{\partial n} \mathrm{d}l \tag{5.1.26}$$

因为$\psi_i^e|_{\partial\Omega}=0$，故上式中对 $\partial\Omega$ 的积分为零。又由于$\nabla_t^2(\psi_j^e)^*$可由 $-k_c^2(\psi_j^e)^*$ 代替，再利用 ψ 的正交性（5.1.23），就由式（5.1.26）得到式（5.1.25），从而有

$$\langle \vec{E}_{ti}^e(\vec{\rho}), \vec{E}_{tj}^e(\vec{\rho}) \rangle = 0 \tag{5.1.27}$$

对 TE 模而言，由式（5.1.13）可知，其横向电场的正交性要求

$$\langle \hat{z} \times \nabla_t \psi_i^h, \hat{z} \times \nabla_t \psi_j^h \rangle = 0 \tag{5.1.28}$$

由矢量运算可知

$$\begin{aligned}
(\hat{z} \times \nabla_t \psi_i^h) \cdot (\hat{z} \times \nabla_t (\psi_j^h)^*) &= \hat{z} \cdot [\nabla_t \psi_i^h \times (\hat{z} \times \nabla_t (\psi_j^h)^*)] \\
&= \hat{z} \cdot [\hat{z}(\nabla_t \psi_i^h \cdot \nabla_t (\psi_j^h)) - \nabla_t (\psi_j^h)^* (\hat{z} \cdot \nabla_t \psi_i^h)] \\
&= \nabla_t \psi_i^h \cdot \nabla_t (\psi_j^h)^*
\end{aligned}$$

于是式（5.1.28）的证明又归结为

$$\langle \nabla_t \psi_i^h, \nabla_t \psi_j^h \rangle = 0$$

的证明，而该式的证明又与式（5.1.25）的证明相类似，故可推知

$$\langle \vec{E}_{ti}^h(\vec{\rho}), \vec{E}_{tj}^h(\vec{\rho}) \rangle = 0 \tag{5.1.29}$$

至于横向磁场之间的正交关系

$$\langle \vec{H}_{ti}^{e,h}, \vec{H}_{tj}^{e,h} \rangle = 0 \tag{5.1.30}$$

的证明则与横向电场的正交性证明类似，此处不再重复。

此外，TM 模和 TE 模横向电场之间也存在正交关系，即

$$\langle \vec{E}_{ti}^e, \vec{E}_{tj}^h \rangle = 0 \tag{5.1.31}$$

为证明这一关系需证明

$$\langle \nabla_t \psi_i^e, \hat{z} \times \nabla_t \psi_j^h \rangle = 0 \tag{5.1.32}$$

根据矢量关系

$$\begin{aligned}
\nabla_t \cdot (\hat{z}(\psi_j^h)^* \times \nabla_t \psi_i^e) &= (\nabla_t \times \hat{z}(\psi_j^h)^*) \cdot \nabla_t \psi_i^e - \hat{z}(\psi_j^h)^* \cdot \nabla_t \times \nabla_t \psi_i^e \\
&= -\nabla_t \psi_i^e \cdot (\hat{z} \times \nabla_t (\psi_j^h)^*)
\end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla_t \psi_i^e \cdot (\hat{z} \times \nabla_t (\psi_j^h)^*) \mathrm{d}\Omega &= -\int_\Omega \nabla_t \cdot (\hat{z}(\psi_j^h)^* \times \nabla_t \psi_i^e) \mathrm{d}\Omega \\
&= \int_{\partial\Omega} (\hat{z} \times \nabla_t \psi_i^e) \cdot \vec{n} (\psi_j^h)^* \mathrm{d}l \\
&= 0
\end{aligned}$$

其中，$\vec{n}$为单位内法向矢量。由于$\nabla\psi_i^e$ 正比于横向电场分量，在波导壁上其切向分量为零，故只有法向分量，因而$\hat{z}\times\nabla_t\psi_i^e$ 正切于边壁，它与$\vec{n}$的点乘必为零，从而证明了式（5.1.31）的正确性。

上面证明的正交关系在波导理论中很有意义，利用它们可把系统中的任意场结构展开为 TM 模和 TE 模场本征函数的级数。但是，这些正交关系的成立是有条件的。例如，当波导壁不是理想导体而存在损耗时，齐次边界条件就不再成立。在数学上算子 A 就不再是自伴的。

还要补充一点，如果出现 $\gamma_i=\gamma_j$ 这种简并的情况，前面对 ψ_i 和 ψ_j 正交性的证明就会失效。不过，这时可采用正交化程序，用适当的线性组合构成正交的亚波型组。例如，当 $\gamma_i=\gamma_j$ 时我们取 $\psi'_i=\psi_i$，$\psi'_j=\psi_j+\alpha\psi_i$，其中 $\alpha=-P_{ij}/P_{ii}$，而 $P_{ij}=\int_\Omega\psi_j\psi_i^*\,\mathrm{d}\Omega$，这时就有

$$\langle\psi'_i,\psi'_j\rangle=\int_\Omega\psi'_i(\psi'_j)^*\,\mathrm{d}\Omega=0$$

这一方法可以推广到多重简并的情况。有了这一补充，上面所得的结论就可认为是普遍的了。

5.1.3　柱形金属波导中的电磁能量

导波系统的主要功能是传输电磁能量。由于柱形金属导波系统中传输的电磁场可以分为不同类型的电磁模式，我们需要了解电磁能量的传输与这些模式的关系。为此我们将换一种方式表示电磁模式的正交特性。

设$\vec{E}_i$、$\vec{H}_i$ 和$\vec{E}_j$、$\vec{H}_j$ 分别表示两个电磁模式的电场和磁场，它们满足无源形式的电场旋度方程，即有

$$\nabla\times\vec{E}_i=-\mathrm{i}\omega\mu\vec{H}_i$$

$$\nabla\times\vec{E}_j=-\mathrm{i}\omega\mu\vec{H}_j$$

用$\vec{H}_j$和$\vec{H}_i$分别点乘以上两式然后相减便得

$$\vec{H}_j\cdot\nabla\times\vec{E}_i-\vec{H}_i\cdot\nabla\times\vec{E}_j=0 \tag{5.1.33}$$

类似地，由磁场的旋度方程有

$$\nabla\times\vec{H}_i=\mathrm{i}\omega\varepsilon\vec{E}_i$$

$$\nabla\times\vec{H}_j=\mathrm{i}\omega\varepsilon\vec{E}_j$$

用$\vec{E}_j$和$\vec{E}_i$分别点乘以上两式然后相减又得

$$\vec{E}_j\cdot\nabla\times\vec{H}_i-\vec{E}_i\cdot\nabla\times\vec{H}_j=0 \tag{5.1.34}$$

由式（5.1.33）和（5.1.34），利用

$$\nabla\cdot(\vec{E}_i\times\vec{H}_j)=\vec{H}_j\cdot\nabla\times\vec{E}_i-\vec{E}_i\cdot\nabla\times\vec{H}_j$$

$$\nabla\cdot(\vec{E}_j\times\vec{H}_i)=\vec{H}_i\cdot\nabla\times\vec{E}_j-\vec{E}_j\cdot\nabla\times\vec{H}_i$$

可得

$$\nabla\cdot(\vec{E}_i\times\vec{H}_j-\vec{E}_j\times\vec{H}_i)=0 \tag{5.1.35}$$

考虑到式（5.1.1）和（5.1.4），以及$\nabla=\nabla_t+\hat{z}\dfrac{\partial}{\partial z}$，我们又有

$$\nabla\cdot(\vec{E}_i\times\vec{H}_j-\vec{E}_j\times\vec{H}_i)=\nabla_t\cdot(\vec{E}_i\times\vec{H}_j-\vec{E}_j\times\vec{H}_i)+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}(\vec{E}_i\times\vec{H}_j-\vec{E}_j\times\vec{H}_i)=0$$

进一步有

$$\nabla_t\cdot(\vec{E}_i\times\vec{H}_j-\vec{E}_j\times\vec{H}_i)=(\gamma_i+\gamma_j)\hat{z}\cdot[\vec{E}_{ti}(\vec{\rho})\times\vec{H}_{tj}(\vec{\rho})-\vec{E}_{tj}(\vec{\rho})\times\vec{H}_{ti}(\vec{\rho})]\mathrm{e}^{-(\gamma_i+\gamma_j)z}\tag{5.1.36}$$

由于根据二维散度定理给出

$$\begin{aligned}\int_\Omega\nabla_t\cdot(\vec{E}_i\times\vec{H}_j-\vec{E}_j\times\vec{H}_i)\mathrm{d}\Omega&=\int_{\partial\Omega}\vec{n}\cdot(\vec{E}_i\times\vec{H}_j-\vec{E}_j\times\vec{H}_i)\mathrm{d}l\\&=\int_{\partial\Omega}[\vec{H}_j\cdot(\vec{n}\times\vec{E}_i)-\vec{H}_i\cdot(\vec{n}\times\vec{E}_j)]\mathrm{d}l=0\end{aligned}$$

故我们有

$$(\gamma_i+\gamma_j)\int_\Omega\hat{z}\cdot[\vec{E}_{ti}(\vec{\rho})\times\vec{H}_{tj}(\vec{\rho})-\vec{E}_{tj}(\vec{\rho})\times\vec{H}_{ti}(\vec{\rho})]\mathrm{d}\Omega=0\tag{5.1.37}$$

如果把上面两组场中的一组$\vec{E}_j$和$\vec{H}_j$换成另外一组$\vec{E}'_j$和$\vec{H}'_j$，它们与z的关系换成$e^{\gamma_j z}$，则用类似的方法又可得到

$$(\gamma_i-\gamma_j)\int_\Omega\hat{z}\cdot[-\vec{E}_{ti}(\vec{\rho})\times\vec{H}_{tj}(\vec{\rho})-\vec{E}_{tj}(\vec{\rho})\times\vec{H}_{ti}(\vec{\rho})]\mathrm{d}\Omega=0\tag{5.1.38}$$

把式（5.1.37）和（5.1.38）相加和相减，可分别得到

$$\int_\Omega[\vec{E}_{ti}(\vec{\rho})\times\vec{H}_{tj}(\vec{\rho})]\cdot\hat{z}\mathrm{d}\Omega=0\tag{5.1.39}$$

$$\int_\Omega[\vec{E}_{tj}(\vec{\rho})\times\vec{H}_{ti}(\vec{\rho})]\cdot\hat{z}\mathrm{d}\Omega=0\tag{5.1.40}$$

由分析过程可知，这些关系对任何两个模式之间的场都是成立的。对于无损耗的柱形金属导波系统这些关系又可表示成

$$\int_\Omega[\vec{E}_{ti}(\vec{\rho})\times\vec{H}^*_{tj}]\cdot\hat{z}\mathrm{d}\Omega=0\tag{5.1.41}$$

由式（1.3.11）我们知道，沿柱形导波系统传输的平均功率流密度应为

$$\vec{P}_{\text{ave}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{E}_i\times\vec{H}^*_j]\cdot\hat{z}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\vec{E}_{ti}(\vec{\rho})\times\vec{H}^*_{tj}]$$

由此可知，式（5.1.41）告诉我们，在无耗金属柱形波导中各模式之间没有能量耦合，是由模式各自独立传输的。

根据以前所进行的模式分析，计算各类模式沿系统所传输功率流的时间平均值P_{ave}。

对于TE模

$$P^h_{\text{ave}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_\Omega(\vec{E}^h\times(\vec{H}^h)^*)\cdot\hat{z}\mathrm{d}\Omega=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_\Omega(\vec{E}^h_t\times(\vec{H}^h_t)^*)\cdot\hat{z}\mathrm{d}\Omega$$

对于TM模

$$P_{\text{ave}}^{e} = \frac{1}{2}\text{Re}\int_{\Omega}(\vec{E}^{e} \times (\vec{H}^{e})^{*}) \cdot \hat{z}\text{d}\Omega = \frac{1}{2}\text{Re}\int_{\Omega}(\vec{E}_{t}^{e} \times (\vec{H}_{t}^{e})^{*}) \cdot \hat{z}\text{d}\Omega$$

由式（5.1.12）和（5.1.13）可把横向分量通过纵向分量表示出来，所以只要求得了纵向分量就可以计算各个模式所携带的电磁功率。

5.2　柱形金属波导问题的本征函数

从上面关于柱形金属波导中电磁场的分析中我们已发现，对于均匀各向同性无耗媒质填充的均匀无限长柱形波导而言，其中传输的电磁场可通过电场和磁场的纵向分量表示出来，从而把对电磁场的分析变成一个标量问题，而且成为一个有限域的本征值问题。下面对这类问题进行具体讨论。

5.2.1　柱形金属波导中电磁场的本征值问题

在讨论柱形金属波导的自然模时，我们设定波导内没有场源存在。对于考虑的均匀无耗媒质区域，电磁场应满足齐次亥姆霍兹算子方程，即有

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + k^2 \vec{E}(\vec{r}) &= 0 \\ \nabla^2 \vec{H}(\vec{r}) + k^2 \vec{H}(\vec{r}) &= 0 \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

其中，$k^2 = \omega^2 \varepsilon\mu$。在不考虑波导壁的损耗时，波导壁上电场和磁场分别满足第一类和第二类齐次边界条件。在以上条件下，只要场在波导的无限远端满足极限条件，所考虑的电磁场就是平方可积的，从而可在希尔伯特矢量函数空间讨论问题。于是，根据已知的数学理论，算子$\nabla^2 + k^2$对于波导内电磁场的自然模式是自伴的，式（5.2.1）连同对应的齐次边界条件就构成算子$\nabla^2 + k^2$当本征值为零时，如式（5.1.18）所示的本征值问题，或者说自然电磁模式是算子$\nabla^2 + k^2$零空间中的矢量本征函数。

当我们只考虑波导中的传输模式时，求解波导中的自然模式就归结为在二维封闭空间求解算子方程（5.1.10）和（5.1.11）。这不仅降低了求解空间的维度，而且把矢量函数空间的问题简化为标量函数空间中的问题，虽然问题的性质没有变化，但求解的过程要简单很多。

当我们把问题归结为求解算子方程（5.1.18）时，就更明确地变成算子$\nabla^2 + k^2$的在有限域Ω的标量函数空间中的正规本征值问题，该算子的定义域仍然是$D(A)$。由于算子$\nabla^2 + k^2$是自伴的，所以本征值γ^2是分立的实值，不同本征值所对应的本征函数是相互正交的。而且本征函数构成D（A）函数空间的一个函数基，从而可把该空间中的任意元素都可用所述本征函数表示为广义傅里叶级数。这一点很重要，这种性质可应用于解决很多复杂的电磁场问题。

本来δ函数不属于平方可积的经典函数类，因此不能在经典意义下把它用本征函数展开，但是在分布论的意义下这种展开又是可以接受的。由此我们可以把δ函数表示成各种形式，这对具体应用是很有意义的。

设 ψ_n 为正交归一化的本征函数系列，把二维 δ 函数 $\delta(\vec{\rho}-\vec{\rho}')$ 表示为

$$\delta(\vec{\rho}-\vec{\rho}') = \sum_n \alpha(\vec{\rho}')\psi_n(\vec{\rho}) \tag{5.2.2}$$

若 $\psi_n(\vec{\rho})$ 满足正交关系

$$\int_\Omega \psi_n(\vec{\rho}')\psi_{\mathrm{m}}(\vec{\rho})^* \mathrm{d}\Omega = \delta_{m,n} \tag{5.2.3}$$

则通过对式两侧乘以 $\psi_{\mathrm{m}}(\vec{\rho})$，然后在 Ω 上积分可以求得

$$\alpha(\vec{\rho}') = \psi_n(\vec{\rho}')^*$$

于是我们有

$$\delta(\vec{\rho}-\vec{\rho}') = \sum_n \psi_n(\vec{\rho})\psi_n(\vec{\rho}')^* \tag{5.2.4}$$

此式称为 δ 函数的谱表示，也称为本征函数的完备性关系。

5.2.2 矩形域中的本征函数

现在我们考虑矩形理想金属波导中的二维本征值问题。设波导的宽边的宽度为 a，窄边的宽度为 b. 把波导的二维区域置于直角坐标系中，原点取在区域的一角，宽边与 x 轴重合，窄边与 y 轴重合。因此波导的两个宽边在坐标系中的位置为（x，0）和（x，b），其中 $0\leqslant x\leqslant a$；宽边的位置则是（0，y）和（a，y），其中 $0\leqslant y\leqslant b$。

若用 ψ 表示电场或磁场的纵向分量，则我们研究的二维本征值问题成为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k^2\right)\psi^{e,h}(x,y) = -(\gamma^2)^{e,h}\psi^{e,h}(x,y) \tag{5.2.5}$$

$$\begin{aligned} &\psi^e(x,y)\big|_{x=0} = \psi^e(x,y)\big|_{x=a} = 0,\quad 0\leqslant y\leqslant b \\ &\psi^e(x,y)\big|_{y=0} = \psi^e(x,y)\big|_{y=b} = 0,\quad 0\leqslant x\leqslant a \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

$$\begin{aligned} &\left.\frac{\partial\psi^h(x,y)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial\psi^h(x,y)}{\partial x}\right|_{x=a} = 0,\quad 0\leqslant y\leqslant b \\ &\left.\frac{\partial^2\psi^h(x,y)}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial^2\psi^h(x,y)}{\partial y}\right|_{y=b} = 0,\quad 0\leqslant x\leqslant a \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

通常可用分离变量法求解这类简单的本征值问题，为此设

$$\psi^{e,h}(x,y) = \psi_x^{e,h}(x)\psi_y^{e,h}(y) \tag{5.2.8}$$

把这一表示代入式（5.2.5）~（5.2.7）就可把它们化为以下一维本征值问题。

对 TM(E) 模有

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2\psi_x^e(x)}{\mathrm{d}x^2} + (\gamma_x^2)^e\psi_x^e(x) = 0 \\ &\psi_x^e(x)\big|_{x=0} = \psi_x^e(x)\big|_{x=a} = 0 \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2\psi_y^e(y)}{\mathrm{d}y^2} + (\gamma_y^2)^e\psi_y^e(y) = 0 \\ &\psi_y^e(y)\big|_{y=0} = \psi_y^e(y)\big|_{y=b} = 0 \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

对 TE(H) 模有

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi_x^h(x)}{\mathrm{d}x^2} + (\gamma_x^2)^h\psi_x^h(x) = 0$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}\psi_x^h(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\mathrm{d}\psi_x^h(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a} = 0 \tag{5.2.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi_y^h(y)}{\mathrm{d}y^2} + (\gamma_y^2)\psi_y^h(y) = 0$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}\psi_y^h(y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\mathrm{d}\psi^h(y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=b} = 0 \tag{5.2.12}$$

$\gamma_x^{e,h}$ 和 $\gamma_y^{e,h}$ 满足以下关系。

$$(\gamma_x^2)^{e,h} + (\gamma_y^2)^{e,h} - k^2 = (\gamma^2)^{e,h} \tag{5.2.13}$$

式（5.2.9）~（5.2.12）所表示的都是简单的一维斯特姆－刘维尔正规本征值问题，其本征值是分立的，经规一化后本征函数成为标准正交序列。因为求解过程应该是很熟悉的，下面就直接给出结果。

$$\psi_x^e(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right),\quad m = 1,2,\cdots$$
$$\psi_y^e(y) = \sqrt{\frac{2}{b}}\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right),\quad n = 1,2,\cdots \tag{5.2.14}$$

$$\psi_x^h(x) = \sqrt{\frac{e_m}{a}}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right),\quad m = 0,1,2,\cdots$$
$$\psi_y^h(y) = \sqrt{\frac{e_n}{b}}\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right),\quad n = 0,1,2,\cdots \tag{5.2.15}$$

$$\gamma_x^{e,h} = \frac{m\pi}{a},\qquad \gamma_y^{e,h} = \frac{n\pi}{b}$$

其中，$e_{\mathrm{m}} = 1$；$m = 0$；$e_{\mathrm{m}} = 2$；$m > 0$。

由此可得相应的二维本征值及对应的本征函数

$$\psi^e(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$
$$(\gamma^2)^e = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2,\quad m,\ n = 1,\ 2,\ \cdots \tag{5.2.16}$$

$$\psi^h(x,y) = \sqrt{\frac{e_{\mathrm{m}}e_n}{ab}}\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$
$$(\gamma^2)^h = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2,\quad m,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{5.2.17}$$

这两组本征函数在其对应算子的定义域内都是完备的正交基，它们分别可以表示成以下形式的完备性关系。

$$\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}\,') = \frac{4}{ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$\cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x'\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y'\right), \quad 0 < x,x' < a, \quad 0 < y,y' < b \quad (5.2.18)$$

$$\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}') = \frac{1}{ab}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} e_m e_n \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$\cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a}x'\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y'\right), \quad 0 < x,x' < a, \quad 0 < y,y' < b \quad (5.2.19)$$

根据以上本征函数容易计算出矩形波导中 TM 和 TE 模各分量的表达式并讨论各模式电磁场的结构和传输特性。

5.2.3 圆形区域中的本征函数

对于理想金属圆波导我们所讨论的是圆形区域的二维本征值问题。把该区域用极坐标表示，坐标原点与圆心重合，圆的半径为 a，用极坐标表示就是 $\rho = a$，$0 \leqslant \phi < 2\pi$。这时所讨论的本征值问题可表示为

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + k^2\right]\psi^{e,h}(\rho,\varphi) = -(\gamma^{e,h})^2\psi^{e,h}(\rho,\varphi) \quad (5.2.20)$$

$\psi^{e,h}(\rho,\varphi)$ 还要满足以下条件。

（1）有限值和单值。

（2）满足

$$\psi^{e}(\rho,\varphi)\big|_{\rho=a} = 0, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi \quad (5.2.21)$$

$$\left.\frac{\partial\psi^{h}(\rho,\varphi)}{\partial\rho}\right|_{\rho=a} = 0, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi \quad (5.2.22)$$

若令

$$\psi^{e,h}(\rho,\varphi) = \psi_{\rho}^{e,h}(\rho)\psi_{\phi}^{e,h}(\varphi) \quad (5.2.23)$$

可把以上二维本征值问题化作以下两个一维本征值问题。

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi_{\varphi}^{e,h}(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2} + m^2\psi_{\phi}^{e,h}(\varphi) = 0 \quad (5.2.24)$$

$$\psi_{\varphi}^{e,h}(\varphi) = \psi_{\varphi}^{e,h}(\phi + 2\pi) \quad (5.2.25)$$

$$\rho^2\frac{\mathrm{d}^2\psi_{\rho}^{e,h}(\rho)}{\mathrm{d}\rho^2} + \rho\frac{\mathrm{d}\psi_{\rho}^{e,h}(\rho)}{\mathrm{d}\rho} + ((k_t^{e,h})^2\rho^2 - m^2)\psi_{\rho}^{e,h}(\rho) = 0 \quad (5.2.26)$$

$$\psi_{\rho}^{e}(\rho)\big|_{\rho=a} = \left.\frac{\partial\psi_{\rho}^{h}(\rho)}{\partial\rho}\right|_{\rho=a} = 0 \quad (5.2.27)$$

$$\psi_{\rho}^{e,h}(\rho)\ \text{为有限值，}\quad 0 \leqslant \rho \leqslant a$$

其中，$(k_t^{e,h})^2 = (k)^2 + (\gamma^{e,h})^2$。

这仍是很普通的正规本征值问题，我们只需直接给出归一化的本征函数及对应于它们的本征值。

$$\psi_{\varphi}^{e,h}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \quad (5.2.28)$$

$$\psi_\rho^e(\rho) = \frac{\sqrt{2}}{aJ_{m+1}(k_t^e a)} J_m(k_t^e \rho) \tag{5.2.29}$$

$$k_t^e = \frac{x_{mn}}{a}, \quad J_m(x_{mn}) = 0, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots; \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$\psi_\rho^h(\rho) = \frac{\sqrt{2}k_t^h}{\sqrt{(k_t^h a)^2 - m^2} J_m(k_t^h a)} J_m(k_t^h \rho)$$

$$k_t^h = \frac{x'_{mn}}{a}, \quad J'_m(x'_{mn}) = 0, m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots; n = 1, 2, \cdots \tag{5.2.30}$$

进一步我们可以得到圆形区域的二维本征函数，其中

$$\begin{aligned}\psi^e(\vec{\rho}) &= \psi_\rho^e(\rho)\psi_\varphi^e(\varphi) \\ &= \frac{1}{a\sqrt{\pi}J_{m+1}(k_t^e a)} J_m(k_t^e \rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\end{aligned} \tag{5.2.31}$$

$$\psi^h(\vec{\rho}) = \frac{k_t^h}{\sqrt{\pi}\sqrt{(k_t^h a)^2 - m^2} J_m(k_t^h a)} J_m(k_t^h \rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi} \tag{5.2.32}$$

它们构成相应算子定义域的完备正交基，其完备性关系便是

$$\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}') = \frac{1}{\pi a^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_m(k_t^e \rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi} J_m(k_t^e \rho')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi'}}{J_{m+1}^2(k_t^e a)} \tag{5.2.33}$$

$$\begin{aligned}\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}') &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(k_t^h)^2}{[(k_t^h a)^2 - m^2] J_m(k_t^h a)} \\ &\quad \cdot J_m(k_t^h \rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi} J_m(k_t^h \rho')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi'}\end{aligned} \tag{5.2.34}$$

和矩形波导的情况一样，求得了本征函数，或者说知道了电磁场的纵向分量的解答，横向分量的计算就变得很简单了。由于篇幅的限制这里不再详细列出。这些资料在很多相关的书籍中都可找到。

5.3　柱形金属波导的非均匀性及其积分算子方程表示

柱形金属波导的作用不仅用于直接传输电磁能量，而且要用它们构成各种功能部件，这需要在其中加入填充物，在波导壁上开孔以及各种连接等，这就构成了波导的各种非均匀性。非均匀性的分析是波导理论的重要部分，内容非常丰富，解决问题的方法也多种多样，这里仅就积分方程法作简要介绍。

5.3.1　理想导体柱形波导的并矢格林函数

作为均匀波导在其纵向延伸至无穷远，为了使所讨论的电磁场量属于矢量希尔伯特函数空间，我们总是假定场量在无穷处趋于零。因此作为均匀波导中的电磁场，开始可认为限定在有限区域，而后再让波导的两端趋于无穷。所以，我们把问题限制在一个有限区域 V 内进行讨论，该区域的边界 S 足够光滑，其内部为均匀各向同性的无耗媒质，其特性由 ε 和 μ 表示。如果该区域内存在外加电流

$\vec{J}_{\text{imp}}(\vec{r})$，$\vec{r}\in V_{\text{imp}}$，$V_{\text{imp}}$为$\vec{J}_{\text{imp}}(\vec{r})$ 的紧支撑集。于是，区域 V 中的电磁场满足两个麦克斯韦旋度方程

$$\nabla\times\vec{E}(\vec{r}) = -\text{i}\omega\mu\,\vec{H}(\vec{r}) \tag{5.3.1}$$

$$\nabla\times\vec{H}(\vec{r}) = \text{i}\omega\varepsilon\,\vec{E}(\vec{r}) + \vec{J}_{\text{imp}}(\vec{r}) \tag{5.3.2}$$

这是一对耦合方程，消除一个场量后，就可得到电场和磁场分别满足的独立的矢量微分方程

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}(\vec{r}) - k^2\,\vec{E}(\vec{r}) = -\text{i}\omega\mu\,\vec{J}_{\text{imp}}(\vec{r}),\quad \vec{r}\in V \tag{5.3.3}$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{H}(\vec{r}) - k^2\,\vec{H}(\vec{r}) = \nabla\times\vec{J}_{\text{imp}}(\vec{r}),\quad \vec{r}\in V \tag{5.3.4}$$

我们已经讨论过，为了求解非齐次矢量微分算子方程（5.3.3），可以先求出电型并矢格林函数 $\bar{\bar{G}}_e(\vec{r},\ \vec{r}\,')$，它满足方程

$$\nabla\times\nabla\times\bar{\bar{G}}_e(\vec{r},\vec{r}\,') - k^2\bar{\bar{G}}_e(\vec{r},\vec{r}\,') = \bar{\bar{I}}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \tag{5.3.5}$$

为了求解磁场$\vec{H}(\vec{r})$，即求解方程（5.3.4），我们可先求磁型并矢格林函数 $\bar{\bar{G}}_m(\vec{r},\ \vec{r}\,')$，它应满足方程

$$\nabla\times\nabla\times\bar{\bar{G}}_m(\vec{r},\vec{r}\,') - k^2\bar{\bar{G}}_m(\vec{r},\vec{r}\,') = \nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\times\bar{\bar{I}} \tag{5.3.6}$$

利用恒等式$\nabla\times(\psi\bar{\bar{I}})=\nabla\psi\times\bar{\bar{I}}$，对方程（5.3.5）两侧求旋度即可得

$$\Delta\times\Delta\times(\nabla\times\bar{\bar{G}}_e) - k^2\,\nabla\times\bar{\bar{G}}_e = \nabla\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\times\bar{\bar{I}}$$

把它与方程（5.3.6）比较就可知 $\bar{\bar{G}}_e$ 和 $\bar{\bar{G}}_m$ 之间存在关系

$$\bar{\bar{G}}_m(\vec{r},\vec{r}\,') = \nabla\times\bar{\bar{G}}_e(\vec{r},\vec{r}\,') \tag{5.3.7}$$

再利用这一关系和方程（5.3.6）又可验证以下关系的正确性。

$$\bar{\bar{G}}_e(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{k^2}\left[\nabla\times\bar{\bar{G}}_m(\vec{r},\vec{r}\,') - \bar{\bar{I}}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\right] \tag{5.3.8}$$

如果把方程（5.3.1）和（5.3.2）写成

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{\text{i}}{\omega\mu}\nabla\times\vec{E}(\vec{r})$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\text{i}}{\omega\varepsilon}\left[\nabla\times\vec{H}(\vec{r}) - \vec{J}_{\text{imp}}(\vec{r})\right]$$

可看出电场与磁场之间的关系与所对应的格林函数之间关系的类似性。

待求的 V 内的电磁场除了满足各自的控制方程外，还必须满足 S 上的边界条件。

对理想电壁

$$\vec{n}\times\vec{E}(\vec{r})\big|_S = 0 \tag{5.3.9}$$

$$\vec{n}\times\nabla\times\vec{H}(\vec{r})\big|_S = 0 \tag{5.3.10}$$

对理想磁壁

$$\vec{n}\times\vec{H}(\vec{r})\big|_S = 0 \tag{5.3.11}$$

$$\vec{n}\times\nabla\times\vec{E}(\vec{r})\big|_S = 0 \tag{5.3.12}$$

所定义的并矢格林函数也应满足相应的边界条件。根据对边界条件的习惯分

类，满足第一类齐次边界条件的加角标（1），满足第二类齐次边界条件的加角标（2）。因此对应于满足边界条件（5.3.9）的电场的为并矢格林函数 $\overline{\overline{G}}_e^{(1)}(\vec{r},\vec{r}')$，对应于满足边界条件（5.3.11）的磁场的为并矢格林函数 $\overline{\overline{G}}_m^{(1)}(\vec{r},\vec{r}')$，对应于满足边界条件（5.3.12）的电场的并矢格林函数为 $\overline{\overline{G}}_e^{(2)}(\vec{r},\vec{r}')$，对应于满足边界条件（5.3.10）的磁场的并矢格林函数为 $\overline{\overline{G}}_m^{(2)}(\vec{r},\vec{r}')$。它们所应满足的边界条件分别为

$$\vec{n}\times\overline{\overline{G}}_e^{(1)}(\vec{r},\vec{r}')\big|_S=0 \tag{5.3.13}$$

$$\vec{n}\times\overline{\overline{G}}_{\mathrm{m}}^{(1)}(\vec{r},\vec{r}')\big|_S=0 \tag{5.3.14}$$

$$\vec{n}\times\nabla\times\overline{\overline{G}}_e^{(2)}(\vec{r},\vec{r}')\big|_S=0 \tag{5.3.15}$$

$$\vec{n}\times\nabla\times\overline{\overline{G}}_m^{(2)}(\vec{r},\vec{r}')\big|_S=0 \tag{5.3.16}$$

除了以上边界条件外，对于无限长柱形波导中的并矢格林函数还必须满足在无限远处趋于零的附加条件。

这些并矢格林函数之间的关系总起来可表示为

$$\overline{\overline{G}}_{\mathrm{m}}^{(1,2)}(\vec{r},\vec{r}')=\nabla\times\overline{\overline{G}}_e^{(2,1)}(r,\vec{r}') \tag{5.3.17}$$

$$\overline{\overline{G}}_e^{(1,2)}(\vec{r},\vec{r}')=\frac{1}{k^2}\left[\nabla\times\overline{\overline{G}}_m^{(2,1)}(\vec{r},\vec{r}')-\overline{\overline{I}}\delta(\vec{r}-\vec{r}')\right] \tag{5.3.18}$$

此外，它们之间还满足如下的对称关系。

$$\overline{\overline{G}}_e^{(1,2)}(\vec{r},\vec{r}')=\left[\overline{\overline{G}}_e^{(1,2)}(\vec{r}',\vec{r})\right]^{\mathrm{T}} \tag{5.3.19}$$

$$\overline{\overline{G}}_m^{(1,2)}(\vec{r},\vec{r}')=\left[\overline{\overline{G}}_m^{(2,1)}(\vec{r}',\vec{r})\right]^{\mathrm{T}} \tag{5.3.20}$$

$$\nabla\times\overline{\overline{G}}_e^{(1,2)}(\vec{r},\vec{r}')=\left[\nabla'\times\overline{\overline{G}}_e^{(2,1)}(\vec{r}',\vec{r})\right]^{\mathrm{T}} \tag{5.3.21}$$

$$\nabla\times\overline{\overline{G}}_m^{(1,2)}(\vec{r},\vec{r}')=\left[\nabla'\times\overline{\overline{G}}_m^{(1,2)}(\vec{r}',\vec{r})\right]^{\mathrm{T}} \tag{5.3.22}$$

求出并矢格林函数的明晰表达式是一个比较复杂的过程，而且只有对比较简单的一些典型区域构形才能完成。有关资料可在一些专门的文献中找到。

5.3.2　柱形金属波导中的障碍物

柱形波导非均匀性之一是在其中存在有限体积的物体，现在我们考虑障碍物为理想导体的情况。

假设所考虑的波导空间为 V，其表面用 S_g 表示，障碍存在于 V 中，其表面用 S_a 表示。V 中存在外加电流源 $\vec{J}_{\mathrm{imp}}(\vec{r})$，它有紧支撑集 V_{imp}。

显然，在理想均匀波导中电流源所产生的电场满足方程

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}(\vec{r})-k^2\vec{E}(\vec{r})=-\mathrm{i}\omega\mu\vec{J}_{\mathrm{imp}}(\vec{r}),\quad \vec{r}\in V \tag{5.3.23}$$

其中，$\vec{E}(\vec{r})$ 满足边界条件

$$\vec{n}\times\vec{E}(\vec{r})\big|_S=0,\quad S=S_g\cup S_a \tag{5.3.24}$$

$$\lim_{z\to\pm\infty}\vec{E}(\vec{r})=0 \tag{5.3.25}$$

为保证条件（5.3.25）的实现，需要假定波导中存在无限小的损耗，这同时

也保证了波导端不存在入射波。波导中沿 z 传播的波表示为 $e^{-\gamma z}$，$\mathrm{Re}(\gamma)\geqslant 0$，$\mathrm{Im}(\gamma)<0$。

在该问题中定义算子 L：$L^2(V)^3\to L^2(V)^3$，其中

$$L\vec{E}(\vec{r}) = \nabla\times\nabla\times\vec{E}(\vec{r}) \tag{5.3.26}$$

$$D(L) = \{\vec{E}(\vec{r}):\vec{E}(\vec{r}),\nabla\times\nabla\times\vec{E}(\vec{r}) \in L^2(V)^3,$$
$$\vec{n}\times\vec{E}(\vec{r})\big|_S = 0, \lim_{z\to\pm\infty} = \vec{E}(\vec{r}) = 0\}$$

已经证明，这样定义的算子 L 是自伴的，当 k 为实数时，$L+k^2$ 也是自伴的。所以，式（5.3.23）~（5.3.25）定义了一个自伴边值问题。于是算子 $L+k^2$ 的本征函数构成 $D(L)$ 的一个完备基，其中的$\vec{E}(\vec{r})\in L^2(V)^3$ 可用该完备基展开。

为了求解以上边值问题，可从求解相应的并矢格林函数 $\bar{\bar{G}}_e^{(1)}(\vec{r},\vec{r}')$ 入手，该并矢格林函数满足

$$\nabla\times\nabla\times\bar{\bar{G}}_e^{(1)}(\vec{r},\vec{r}') - k^2\bar{\bar{G}}_e^{(1)}(\vec{r},\vec{r}') = \bar{\bar{I}}\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$
$$\vec{n}\times\bar{\bar{G}}_e^{(1)}(\vec{r},\vec{r}')\big|_{S_g} = 0 \tag{5.3.27}$$

这里的 $\bar{\bar{G}}_e^{(1)}$ 只要求满足波导壁上的边界条件，与障碍物的存在无关，这样可使 $\bar{\bar{G}}_e^{(1)}$ 的确定更容易且更具普遍性。

用 $\bar{\bar{G}}_e^{(1)}(\vec{r},\vec{r}')$ 从右方点乘式（5.3.23），而用$\vec{E}(\vec{r})$ 从左方点乘式（5.3.27），然后将两式相减便可得到

$$[\nabla\times\nabla\times\vec{E}(\vec{r})]\cdot\bar{\bar{G}}_e^{(1)}(\vec{r},\vec{r}') - \vec{E}\cdot[\nabla\times\nabla\times\bar{\bar{G}}_e^{(1)}(\vec{r},\vec{r}')]$$
$$= -\mathrm{i}\omega\mu\vec{J}_{\mathrm{imp}}(\vec{r})\cdot\bar{\bar{G}}_e^{(1)}(\vec{r},\vec{r}') - \vec{E}(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{5.3.28}$$

对上式应用矢量－并矢格林第二定理

$$\int_V[(\nabla\times\nabla\times\vec{A})\cdot\bar{\bar{B}} - \vec{A}\cdot(\nabla\times\nabla\times\bar{\bar{B}})]\mathrm{d}V$$
$$= \oint_S\vec{n}\cdot[A\times\nabla\times\bar{\bar{B}} + (\nabla\times\vec{A})\times\bar{\bar{B}}]\mathrm{d}S \tag{5.3.29}$$

我们又有

$$\vec{E}(\vec{r}') = -\mathrm{i}\omega\mu\int_{V_{\mathrm{imp}}}\vec{J}_{\mathrm{imp}}(\vec{r})\cdot\bar{\bar{G}}_e^{(1)}(\vec{r},\vec{r}')\mathrm{d}V$$
$$-\oint_S\vec{n}\cdot\{\vec{E}(\vec{r})\times\nabla\times\bar{\bar{G}}_e^{(1)}(\vec{r},\vec{r}') + [\nabla\times\vec{E}(\vec{r})]\times\bar{\bar{G}}_e^{(1)}(\vec{r},\vec{r}')\}\mathrm{d}S$$
$$\tag{5.3.30}$$

其中：用到了$\vec{E}(\vec{r}') = \int_V\vec{E}(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r}')\mathrm{d}V$。

考虑到边界条件（5.3.24）和（5.3.27）和恒等式（$\vec{C}\times\vec{A}$）$\cdot\vec{B}=\vec{C}\cdot$（$\vec{A}\times\vec{B}$），可把式（5.3.30）改写成

$$\vec{E}(\vec{r}') = -\mathrm{i}\omega\mu\int_{V_{\mathrm{imp}}}\vec{J}_{\mathrm{imp}}(\vec{r})\cdot\bar{\bar{G}}_e^{(1)}(\vec{r},\vec{r}')\mathrm{d}V$$
$$+\oint_{S_a}[\vec{n}_a\times\nabla\times\vec{E}(\vec{r})]\cdot\bar{\bar{G}}_e^{(1)}(\vec{r},\vec{r}')\mathrm{d}S \tag{5.3.31}$$

定义诱导电流

$$\vec{J}_a(\vec{r}) = \vec{n}_a \times \vec{H}(\vec{r}) = \frac{\mathrm{i}}{\omega\mu}\vec{n}_a \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}), \quad \vec{r} \in S_a$$

并利用关系

$$\vec{J}(\vec{r}') \cdot \overline{\overline{G}}_e^{(1)}(\vec{r}',\vec{r}) = \overline{\overline{G}}_e^{(1)}(\vec{r}',\vec{r})^{\mathrm{T}} \cdot \vec{J}(\vec{r}') = \overline{\overline{G}}_e^{(1)}(\vec{r},\vec{r}') \cdot J(\vec{r}')$$

则把式（5.3.31）中的$\vec{r}$和$\vec{r}'$交换就又得到

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{i}\omega\mu\int_{V_{\mathrm{imp}}} \overline{\overline{G}}_e^{(1)}(\vec{r},\vec{r}') \cdot \vec{J}(\vec{r}')\mathrm{d}V' - \mathrm{i}\omega\mu\int_{S_a} \overline{\overline{G}}_e^{(1)}(\vec{r},\vec{r}') \cdot \vec{J}_a(\vec{r}')\mathrm{d}S' \tag{5.3.32}$$

这种表示可使我们认为，这里表示的$\vec{E}(\vec{r})$是外加电流和障碍物表面诱导电流所产生的电场之和，其中诱导电流是未知的。为了求出诱导电流，可用$\vec{n}_a$叉乘式（5.3.32），由于$\vec{n}_a \times \vec{E}(\vec{r}) = 0$，由此可得

$$\vec{n}_a \times \int_{S_a} \overline{\overline{G}}_e^{(1)}(\vec{r},\vec{r}') \cdot J_a(\vec{r}')\mathrm{d}S' = \vec{n}_a \times \int_{V_{\mathrm{imp}}} \overline{\overline{G}}_e^{(1)}(\vec{r},\vec{r}') \cdot \vec{J}_{\mathrm{imp}}(\vec{r}')\mathrm{d}V' \tag{5.3.33}$$

对于给定的柱形波导，可认为$\overline{\overline{G}}_e^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')$是已知的，故上式右侧的积分也是已知的，未知的是障碍物上的诱导电流，而这一电流是处于积分号内。所以，诱导电流满足的是一个积分算子方程，其积分核为$\overline{\overline{G}}_e^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}')$，它显然属于第一类弗雷德霍姆积分方程。虽然求解这类积分方程并非易事，但求得其数值解却不是很困难的。所以，我们常常可把列出积分方程作为解决问题的一种重要手段。

在求得电场$\vec{E}(\vec{r})$后，就可由麦克斯韦方程求得磁场。其实，磁场也可以由诱导电流来直接决定。磁场所满足的方程为

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) - k^2\vec{H}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{J}_{\mathrm{imp}}(\vec{r}), \quad \vec{r} \in V \tag{5.3.34}$$

$$\vec{n} \times \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} \in S \tag{5.3.35}$$

$$\lim_{z\to\pm\infty} \vec{H}(\vec{r}) = 0 \tag{5.3.36}$$

对应于此的并矢格林函数为

$$\nabla \times \nabla \times G_e^{(2)}(\vec{r},\vec{r}') - k^2\overline{\overline{G}}_e^{(2)}(\vec{r},\vec{r}') = \overline{\overline{I}}\delta(\vec{r}-\vec{r}'), \quad \vec{r},\vec{r}' \in V \tag{5.3.37}$$

$$\vec{n} \times \nabla \times \overline{\overline{G}}_e^{(2)}(\vec{r},\vec{r}') = 0, \quad \vec{r} \in S_g \tag{5.3.38}$$

$$\lim_{z\to\pm\infty} \overline{\overline{G}}_e^{(2)}(\vec{r},\vec{r}') = 0 \tag{5.3.39}$$

利用以方程和条件以及矢量－并矢格林第二定理，与上面完全类似的方法又可得到

$$\vec{H}(\vec{r}') = \int_{V_{\mathrm{imp}}} [\nabla \times \vec{J}_{\mathrm{imp}}(\vec{r})] \cdot \overline{\overline{G}}_e^{(2)}(\vec{r},\vec{r}')\mathrm{d}V + \int_{S_a} \vec{J}_a(\vec{r}) \cdot [\nabla \times \overline{\overline{G}}_e^{(2)}(\vec{r},\vec{r}')]\mathrm{d}S \tag{5.3.40}$$

利用恒等式

$$
\begin{aligned}
[\nabla' \vec{J}(\vec{r'})] \cdot \overline{\overline{G}}_e^{(2)}(\vec{r'}, r) &= [\overline{\overline{G}}_e^{(2)}(\vec{r'}, \vec{r})]^{\mathrm{T}} \cdot [\nabla' \times \vec{J}(\vec{r'})] \\
&= \overline{\overline{G}}_e^{(2)}(\vec{r}, \vec{r'}) \cdot [\nabla' \times \vec{J}(\vec{r'})]
\end{aligned} \tag{5.3.41}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{J}(\vec{r'}) \cdot [\nabla' \times \overline{\overline{G}}_e^{(2)}(\vec{r'}, \vec{r})] &= [\nabla' \times \overline{\overline{G}}_e^{(2)}(\vec{r'}, \vec{r})]^{\mathrm{T}} \cdot \vec{J}(\vec{r'}) \\
&= [\nabla \times \overline{\overline{G}}_e^{(1)}(\vec{r}, \vec{r'})] \cdot \vec{J}(\vec{r'})
\end{aligned} \tag{5.3.42}
$$

当把式（5.3.40）中的$\vec{r}$和$\vec{r'}$对换就能得到

$$
\begin{aligned}
\vec{H}(\vec{r}) = &\int_{V_{\mathrm{imp}}} \overline{\overline{G}}_e^{(2)}(\vec{r}, \vec{r'}) \cdot [\nabla' \times \vec{J}_{\mathrm{imp}}(\vec{r'})] \mathrm{d}V' \\
&+ \int_{S_a} [\nabla \times \overline{\overline{G}}_e^{(1)}(\vec{r}, \vec{r'})] \cdot \vec{J}_a(\vec{r'}) \mathrm{d}S'
\end{aligned} \tag{5.3.43}
$$

这样，一旦求得了$\vec{J}_a(\vec{r})$ 就可由式（5.3.43）计算出存在金属障碍物时的波导中的磁场。当然利用边界条件（5.3.35）也可以建立关于$\vec{J}_a(\vec{r})$ 的另一种形式的积分方程

$$
\begin{aligned}
&\vec{n} \times \nabla \times \int_{V_{\mathrm{imp}}} \overline{\overline{G}}_e^{(2)}(\vec{r}, \vec{r'}) \cdot [\nabla' \times \vec{J}_{\mathrm{imp}}(\vec{r'})] \mathrm{d}V' \\
&+ \vec{n} \times \nabla \times \int_{S_a} [\nabla \times \overline{\overline{G}}_e^{(1)}(\vec{r}, \vec{r'})] \cdot \vec{J}_a(\vec{r'}) \mathrm{d}S'
\end{aligned} \tag{5.3.44}
$$

显然，这一方程比（5.3.33）还要复杂。所以，一般情况下不会采用后一种作法。

在上面的讨论中我们只考虑了存在一个金属障碍物的情况，不难理解，以上方法可以非常直接地推广到存在多个金属物的情况。

5.3.3　壁上存在开孔的金属柱形波导

如果波导的金属壁上带有孔隙，也会破坏波导的均匀性。在这种情况下会有电磁能量从波导中外漏产生辐射，同时也引起传输电磁波的反射。为了计算这些效应需要了解孔隙上的电磁场分布。

该问题与前面所讨论的情况有些类似。首先我们仍然设所考虑的波导空间为V，其表面仍用S表示，其中一部分为波导壁S_g，另一部分为开孔面积S_a（先考虑一个孔的情况），于是我们有

$$
S = S_g \cup S_a \tag{5.3.45}
$$

波导中仍假定存在场源$\vec{J}_{\mathrm{imp}}(\vec{r})$，其紧支撑集仍为$V_{\mathrm{imp}} \subset V$。在带孔的波导中由源所产生的磁场满足

$$
\nabla \times \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) - k^2 \vec{H}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{J}_{\mathrm{imp}}(\vec{r}), \quad \vec{r} \in V \tag{5.3.46}
$$

$$
\vec{n} \times \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = 0, \quad \vec{r} \in S_g \tag{5.3.47}
$$

$$
\lim_{z \to \pm\infty} \vec{H}(\vec{r}) = 0 \tag{5.3.48}
$$

同时考虑第二类电型并矢格林函数$\overline{\overline{G}}_e^{(2)}$（$\vec{r}$，$\vec{r'}$），它满足

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_e^{(2)}(\vec{r},\vec{r}') - k^2 \bar{\bar{G}}_e^{(2)}(\vec{r},\vec{r}') = \bar{\bar{I}}\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad \vec{r},\vec{r}' \in V \tag{5.3.49}$$

$$\vec{n} \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_e^{(2)}(\vec{r},\vec{r}') = 0, \quad \vec{r} \in S \tag{5.3.50}$$

$$\lim_{z\to\pm\infty} \bar{\bar{G}}_e^{(2)}(\vec{r},\vec{r}') = 0 \tag{5.3.51}$$

按与上面类似的方法并利用矢量－并矢格林第二定理，就能把磁场表示成

$$\vec{H}(\vec{r}') = \int_{V_{\text{imp}}} [\nabla \times \vec{J}_{\text{imp}}(\vec{r})] \cdot \bar{\bar{G}}_e^{(2)}(\vec{r},\vec{r}')\,\mathrm{d}V - \int_{S_a} [\vec{n} \times \nabla \times \vec{H}(\vec{r})] \cdot \bar{\bar{G}}_e^{(2)}(\vec{r},\vec{r}')\,\mathrm{d}S \tag{5.3.52}$$

利用关系（5.3.41）可把上式中的$\vec{r}$和$\vec{r}'$互换并得到

$$\vec{H}(\vec{r}) = \int_{V_{\text{imp}}} \bar{\bar{G}}_e^{(2)}(\vec{r},\vec{r}') \cdot [\nabla' \times J_{\text{imp}}(\vec{r}')]\,\mathrm{d}V' + \mathrm{i}\omega\varepsilon \int_{S_a} \bar{\bar{G}}_e^{(2)}(\vec{r},\vec{r}') \cdot \vec{M}_a(\vec{r}')\,\mathrm{d}S' \tag{5.3.53}$$

其中

$$\vec{M}_a(\vec{r}) = -\vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\vec{n} \times \nabla \times \vec{H}(\vec{r}), \quad \vec{r} \in S_a \tag{5.3.54}$$

也就是说，这里的$\vec{M}_a$ 是孔面上的诱导（或等效）磁流。

与波导内部障碍物问题不同的是，孔面上的磁场还要满足切向分量的连续性条件。假定外部存在的磁场是$\vec{H}_0(\vec{r})$，则应该有

$$\vec{n} \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{n} \times \vec{H}_0(\vec{r}), \quad \vec{r} \in S_a$$

其中，$\vec{H}(\vec{r})$ 由式（5.3.53）确定。要确定$\vec{H}_0(\vec{r})$ 的表达式是很困难的，只有对一些典型的几何形状才能做到。

一旦求得了孔上的等效磁流，由式（5.3.53）就可给出波导中的总磁场，进而可由安培定律确定波导中的总电场。当然，也可以用类似的方法先确定波导中的总电场，其具体过程不再详述。

显然，按照以上方法解决柱形金属波导的非均匀性问题，首先需要知道均匀波导中的相应的并矢格林函数，而要求得具体类型金属波导中的并矢格林函数，又与相应的波导中的电磁场本征值问题相关。所以，波导系统的电磁场本征值问题在电磁场的波导理论中扮演着重要的角色。

5.4　非均匀填充柱形金属波导的变分表示

当柱形金属波导中的媒质在横向不均匀但纵向仍然是均匀的时候，我们称之为非均匀填充的均匀波导。这类波导中的电磁场问题比完全均匀情况要复杂得多，很难求得精确解。在这种情况下常常转为求近似解，尤其是求出某些重要参数的近似解。变分法是求近似解的一个重要途径，而且这种方法可以在更广泛的问题中应用。

5.4.1　本征值问题算子方程的变分原理

在 2.5 中讨论了如何把确定性的微分方程解的问题化为等价的变分问题。现在讨论对本征值问题如何化作等价的变分问题。

设 L 和 B 为线性自伴算子，由它们构成本征方程

$$L\vec{u} = \lambda B\vec{u} \tag{5.4.1}$$

用$\vec{u}$对方程两侧求内积后我们有

$$\langle L\vec{u},\vec{u}\rangle = \lambda\langle B\vec{u},\vec{u}\rangle$$

其中，λ 为实数。由此可以解出

$$\lambda[\vec{u}] = \frac{\langle L\vec{u},\vec{u}\rangle}{\langle B\vec{u},\vec{u}\rangle} = \frac{\langle\vec{u},L\vec{u}\rangle}{\langle\vec{u},B\vec{u}\rangle} \tag{5.4.2}$$

可以证明，当$\vec{u}$为方程（5.4.1）的本征函数时，$\lambda[u]$ 取驻值。

由式（5.4.1）可得

$$\langle L\delta\vec{u},\vec{u}\rangle + \langle L\vec{u},\delta\vec{u}\rangle - \delta\lambda\langle L\vec{u},\vec{u}\rangle - \lambda\langle B\delta\vec{u},\vec{u}\rangle - \lambda\langle B\vec{u},\delta\vec{u}\rangle = 0$$

根据 L 和 B 的自伴性，可把上式改写成

$$\langle\delta\vec{u},L\vec{u}\rangle + \langle L\vec{u},\delta\vec{u}\rangle - \lambda\langle\delta\vec{u},B\vec{u}\rangle - \lambda\langle B\vec{u},\delta\vec{u}\rangle - \delta\lambda\langle B\vec{u},\vec{u}\rangle = 0$$

再考虑到自伴算子的本征值为实数，即

$$\lambda\langle\delta\vec{u},B\vec{u}\rangle = \langle\delta\vec{u},\lambda B\vec{u}\rangle$$

又有

$$\langle\delta\vec{u},L\vec{u}\rangle - \langle\delta\vec{u},\lambda B\vec{u}\rangle + \langle L\vec{u},\delta\vec{u}\rangle - \lambda\langle B\vec{u},\delta\vec{u}\rangle - \delta\lambda\langle B\vec{u},\vec{u}\rangle = 0 \tag{5.4.3}$$

由于当$\vec{u}\neq 0$ 时，$\langle B\vec{u},\ \vec{u}\rangle\neq 0$，故可由上式看出，当$\vec{u}$满方程（5.4.1）时，$\delta\lambda[u]=0$，也就是说式（5.4.1）的本征函数使 $\lambda[u]$ 取驻值。反之，当$\vec{u}$使 $\delta\lambda[\vec{u}]=0$ 时，由于$\delta\vec{u}$的任意性，则$\vec{u}$必须满足 $L\vec{u}=\lambda B\vec{u}$。

如果算子 L 和 B 不是自伴的，则需要用另外方法解决。我们引入一个辅助方程

$$L^a\vec{v} = \lambda B^a\vec{v} \tag{5.4.4}$$

其中，L^a 和 B^a 为 L 和 B 的伴随算子。

把方程（5.4.1）的两侧用$\vec{v}$求内积可得

$$\langle L\vec{u},\vec{v}\rangle - \lambda\langle B\vec{u},\vec{v}\rangle = 0 \tag{5.4.5}$$

可以证明，方程（5.4.1）和（5.4.4）的解与泛函

$$\lambda[\vec{u},\vec{v}] = \frac{\langle L\vec{v},\vec{v}\rangle}{\langle B\vec{u},\vec{v}\rangle} \tag{5.4.6}$$

取驻值等价。

由式（5.4.5）可得

$$\langle L\delta\vec{u},\vec{v}\rangle + \langle L\vec{u},\delta\vec{v}\rangle - \lambda\langle B\delta\vec{u},\vec{v}\rangle - \lambda\langle B\vec{u},\delta\vec{v}\rangle - \delta\lambda\langle B\vec{u},\vec{v}\rangle = 0$$

考虑到

$$\langle L\delta \vec{u},\vec{v}\rangle = \langle \delta \vec{u},L^a \vec{v}\rangle$$
$$\langle B\delta \vec{u},\vec{v}\rangle = \langle \delta \vec{u},B^a \vec{v}\rangle$$

则又有

$$\langle L \vec{u},\delta \vec{v}\rangle + \langle \delta \vec{u},L^a v\rangle - \lambda\langle B \vec{u},\delta \vec{v}\rangle - \lambda\langle \delta \vec{u},B^a \vec{v}\rangle - \delta\lambda\langle B \vec{u},\vec{v}\rangle = 0$$

又可写作

$$\langle A \vec{u} - \lambda B \vec{u},\delta \vec{v}\rangle + \langle \delta \vec{u},L^a v - \lambda B^a v\rangle - \delta\lambda\langle B \vec{u},\vec{v}\rangle = 0 \tag{5.4.7}$$

一般地说我们有 $\langle B\vec{u},\ \vec{v}\rangle \neq 0$，故若$\vec{u}$，$\vec{v}$满足方程（5.4.1）和（5.4.4），则$\vec{u}$、$\vec{v}$使 $\delta\lambda[\vec{u},\ \vec{v}] = 0$；反之，使 $\delta\lambda[\vec{u},\ \vec{v}] = 0$ 的$\vec{u}$、$\vec{v}$也必须满足方程（5.4.1）和（5.4.4），这也就证明了上面提到的等价性。

如果不知道伴随算子，但知道转置算子，同样可以得到等价的变分问题。设 L^{T} 为算子 L 的转置算子，它与原算子的关系按对称积的定义为

$$\langle \vec{u_1},L \vec{u_2}\rangle = \langle \vec{u_2},L^{\mathrm{T}} \vec{u_1}\rangle \tag{5.4.8}$$

由它与伴随算子的定义可知

$$(L^{\mathrm{T}})^* = L^a$$

为求解本征值方程（5.4.1），而 L 和 B 是非自伴的，但知道其转置算子 L^{T} 和 B^{T}，则借助辅助方程

$$L^{\mathrm{T}} \vec{v} = \lambda B^{\mathrm{T}} \vec{v}$$

可得等价的变分问题为（5.4.6）。这一结论的证明与上面类似，这里不再重复。

5.4.2　非均匀填充柱形金属波导问题的变分表示

下面考虑非均匀填充的均匀波导中的电磁场问题，这时的 ε 和 μ 均为$\vec{\rho}$的函数但与纵向坐标 z 无关。这样式（5.1.5）和（5.1.6）仍然成立，只是其中的 ε 和 μ 不再是常数。

在我们的条件下仍有$\nabla\cdot(\varepsilon \vec{E})=0$，由此可导出

$$E_z(\vec{\rho}) = (\gamma\varepsilon)^{-1} \nabla_t(\varepsilon \vec{E}_t) \tag{5.4.9}$$

把这一结果代入式（5.1.5）并解出$\vec{H}_t$（$\vec{\rho}$）即有

$$\vec{H}_t(\vec{\rho}) = \frac{\gamma}{\mathrm{i}\omega\mu}\hat{z} \times \vec{E}_t(\vec{\rho}) + \frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu\gamma}\hat{z} \times \nabla_t\varepsilon^{-1} \nabla_t \cdot [\varepsilon \vec{E}_t(\vec{\rho})] \tag{5.4.10}$$

考虑到恒等式$\nabla_t \times (\psi \vec{A}) = \nabla_t\psi \times \vec{A} + \psi \nabla_t \times \vec{A}$，可有

$$\hat{z} \times \nabla_t H_z(\vec{\rho}) = -\nabla_t \times (\hat{z}H_z)$$

于是由式（5.1.5）中的第一式与（5.1.6）中的第二式，以及式（5.4.10）就可得到

$$\mu \hat{z} \times \nabla_t \times \mu^{-1} \nabla_t \times \vec{E}_t - \hat{z} \times \nabla_t\varepsilon^{-1} \nabla_t \cdot (\varepsilon \vec{E}_t) - k^2 \hat{z} \times \vec{E}_t = -\beta^2 \hat{z} \times \vec{E}_t \tag{5.4.11}$$

由于假设考虑的是理想波导，这里已设 $\gamma = \mathrm{i}\beta$。这样我们就得到了$\vec{E}_t(\vec{\rho})$ 所满足的方程。如果设

$$L(\cdot) = \mu \hat{z} \times \nabla_t\mu^{-1} \nabla_t \times (\cdot) - \hat{z} \times \nabla_t\varepsilon^{-1} \nabla_t \cdot \varepsilon(\cdot) - k^2 \hat{z} \times (\cdot)$$

$$B(\cdot) = \hat{z} \times (\cdot)$$
$$\lambda = -\beta^2$$

则可以把问题用本征值方程

$$L\vec{E}_t(\vec{\rho}) = \lambda B\vec{E}_t(\vec{\rho}) \tag{5.4.12}$$

表示出来。容易证明，这里定义的算子 L 和 B 既非自伴的也不是对称的。在这种情况下我们需要寻找它们的转置算子。

设$\vec{E}_{t1}$，$\vec{E}_{t2} \in D(L)$，按对称积定义我们有

$$\langle \vec{E}_{t1}, L\vec{E}_{t2} \rangle = \langle \vec{E}_{t1}, \mu\hat{z} \times \nabla_t \mu^{-1} \nabla_t \times \vec{E}_{t2} \rangle - \langle \vec{E}_{t1}, \hat{z} \times \nabla_t \varepsilon^{-1} \nabla_t \cdot \varepsilon\vec{E}_{t2} \rangle - \langle \vec{E}_{t1}, k^2\hat{z} \times \vec{E}_{t2} \rangle \tag{5.4.13}$$

现在先考察式（5.4.13）右侧的第一部分，利用恒等式

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \tag{5.4.14}$$
$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \tag{5.4.15}$$

我们有

$$\begin{aligned} &\langle \vec{E}_{t1}, \mu\hat{z} \times \nabla_t \mu^{-1} \nabla_t \times \vec{E}_{t2} \rangle \\ &= -\int_\Omega (\mu\hat{z} \times \vec{E}_{t1} \cdot \nabla_t \times \mu^{-1} \nabla_t \times \vec{E}_{t2})\mathrm{d}S \\ &= \int_\Omega \nabla_t \cdot (\mu\hat{z} \times \vec{E}_{t1} \times \mu^{-1} \nabla_t \times E_{t2})\mathrm{d}S \\ &\quad - \int_\Omega (\nabla_t \times \hat{z} \times \mu\vec{E}_{t1}) \cdot (\mu^{-1} \nabla_t \times \vec{E}_{t2})\mathrm{d}S \end{aligned} \tag{5.4.16}$$

其中，Ω 为所考虑波导横截面区域。应用高斯定理，上式第二个等号右侧的第一项可变为 Ω 边界的线积分。假设波导为理想导体，电场满足边界条件$\vec{n} \times \vec{E}_t = 0$，从而使线积分为零。对于第二项，利用关系

$$\nabla_t \times \hat{z} \times \mu\vec{E}_{t1} = \hat{z}\nabla_t \cdot \mu\vec{E}_{t1}$$
$$\hat{z} \cdot \nabla_t \times \vec{E}_{t2} = -\nabla_t \cdot \hat{z} \times \vec{E}_{t2}$$

便可得

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}_{t1}, \mu\hat{z} \times \nabla_t \mu^{-1} \nabla_t \times \vec{E}_{t2} \rangle &= -\int_\Omega (\nabla_t \cdot \mu\vec{E}_{t1})\mu^{-1}\hat{z} \cdot \nabla_t \times \vec{E}_{t2}\mathrm{d}S \\ &= \int_\Omega (\nabla_t \cdot \mu\vec{E}_{t1})\mu^{-1} \nabla_t \cdot (\hat{z} \times \vec{E}_{t2})\mathrm{d}S \end{aligned} \tag{5.4.17}$$

由于

$$\mu^{-1} \nabla_t \cdot (\hat{z} \times \vec{E}_{t2}) = \nabla_t \cdot (\mu^{-1}\hat{z} \times \vec{E}_{t2}) - \nabla_t \mu^{-1} \cdot (\hat{z} \times \vec{E}_{t2})$$

式（5.4.17）又可写成

$$\begin{aligned} \langle \vec{E}_{t1}, \mu\hat{z} \times \nabla_t \times \mu^{-1} \nabla_t \times \vec{E}_{t2} \rangle &= \int_\Omega \nabla_t \cdot (\hat{z} \times \vec{E}_{t2}\mu^{-1} \nabla_t \cdot \mu\vec{E}_{t1})\mathrm{d}S \\ &\quad - \int_\Omega \hat{z} \times \vec{E}_{t2} \cdot \nabla_t \mu^{-1} \nabla_t \cdot \mu\vec{E}_{t1}\mathrm{d}S \end{aligned} \tag{5.4.18}$$

再次利用高斯定理，式（5.4.18）右侧的第一项又可转化为线积分，考虑到理想导体的边界条件，这一线积分应等于零。再对方程（5.4.18）利用恒等式$\vec{A} \cdot (\vec{B}$

$\times\vec{C})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$，就可使之成为

$$\langle\vec{E}_{t1},\mu\hat{z}\times\nabla_t\times\mu^{-1}\nabla_t\times\vec{E}_{t2}\rangle=\int_\Omega\vec{E}_{t2}\cdot\hat{z}\times\nabla_t\mu^{-1}\nabla_t\cdot\mu\vec{E}_{t1}\mathrm{d}S$$

$$=\langle\vec{E}_{t2},\hat{z}\times\nabla_t\mu^{-1}\nabla_t\cdot\mu\vec{E}_{t1}\rangle \tag{5.4.19}$$

于是，按定义（5.4.8）我们便有

$$(\mu\hat{z}\times\nabla_t\times\mu^{-1}\nabla_t\times)^{\mathrm{T}}=\hat{z}\times\nabla_t\mu^{-1}\nabla_t\cdot\mu \tag{5.4.20}$$

用类似的方法可以证明

$$(\hat{z}\times\nabla_t\varepsilon^{-1}\nabla_t\cdot\varepsilon)^{\mathrm{T}}=\varepsilon\hat{z}\times\nabla_t\times\varepsilon^{-1}\nabla_t\times \tag{5.4.21}$$

考虑到

$$\langle\vec{E}_{t1},k^2\hat{z}\times\vec{E}_{t2}\rangle=\int_\Omega\vec{E}_{t1}\cdot(k^2\hat{z}\times\vec{E}_{t2})\mathrm{d}S$$

$$=-\int_\Omega\vec{E}_{t2}\cdot(k^2\hat{z}\times\vec{E}_{t1})\mathrm{d}S$$

$$=\langle\vec{E}_{t2},-k^2\hat{z}\times\vec{E}_{t1}\rangle$$

又可知

$$(-k^2\hat{z}\times)^{\mathrm{T}}=k^2\hat{z}\times \tag{5.4.22}$$

把以上结果归纳起来便有

$$L^{\mathrm{T}}=(\hat{z}\times\nabla_t\mu^{-1}\nabla_t\cdot\mu)-(\varepsilon\hat{z}\times\nabla_t\times\varepsilon^{-1}\nabla_t\times)+(k^2\hat{z}\times) \tag{5.4.23}$$

由式（5.4.21）又可知

$$B^{\mathrm{T}}=-\hat{z}\times \tag{5.4.24}$$

不难发现 L 和 L^{T} 具有电磁对偶关系，即我们还有关于磁场$\vec{H}_t(\vec{\rho})$的方程

$$L^{\mathrm{T}}\vec{H}_t(\vec{\rho})=\lambda B^{\mathrm{T}}\vec{H}_t(\vec{\rho}) \tag{5.4.25}$$

于是，我们可以把方程（5.4.25）视作（5.4.12）的辅助方程，而且可以得到β^2的变分表示

$$\beta^2=\frac{\langle\vec{H}_t,\mu\hat{z}\times\nabla_t\times\mu^{-1}\nabla_t\times\vec{E}_t\rangle-\langle\vec{H}_t,\hat{z}\times\nabla_t\varepsilon^{-1}\nabla_t\cdot\varepsilon\vec{E}_t\rangle+\langle\vec{H}_t,k^2\hat{z}\times\vec{E}_t\rangle}{\langle\vec{H}_t,\hat{z}\times\vec{E}_t\rangle}$$

$$=\frac{\langle\hat{z}\nabla_t\cdot\mu\vec{H}_t,\mu^{-1}\nabla_t\times\vec{E}_t\rangle-\langle\varepsilon^{-1}\nabla_t\times\vec{H}_t,\hat{z}\nabla_t\cdot\varepsilon\vec{E}_t\rangle+\langle\vec{H}_t,k^2\hat{z}\times\vec{E}_t\rangle}{\langle\vec{H}_t,\hat{z}\times\vec{E}_t\rangle} \tag{5.4.26}$$

应用瑞利-里兹方法可以对这一变分问题进行近似计算。

5.5　介质柱形波导和光纤

介质波导已有很长的历史并有广泛的应用，光纤也是其中的一类。光通信的发展促进了对各类光纤的深入研究，已有非常丰富的文献。这里只对介质波导进行简单分析并对光纤的特点作简单介绍。

5.5.1　柱形介质波导的本征函数和自然模

柱形介质波导的最简单结构是一种圆形均匀介质棒，我们先对这种结构进行分析。设圆形棒无限长，在纵向均匀，沿坐标 z 轴放置，其中心与坐标轴重合。系统的横截面为一圆形，其半径为 a，圆内的媒质用 $\varepsilon=\varepsilon_0\varepsilon_r$ 和 μ_0 表示，圆外为真空。在这一系统中传输的电磁波由于没有导体限制而可能延伸到圆形区域外部。所以，应该考虑两个均匀媒质区域中的电磁场。

当考虑其中传输的自然模式时，仍可采用 5.1 所进行的分析，在每个均匀区域的横向电磁场也可以用式（5.1.8）和（5.1.9）表示出来。因此其中的电磁场也可以视作 TM(E) 和 TE(H) 两种模式的组合，其纵向场分量也可以分区由式（5.1.10）和（5.1.11）解出。

如果我们把介质棒所在的横向区域用 1 表示，其外部区域用 2 表示，则分区的纵向电场和磁场可用 $\psi_n^{e,h}$ 表示，其中 $n=1$，2 分别代表两个均匀媒质区域。在这种表示下，它们所满足的方程在极坐标中就可表示为

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+k_n^2\right)\right]\psi_n^{e,h}(\rho,\varphi)=-(\gamma^{e,h})^2\psi_n^{e,h}(\rho,\varphi)\qquad(5.5.1)$$

其中，$k_1^2=\omega^2\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0$；$k_2^2=\omega^2\varepsilon_0\mu_0$。

这类本征值方程可用分离变量法求解，但考虑到区域 1（$\rho\leqslant a$）和区域 2（$\rho\geqslant a$）分别为有界和无界的特点，其场解可分别表示为

$$\psi_1^{e,h}(\rho,\varphi)=[A_1J_m(k_{c1}^{e,h}\rho)+B_1Y_m(k_{c1}^{e,h}\rho)](C_1\sin m\varphi+D_1\cos m\varphi)\qquad(5.5.2)$$

$$\psi_2^{e,h}(\rho,\varphi)=[A_2H_m^{(1)}(k_{c2}^{e,h}\rho)+B_2H_m^{(2)}(k_{c2}^{e,h}\rho)](C_2\sin m\varphi+D_2\cos m\varphi)\qquad(5.5.3)$$

其中，$(k_{c1}^{e,h})^2=\omega^2\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0+(\gamma^{e,h})^2$；$(k_{c2}^{e,h})=\omega^2\varepsilon_0\mu_0+(\gamma^{e,h})^2$。

考虑到 $\rho=0$ 时场必须为有限值，需有 $B_1=0$，当 $\rho\to\infty$ 时场不仅有界，且满足外向波条件，于是应取 $A_2=0$。此外，正规传输模为表面波模，这要求场量随 ρ 的增大而指数衰减，所以用第二类变型（虚宗量）汉克尔函数表示。又由于结构的对称性，ϕ 角的零平面可任意选择，三角函数可用指数函数代替。这样，方程（5.5.1）的解可表示为

$$\begin{aligned}\psi_1^e(\rho,\varphi)&=A_mJ_m(k_{c1}^e\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\\ \psi_1^h(\rho,\varphi)&=B_mJ_m(k_{c1}^h\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\end{aligned}\qquad(5.5.4)$$

$$\begin{aligned}\psi_2^e(\rho,\varphi)&=C_mK_m(\mathrm{i}k_{c2}^e\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\\ \psi_2^h(\rho,\varphi)&=D_mK_m(\mathrm{i}k_{c2}^h\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\end{aligned}\qquad(5.5.5)$$

为了确定待定常数，可利用 $\rho=a$ 处介质交界面处的场的连接条件，即电场和磁场的切向分量相等。对 $\rho=a$ 面相切的场分量除了 z 分量外还有 ϕ 方向分量。为了求出场的横向分量可利用式（5.1.8）和（5.1.9）。

对于 TM(E) 模

$$E_{n\phi}^{e}(\rho,n)=-\frac{\gamma^{e}}{(k_{cn}^{e})^{2}\rho}\frac{\partial\psi_{n}^{e}}{\partial\varphi} \tag{5.5.6}$$

$$H_{n\phi}^{e}(\rho,n)=-\frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon_{n}}{(k_{cn}^{e})^{2}}\frac{\partial\psi_{n}^{e}}{\partial\rho} \tag{5.5.7}$$

对于 TE(H) 模

$$E_{n\phi}^{h}(\rho,n)=\frac{\mathrm{i}\omega\mu_{n}}{(k_{cn}^{h})^{2}}\frac{\partial\psi_{n}^{h}}{\partial\rho} \tag{5.5.8}$$

$$H_{n\phi}^{h}(\rho,n)=-\frac{\gamma^{h}}{(k_{cn}^{h})^{2}\rho}\frac{\partial\psi_{n}^{h}}{\partial\varphi} \tag{5.5.9}$$

其中，$\varepsilon_1=\varepsilon_0\varepsilon_r$；$\varepsilon_2=\varepsilon_0$；$\mu_1=\mu_2=\mu_0$。

由以上关系可得两种模式在不同区域电场和磁场 ϕ 分量的表达式

$$\left.\begin{aligned}
E_{1\phi}^{e}(\rho,\varphi)&=-A_m\frac{m\beta^{e}}{(k_{c1}^{e})^{2}\rho}J_m(k_{c1}^{e}\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\\
E_{2\phi}^{e}(\rho,\varphi)&=-C_m\frac{m\beta^{e}}{(k_{c2}^{e})^{2}\rho}K_m(\mathrm{i}k_{c2}^{e}\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\\
H_{1\phi}^{e}(\rho,\varphi)&=-A_m\frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon_1}{k_{c1}^{e}}J'_m(k_{c1}^{e}\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\\
H_{2\phi}^{e}(\rho,\varphi)&=C_m\frac{\omega\varepsilon_2}{k_{c2}^{e}}K'_m(\mathrm{i}k_{c2}^{e}\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}
\end{aligned}\right\} \tag{5.5.10}$$

$$\left.\begin{aligned}
E_{1\phi}^{h}(\rho,\varphi)&=B_m\frac{\mathrm{i}\omega\mu_1}{k_{c1}^{h}}J'_m(k_{c1}^{h}\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\\
E_{2\phi}^{h}(\rho,\varphi)&=-D_m\frac{\omega\mu_2}{k_{c2}^{h}}K'(\mathrm{i}k_{c2}^{h}\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\\
H_{1\phi}^{h}(\rho,\varphi)&=-B_m\frac{m\beta^{h}}{(k_{c1}^{h})^{2}\rho}J_m(k_{c1}^{h}\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\\
H_{2\phi}^{h}(\rho,\varphi)&=-D_m\frac{m\beta^{h}}{(k_{c2}^{h})^{2}\rho}K_m(\mathrm{i}k_{c2}^{h}\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}
\end{aligned}\right\} \tag{5.5.11}$$

在这里我们已假定考虑无损耗传输，即 $\gamma^{e,h}=\mathrm{i}\beta^{e,h}$。

要求电磁场满足 $\rho=a$ 处的连接条件，即是

$$E_{1z}=E_{2z},\quad H_{1z}=H_{2z},\quad E_{1\varphi}=E_{2\varphi},\quad H_{1\varphi}=H_{2\varphi} \tag{5.5.12}$$

以上各场量均为总场，即 TM 和 TE 模相应场量之和。由这四个条件我们可以得到四个未定常数所应满足的四个方程

$$A_mJ_m(k_{c1}a)=C_mK_m(\mathrm{i}k_{c2}a) \tag{5.5.13}$$

$$B_mJ_m(k_{c1}a)=D_mK_m(\mathrm{i}k_{c2}a) \tag{5.5.14}$$

$$
\begin{aligned}
&-A_m\frac{m\beta}{(k_{c1})^2 a}J_m(k_{c1}a)+B_m\frac{\mathrm{i}\omega\mu_1}{k_{c1}}J'_m(k_{c1}a)\\
&=-C_m\frac{m\beta}{k_{c2}^2 a}K_m(\mathrm{i}k_{c2}a)-D_m\frac{\omega\mu_2}{k_{c2}}K'(\mathrm{i}k_{c2}a)
\end{aligned}
\tag{5.5.15}
$$

$$
-A_m\frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon_1}{k_{c1}}J'_m(k_{c1}a)-B_m\frac{m\beta}{k_{c1}^2 a}J_m(k_{c1}a)=C_m\frac{\omega\varepsilon_2}{k_{c2}}K'_m(\mathrm{i}k_{c2}a)-D_m\frac{m\beta}{k_{c2}^2 a}K_m(\mathrm{i}k_{c2}a)
\tag{5.5.16}
$$

由于这里考虑的是总场，传输常数统一为β。因为四个待定系数不可能同时为零，故上面四个方程的系数行列式必须为零，由此而得到决定本征值β的一个超越方程。根据该方程的每一个解β可确定相应的四个未知系数。在给出了四个待定系数后，就可由式（5.5.4）和（5.5.5）得出一组相应的本征函数。进而又可利用式（5.5.2）和（5.5.3）得到一组自然模的电磁场分量表示式，并由此了解各模式的传输特性。

5.5.2　光纤中的电磁模式

在光通信中远距离传输光波电磁能量的系统称为光纤，它实际上就是柱形介质电磁波导。光纤一般是由折射率相近的两种材料构成，一种材料为柱芯，另一种材料是柱芯的包层，柱芯的折射率略高于包层。为了提高其传输性能，折射率在横向不一定是突变的，而是要求按特殊规律变化，形成各种不同的介质交界面。阶梯形交界面是最简单的情形，也是最基本的，可作为分析其他形式光纤的重要参数。

阶梯形交界面的光纤的柱芯很细，但包层比较厚，电磁能量主要限制在包层之内，因此，可以把包层视作无限厚，基本上不影响分析的结果。所以，只要把柱形介质波导的外层空气由包层代替，就变成了阶梯交界面光纤的简化模型。对这种模型进行分析，只要令$(k_{c2}^{e,h})=\omega^2\varepsilon_0\varepsilon_{r2}\mu_0+(\gamma^{e,h})^2$即可，其中$\varepsilon_{r2}$为包层材料的相对介电常数。

为了看清各类电磁模式的一些特性，我们再把电磁场的ρ向分量与z向分量的关系列出。

对于TM(E)模

$$
\begin{aligned}
E_{n\rho}^{e}(\rho,\varphi)&=-\frac{\gamma^{e}}{(k_{cn}^{e})^2}\frac{\partial\psi_n^e}{\partial\rho}\\
H_{n\rho}^{e}(\rho,\varphi)&=\frac{\mathrm{i}\omega\varepsilon_n}{(k_{cn}^{e})^2\rho}\frac{\partial\psi_n^e}{\partial\varphi}
\end{aligned}
\tag{5.5.17}
$$

对于TE(H)模

$$
\begin{aligned}
E_{n\rho}^{h}(\rho,\varphi)&=-\frac{\mathrm{i}\omega\mu_n}{(k_{cn}^{h})^2\rho}\frac{\partial\psi_n^h}{\partial\varphi}\\
H_{n\rho}^{h}(\rho,\varphi)&=-\frac{\gamma^{h}}{(k_{cn}^{h})^2}\frac{\partial\psi_n^h}{\partial\rho}
\end{aligned}
\tag{5.5.18}
$$

由式（5.5.6）~（5.5.9）以及式（5.5.17）和（5.5.18）可以看出，由于对 ϕ 的微商会出现因子 m，使得当 $m=0$ 时，TM 和 TE 模可独立存在，而当 $m\neq 0$ 时，这两种模式总是同时存在。如果把场沿 ρ 分布的零点个数用 n 表示，则对应于 $m=0$ 的电磁模式分别表示为 TM_{0n} 和 TE_{0n}。这种模式电磁场的特点是场的分布与 ϕ 无关，因而在横截面是一种轴对称模式。

为了全面了解系统中可能存在各种类型的模式，需要详细考察由式（5.5.13）~（5.5.16）所决定的本征值方程，该方程具有以下复杂形式

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{\mathrm{i}}{k_{c1}}\frac{J'_m(k_{c1}a)}{J_m(k_{c1}a)}+\frac{1}{k_{c2}}\frac{K'_m(\mathrm{i}k_{c2}a)}{K_m(\mathrm{i}k_{c2}a)}\right] \\
&\cdot\left[\frac{\mathrm{i}\varepsilon_{r1}}{k_{c1}}\frac{J'_m(k_{c1}a)}{J_m(k_{c1}a)}+\frac{\varepsilon_{r2}}{k_{c2}}\frac{K'_m(\mathrm{i}k_{c2}a)}{K_m(\mathrm{i}k_{c2}a)}\right] \\
&=\left[\frac{m\beta}{k_0 a}\left(\frac{1}{k_{c2}^2}-\frac{1}{k_{c1}^2}\right)\right]^2
\end{aligned}
\tag{5.5.19}
$$

当 $m=0$ 时，对应于 TM(E) 模和 TE(H) 模的本征值方程分别为

$$
\frac{\mathrm{i}\varepsilon_{r1}}{k_{c1}}\frac{J'_0(k_{c1}a)}{J_0(k_{c1}a)}+\frac{\varepsilon_{r2}}{k_{c2}}\frac{K'_0(\mathrm{i}k_{c2}a)}{K_0(\mathrm{i}k_{c2}a)} \tag{5.5.20}
$$

$$
\frac{\mathrm{i}}{k_{c1}}\frac{J'_0(k_{c1}a)}{J_0(k_{c1}a)}+\frac{1}{k_{c2}}\frac{K'_0(\mathrm{i}k_{c2}a)}{K_0(\mathrm{i}k_{c2}a)} \tag{5.5.21}
$$

要精确地求解这些本征值方程是困难的，往往采用一些近似方法求其近似解。由于这里主要涉及的也是不同媒质的交界面，而且局部看圆柱面也可近似地看作平面。这样，我们可以把现在的情况与平面分层媒质的情况作一定的类比。

在这种柱形分层介质中可传播一定数量的表面波模式，除了 $m=0$ 时可独立存在的 $TM(E)_{0n}$ 和 $TE(H)_{0n}$ 模式外，还有 TM 和 TE 模式同时存在的混合模式，用 EH_{mn} 或 $HE_{mn}(m\neq 0)$ 表示。当其中 TM 模较强时，称为 EH 模，而当其中 TE 模较强时，则称为 HE 模。以上这些模式存在的条件是 $\beta^2>\omega^2\varepsilon_0\varepsilon_{r2}\mu_0$，当 $\beta^2<\omega^2\varepsilon_0\varepsilon_{r2}\mu_0$ 时相应的模式成为辐射模。所以，$k_{c2}=0$ 是表面波模的截止条件。唯一的例外是 HE_{11} 模，它没有低频截止点，故称它为主混合模式。

像柱形金属波导一样，在考虑了电磁场的极限条件及表面波的特性后，也可以证明介质波导和光纤中传输模式在横截面上的正交关系。尤其是利用互易定理式（1.3.34）可以证明

$$
\int_{\Omega}[\vec{E}_{tn}(\vec{\rho})\times\vec{H}_{tm}]\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\int_{\Omega}[\vec{E}_{tm}(\vec{\rho})\times\vec{H}_{tn}(\vec{\rho})]\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=0 \tag{5.5.22}
$$

其中，m 和 n 表示不同的表面波模；Ω 表示足够大的横截面，以使场量在边缘上已基本消失。

第 6 章　带线结构中的电磁场

在微波和毫米波单片或混合集成电路中广泛地使用着由各种类型的微带传输线构成的功能部件，对这些微带传输线特性的严格理论分析是功能部件精确设计的基础。自微带线问世以来，如何对其进行严格的电磁理论分析就一直是一个重要的研究课题，已经提出了很多方法，它们各有自己的特点。本章重点介绍其中的谱域积分方程法，尤其是奇异积分方程法。

6.1　开放微带线全波分析的谱域法

作为传输系统中电磁场随纵向坐标 z 的变化关系是已知的，但场的横向分布在微带结构中却是相对比较复杂的。要精确地求解微带结构中的电磁场是很困难的，一般地只能求得近似解，并计算其传输参数。在傅氏变换域（fourier transform domain，FTD）中对微带线进行全波分析是一种行之有效的方法。

6.1.1　带线结构中电磁场的特点

在微波和毫米波集成电路中使用的微带型传输线主要有单根微带线、耦合微带线、共面波导、鳍线和槽线等，它们的基本形式为开放微带线和屏蔽微带线，其他形式的结构可视作它们的变形。

在微带线发展的初期，由于主要在较低频率上使用，可以近似地认为在其中传输的是准 TEM 波，其色散特性被忽略。随着使用频率的提高，微带线的色散特性越来越显著。在这种形势下开始发展全波分析方法。由前面关于分层媒质和柱形传输系统中电磁场的分析可知，像微带线这类媒质非均匀结构不可能支持纯 TEM 模式，也不支持纯 TE 或纯 TM 模式。所以，在对微带线进行分析时要考虑 TE 和 TM 模式同时存在的混合模式，这种方法称为全波分析。

由导波系统的一般理论已知，微带线中的 TE 和 TM 模可由赫兹矢量表示。如果微带线的纵向仍用 z 表示，横向坐标为 x 和 y，而磁型赫兹矢量 $\vec{\Pi}^h(\vec{r},\omega)$ 和电型赫兹矢量 $\vec{\Pi}^e(\vec{r},\omega)$ 分别为

$$\vec{\Pi}^h(\vec{r},\omega) = \hat{z}\psi^h(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta z)}$$

$$\vec{\Pi}^e(\vec{r},\omega) = \hat{z}\psi^e(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta z)}$$

则 TE 和 TM 模的电磁场分别可表示如下。

对于 TE 模

$$\vec{E}^h(\vec{r},\omega) = -\mathrm{i}\omega\mu\nabla\times\vec{\Pi}^h(\vec{r},\omega)$$

$$\vec{H}^h(\vec{r},\omega) = \nabla\nabla \cdot \vec{\Pi}^h(\vec{r},\omega) + k^2 \vec{\Pi}^h(\vec{r},\omega)$$

对于 TM 模

$$\vec{E}^e(\vec{r},\omega) = \nabla\nabla \cdot \vec{\Pi}^e(\vec{r},\omega) + k^2 \vec{\Pi}^e(\vec{r},\omega)$$

$$\vec{H}^e(\vec{r},\omega) = \mathrm{i}\omega\varepsilon \nabla \times \vec{\Pi}^e(\vec{r},\omega)$$

其中，$k^2 = \omega^2\varepsilon\mu$。据此可以得到微带线中的混合模式通过赫兹矢量的表达形式

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},\omega) = & -\mathrm{i}\omega\mu \nabla \times \vec{\Pi}^h(\vec{r},\omega) \\ & + \nabla\nabla \cdot \vec{\Pi}^e(\vec{r},\omega) + k^2 \vec{\Pi}^e(\vec{r},\omega)\end{aligned} \tag{6.1.1}$$

$$\vec{H}(\vec{r},\omega) = \mathrm{i}\omega\varepsilon \nabla \times \vec{\Pi}^e(\vec{r},\omega) + \nabla\nabla \times \vec{\Pi}^h(\vec{r},\omega) + k^2 \vec{\Pi}^h(\vec{r},\omega) \tag{6.1.2}$$

由此出发可对微带线进行全波分析。

6.1.2　傅氏变换域中并矢格林函数表示的场方程

图 6－1 给出了开放微带线横截面的结构及坐标表示，微带线由导带、接地板和衬底构成。设导带和接地板均为理想导体，导带为无限薄，宽度为 w，衬底及其上层均为理想媒质。衬底的高度为 h，横向延伸至无限远。衬底所在范围称区域（1），媒质特性用 ε_1 和 μ_1 表示。衬底上层空间为区域（2），媒质特性由 ε_2 和 μ_2 表示。

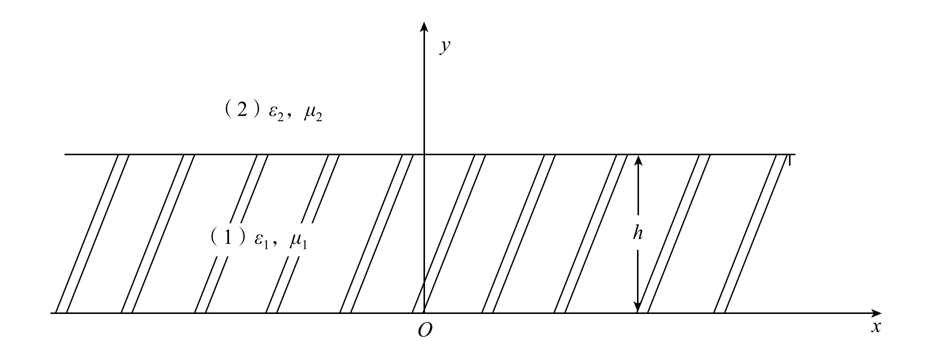


图 6－1　开放微带线的横截面及坐标表示

如果导带上存在表面电流密度 $\vec{J}_s(\vec{r},\omega)$，则在空间 $\vec{r}$ 处由它产生的电场 $\vec{E}(\vec{r},\omega)$ 可表示成

$$\vec{E}(\vec{r},\omega) = \int_S \overline{\overline{G}}(\vec{r},\vec{r}';\omega) \cdot \vec{J}_s(\vec{r}',\omega)\mathrm{d}S' \tag{6.1.3}$$

其中，$\overline{\overline{G}}(\vec{r},\vec{r}';\omega)$ 为适当的并矢格林函数。

由于在理想导体表面上电场的切向分量必须等于零，故由上式便可得到

$$\vec{n} \times \int_S \overline{\overline{G}}(\vec{r},\vec{r}';\omega) \cdot \vec{J}_s(\vec{r}',\omega)\mathrm{d}S' = 0, \quad \vec{r} \in S \tag{6.1.4}$$

其中，$\vec{n}$ 为 S 的单位法向矢量；S 为导带的表面。在已知 $\overline{\overline{G}}(\vec{r},\vec{r}';\omega)$ 的情况

下，式（6.1.4）就构成一个以$\vec{J}_s(\vec{r})$为未知量的积分算子方程，$\bar{\bar{G}}(\vec{r},\ \vec{r}';\ \omega)$为其积分核。

因为我们考虑的是无限长均匀微带线，其特性可由任一横截面的电磁场来表征，于是可以把问题在二维进行处理。在横截面任一点的电场可以表示为

$$\vec{E}(x,y) = \int_{-w/2}^{w/2} \bar{\bar{G}}(x-x',y,h,\omega) \cdot \vec{J}_s(x',h;\omega)\,\mathrm{d}x' \tag{6.1.5}$$

其中，$\vec{J}_s(x,\ h,\ \omega)$只有$x$和$z$两个方向的分量，而$\bar{\bar{G}}$则是满足微带线的边界条件的并矢格林函数。

把式（6.1.5）写成分量形式可以得到

$$\begin{aligned} E_x(x,y,\omega) = &\int_{-w/2}^{w/2} G_{xx}(x-x';y,h,\omega) J_{sx}(x',h,\omega)\,\mathrm{d}x' \\ &+ \int_{-w/2}^{w/2} G_{xz}(x-x',y,h,\omega) J_{sz}(x',h,\omega)\,\mathrm{d}x' \end{aligned} \tag{6.1.6}$$

$$\begin{aligned} E_z(x,y,\omega) = &\int_{-w/2}^{w/2} G_{zx}(x-x',y,h,\omega) J_{sx}(x',h,\omega)\,\mathrm{d}x' \\ &+ \int_{-w/2}^{w/2} G_{zz}(x-x',y,h,\omega) J_{sz}(x',h,\omega)\,\mathrm{d}x' \end{aligned} \tag{6.1.7}$$

由于有边界条件

$$E_x(x,h) = 0, \quad |x| \leqslant \frac{w}{2}$$

$$E_z(x,h) = 0, \quad |x| \leqslant \frac{w}{2}$$

只要$|x| \leqslant \frac{w}{2}$，$y=h$，就可由式（6.1.6）和（6.1.7）得到导带上电流分量满足的积分算子方程。

$$\begin{aligned} &\int_{-w/2}^{w/2} G_{xx}(x-x',h,\omega) J_{sx}(x',h,\omega)\,\mathrm{d}x' \\ &+ \int_{-w/2}^{w/2} G_{xz}(x-x',h,\omega) J_{sz}(x',h,\omega)\,\mathrm{d}x' = 0, \quad |x| \leqslant w/2 \end{aligned} \tag{6.1.8}$$

$$\begin{aligned} &\int_{-w/2}^{w/2} G_{zx}(x-x',h,\omega) J_{sx}(x',h,\omega)\,\mathrm{d}x' \\ &+ \int_{-w/2}^{w/2} G_{zz}(x-x',h,\omega) J_{sz}(x',h,\omega)\,\mathrm{d}x' = 0, \quad |x| \leqslant w/2 \end{aligned} \tag{6.1.9}$$

到此为止只是形式上地建立了未知电流的积分算子方程，其中的积分核还是未知的。这些积分核是满足微带线复杂边界条件的并矢格林函数或其某些分量。但是，直接求得这样的并矢格林函数并非易事。为了解决这一问题，我们将采取间接方式，即在傅里叶变换域中建立起场与电流的代数关系，而并矢格林函数各分量正是方程的系数。

傅里叶变换是对空间变量x进行的，例如，对$f(x)$的变换为

$$f(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha x}\,\mathrm{d}x \tag{6.1.10}$$

由于电流只在 $|x|\leqslant w/2$ 时不为零，故可把式（6.1.6）和（6.1.7）中的积分限延伸到 $\pm\infty$。在这种情况下，它们就是并矢格林函数和电流之间是卷积关系。当把式（6.1.10）这样的傅里叶变换应用到式（6.1.6）和（6.1.7）的两侧时就能得到

$$E_x(\alpha,h,\omega)=G_{xx}(\alpha,h,\omega)J_{sx}(\alpha,h,\omega)+G_{xz}(\alpha,h,\omega)J_{sz}(\alpha,h,\omega) \tag{6.1.11}$$

$$E_z(\alpha,h,\omega)=G_{zx}(\alpha,h,\omega)J_{sx}(\alpha,h,\omega)+G_{zz}(\alpha,h,\omega)J_{sz}(\alpha,h,\omega) \tag{6.1.12}$$

这一关系提示我们，只要在傅里叶变换域中找到了电场与电流的这种代数关系，其系数便是傅里叶变换域中相应的并矢格林函数分量。再经傅里叶逆变换就可得到频域并矢格林函数的相应分量，也就是找到了式（6.1.8）和（6.1.9）中的积分核。于是，这些积分算子方程也就完整地建立起来了。其实，只要知道了傅里叶变换域中的并矢格林函数和相应的电场分量，由式（6.1.11）和（6.1.12）就能解出傅里叶变换域中的未知电流。

6.1.3　开放微带线中的并矢格林函数

为了获得式（6.1.11）和（6.1.12）在微带线中的具体表达形式，需要求解微带线中的电磁场。根据式（6.1.1）和（6.1.2）以及所给出的$\vec{\Pi}^e$ 和$\vec{\Pi}^h$ 的表达形式，可把微带线中的电磁场表示为

$$\left.\begin{aligned}E_{xj}(x,y)&=-\mathrm{i}\beta\frac{\partial\psi_j^e}{\partial x}-\mathrm{i}\omega\mu_j\frac{\partial\psi_j^h}{\partial y}\\E_{yj}(x,y)&=-\mathrm{i}\beta\frac{\partial\psi_j^e}{\partial y}+\mathrm{i}\omega\mu_j\frac{\partial\psi_j^h}{\partial x}\\E_{zj}(x,y)&=(k_j^2-\beta^2)\psi_j^e\end{aligned}\right\} \tag{6.1.13}$$

$$\left.\begin{aligned}H_{xj}(x,y)&=\mathrm{i}\omega\varepsilon_j\frac{\partial\psi_j^e}{\partial y}-\mathrm{i}\beta\frac{\partial\psi_j^h}{\partial x}\\H_{yj}(x,y)&=-\mathrm{i}\omega\varepsilon_j\frac{\partial\psi_j^e}{\partial x}-\mathrm{i}\beta\frac{\partial\psi_j^h}{\partial y}\\H_{zj}(x,y)&=(k_j^2-\beta^2)\psi_j^h\end{aligned}\right\} \tag{6.1.14}$$

其中，$j=1$，2，表示两个区域，式中省略了因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\beta z)}$。按（6.1.10）的形式对以上各式作变换，便得到在傅里叶变换域中的表示

$$\left.\begin{aligned}E_{xj}(\alpha,y)&=-\alpha\beta\psi_j^e(\alpha)-\mathrm{i}\omega\mu_j\frac{\partial\psi_j^h(\alpha)}{\partial y}\\E_{yj}(\alpha,y)&=-\mathrm{i}\beta\frac{\partial\psi_j^e(\alpha)}{\partial y}+\alpha\omega\mu_j\psi_j^h(\alpha)\\E_{zj}(\alpha,y)&=(k_j^2-\beta^2)\psi_j^e(\alpha)\end{aligned}\right\} \tag{6.1.15}$$

$$
\left.\begin{aligned}
H_{xj}(\alpha,y) &= \mathrm{i}\omega\varepsilon_j\frac{\partial\psi_j^e(\alpha)}{\partial y}-\alpha\beta\psi_j^h(\alpha)\\
H_{yj}(\alpha,y) &= -\alpha\omega\varepsilon_j\psi_j^e(\alpha)-\mathrm{i}\beta\frac{\partial\psi_j^h(\alpha)}{\partial y}\\
H_{zj}(\alpha,y) &= (k_j^2-\beta^2)\psi_j^h(\alpha)
\end{aligned}\right\}\tag{6.1.16}
$$

我们知道在频域，$\psi_j^e(x,\ y)$ 和 $\psi_j^h(x,\ y)$ 在无源区满足齐次波动方程

$$
\left.\begin{aligned}
\nabla_t^2\psi_j^e(x,y)+(k_j^2-\beta^2)\psi_j^e(x,y) &= 0\\
\nabla_t^2\psi_j^h(x,y)+(k_j^2-\beta^2)\psi_j^h(x,y) &= 0
\end{aligned}\right\}\tag{6.1.17}
$$

在傅里叶变换域中则成为

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2\psi_j^e(\alpha)}{\mathrm{d}y^2}-\gamma_j^2\psi_j^e(\alpha) &= 0\\
\frac{\mathrm{d}^2\psi_j^h(\alpha)}{\mathrm{d}y^2}-\gamma_j^2\psi_j^h(\alpha) &= 0
\end{aligned}\right\}\tag{6.1.18}
$$

其中，$\gamma_j^2=\alpha^2+\beta^2-k_j^2$，$j=1$，2。由此看出，作为 y 的函数 $\psi_j^e(\alpha)$ 和 $\psi_j^h(\alpha)$ 满足典型的一维亥姆霍兹算子方程，考虑到其解需要满足的边界条件和无穷远条件，选择以下形式作为方程（6.1.18）的解是合适的。

$$
\left.\begin{aligned}
\psi_1^e(\alpha,y) &= A(\alpha)\mathrm{sh}\gamma_1 y\\
\psi_2^e(\alpha,y) &= B(\alpha)\mathrm{e}^{-\gamma_2(y-h)}
\end{aligned}\right\}\tag{6.1.19}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\psi_1^h(\alpha,y) &= C(\alpha)\mathrm{ch}\gamma_1 y\\
\psi_2^h(\alpha,y) &= D(\alpha)\mathrm{e}^{-\gamma_2(y-h)}
\end{aligned}\right\}\tag{6.1.20}
$$

把这一结果代入式（6.1.15）和（6.1.16）便可获得微带中电磁场各分量在傅里叶变换域中的表达式。为了以后的需要，分两个区域列出。

$$
\left.\begin{aligned}
E_{x1}(\alpha,y) &= -\alpha\beta A(\alpha)\mathrm{sh}\gamma_1 y-\mathrm{i}\omega\mu_1\gamma_1 C(\alpha)\mathrm{sh}\gamma_1 y\\
E_{y1}(\alpha,y) &= -\mathrm{i}\beta\gamma_1 A(\alpha)\mathrm{ch}\gamma_1 y+\alpha\omega\mu_1 C(\alpha)\mathrm{ch}\gamma_1 y\\
E_{z1}(\alpha,y) &= (k_1^2-\beta^2)A(\alpha)\mathrm{sh}\gamma_1 y\\
H_{x1}(\alpha,y) &= \mathrm{i}\omega\varepsilon_1\gamma_1 A(\alpha)\mathrm{ch}\gamma_1 y-\alpha\beta C(\alpha)\mathrm{ch}\gamma_1 y\\
H_{y1}(\alpha,y) &= -\alpha\omega\varepsilon_1 A(\alpha)\mathrm{sh}\gamma_1 y-\mathrm{i}\beta\gamma_1 C(\alpha)\mathrm{sh}\gamma_1 y\\
H_{z1}(\alpha,y) &= (k_1^2-\beta^2)C(\alpha)\mathrm{ch}\gamma_1 y
\end{aligned}\right\}\tag{6.1.21}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
E_{x2}(\alpha,y) &= -\alpha\beta B(\alpha)\mathrm{e}^{-\gamma_2(y-h)}+\mathrm{i}\omega\mu_2\gamma_2 D(\alpha)\mathrm{e}^{-\gamma_2(y-h)}\\
E_{y2}(\alpha,y) &= \mathrm{i}\beta\gamma_2 B(\alpha)\mathrm{e}^{-\gamma_2(y-h)}+\alpha\omega\mu_2 D(\alpha)\mathrm{e}^{-\gamma_2(y-h)}\\
E_{z2}(\alpha,y) &= (k_2^2-\beta^2)B(\alpha)\mathrm{e}^{-\gamma_2(y-h)}\\
H_{x2}(\alpha,y) &= -\mathrm{i}\omega\gamma_2 B(\alpha)\mathrm{e}^{-\gamma_2(y-h)}-\alpha\beta D(\alpha)\mathrm{e}^{-\gamma_2(y-h)}\\
H_{y2}(\alpha,y) &= -\alpha\omega\varepsilon_2 B(\alpha)\mathrm{e}^{-\gamma_2(y-h)}+\mathrm{i}\beta\gamma_2 D(\alpha)\mathrm{e}^{-\gamma_2(y-h)}\\
H_{z2}(\alpha,y) &= (k_2^2-\beta^2)D(\alpha)\mathrm{e}^{-\gamma_2(y-h)}
\end{aligned}\right\}\tag{6.1.22}
$$

为了确定以上未定系数，可利用 $y=h$ 上的边界条件

$$\left.\begin{aligned} E_{x1}(\alpha,h) &= E_{x2}(\alpha,h) \\ E_{z1}(\alpha,h) &= E_{z2}(\alpha,h) \end{aligned}\right\},\quad \text{所有 } x \tag{6.1.23}$$

$$\left.\begin{aligned} H_{x1}(\alpha,h) - H_{x2}(\alpha,h) &= J_{sz}(\alpha,h) \\ H_{z1}(\alpha,h) - H_{z2}(\alpha,h) &= -J_{sx}(\alpha,h) \end{aligned}\right\},\quad |x| \leqslant \frac{\omega}{2} \tag{6.1.24}$$

把这些条件用于式（6.1.21）和（6.1.22）即可得到以下方程

$$A(\alpha)\mathrm{sh}\gamma_1 h = \frac{k_2^2-\beta^2}{k_1^2-\beta^2}B(\alpha) \tag{6.1.25}$$

$$\alpha\beta A(\alpha)\mathrm{sh}\gamma_1 h + \mathrm{i}\omega\mu_1\gamma_1 C(\alpha)\mathrm{sh}\gamma_1 h = \alpha\beta B(\alpha) - \mathrm{i}\omega\mu_2\gamma_2 D(\alpha) \tag{6.1.26}$$

$$\mathrm{i}\omega\varepsilon_1\gamma_1 A(\alpha)\mathrm{ch}\gamma_1 h - \alpha\beta C(\alpha)\mathrm{ch}\gamma_1 h + \alpha\beta D(\alpha) + \mathrm{i}\omega\varepsilon_2\gamma_2 B(\alpha) = J_{sz}(\alpha,h) \tag{6.1.27}$$

$$(k_1^2-\beta^2)C(\alpha)\mathrm{ch}\gamma_1 h - (k_2^2-\beta^2)D(\alpha) = -J_{sx}(\alpha,h) \tag{6.1.28}$$

由这些方程就可确定 $A(\alpha)$、$B(\alpha)$、$C(\alpha)$ 和 $D(\alpha)$，即

$$B(\alpha) = \frac{1}{\det b}\left[\left(Fb_{22} + \frac{\alpha\beta}{k_1^2-\beta^2}b_{12}\right)J_{sx}(\alpha,h) - b_{12}J_{sz}(\alpha,h)\right] \tag{6.1.29}$$

$$D(\alpha) = \frac{1}{\det b}\left[b_{11}J_{sz}(\alpha,h) - \left(Fb_{21} + \frac{\alpha\beta}{k_1^2-\beta^2}b_{11}\right)J_{sx}(\alpha,h)\right] \tag{6.1.30}$$

其中

$$b_{11} = \alpha\beta\left(\frac{k_2^2-\beta^2}{k_1^2-\beta^2} - 1\right)$$

$$b_{22} = -b_{11}$$

$$b_{12} = \mathrm{i}\omega\mu_2\gamma_1\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} + \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{k_2^2-\beta^2}{k_1^2-\beta^2}\mathrm{th}\gamma_1 h\right)$$

$$b_{21} = \mathrm{i}\omega\varepsilon_2\gamma_1\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{k_2^2-\beta^2}{k_1^2-\beta^2}\mathrm{cth}\gamma_1 h\right)$$

$$F = \mathrm{i}\omega\mu_1\gamma_1\frac{\mathrm{th}\gamma_1 h}{k_1^2-\beta^2}$$

$$\det b = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$$

而 A（α）和 C（α）则可由式（6.1.25）和（6.1.28）简单地求得。把所得系数代回式（6.1.21）和（6.1.22），考虑到关系（6.1.23）可以把 E 的 x 和 z 分量的脚标去掉，于是得到我们所需要的关系

$$\left.\begin{aligned} E_x(\alpha,h) &= G_{xx}(\alpha,h)J_{sx}(\alpha,h) + G_{xz}(\alpha,h)J_{sz}(\alpha,h) \\ E_z(\alpha,h) &= G_{zx}(\alpha,h)J_{sx}(\alpha,h) + G_{zz}(\alpha,h)J_{sz}(\alpha,h) \end{aligned}\right\} \tag{6.1.31}$$

其中

$$G_{xx}(\alpha,h) = \frac{1}{\det b}\left[F(\alpha\beta b_{22} + \mathrm{i}\omega\mu_2\gamma_2 b_{21}) + \frac{\alpha\beta}{k_1^2-\beta^2}(\alpha\beta b_{12} + \mathrm{i}\omega\mu_2\gamma_2 b_{11})\right] \tag{6.1.32}$$

$$G_{xz}(\alpha,h) = \frac{1}{\det b}(\alpha\beta b_{12} + \mathrm{i}\omega\mu_2\gamma_2 b_{11}) \tag{6.1.33}$$

$$G_{zx}(\alpha,h) = \frac{k_2^2 - \beta^2}{\det b}\left(Fb_{22} + \frac{\alpha\beta}{k_1^2 - \beta^2}b_{12}\right) \tag{6.1.34}$$

$$G_{zz}(\alpha,h) = -\frac{k_2^2 - \beta^2}{\det b}b_{12} \tag{6.1.35}$$

对方程（6.1.31）求傅里叶逆变换即可得到

$$E_x(x,h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_{xx}(\alpha,h)J_{sx}(\alpha,h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_{xz}(\alpha,h)J_{sz}(\alpha,h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}\alpha \tag{6.1.36}$$

$$E_z(x,h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_{zx}(\alpha,h)J_{sx}(\alpha,h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}\alpha + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G_{zz}(\alpha,h)J_{sz}(\alpha,h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}\alpha \tag{6.1.37}$$

再利用在$|x| \leqslant \frac{w}{2}$的边界条件$E_x = E_z = 0$，即又得到导带上表面电流的积分算子方程

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} G_{xx}(\alpha,h)J_{sx}(\alpha,h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} G_{xz}(\alpha,h)J_{xz}(\alpha,h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}\alpha = 0, \quad |x| \leqslant \frac{w}{2}\\&\int_{-\infty}^{\infty} G_{zx}(\alpha,h)J_{sx}(\alpha,h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} G_{zz}(\alpha,h)J_{sz}(\alpha,h)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{d}\alpha = 0, \quad |x| \leqslant \frac{w}{2}\end{aligned}\right\} \tag{6.1.38}$$

显然，为了求得$\vec{J}_s$，解方程（6.1.31）将会更直接和简单。

6.1.4　场方程的近似解和微带线的色散特性

我们将用加权余量法求得代数算子方程（6.1.31）的近似解。关于加权余量法原理留到第10章进行详细讨论。伽辽金（Galerkin）法是加权余量法的一种，其特点是把展开未知函数的基函数与权函数选作一种。首先选定合适的一组线性无关函数序列，用其有限项构成的级数作为未知函数的近似。

方程（6.1.31）中的未知量除了两个表面电流分量外，还有两个切向电场分量。由于面电流只存在于导带上，而在导带上切向电场又为零，使得电场的作用消失了，故只需用基函数近似表示表面电流。设基函数序列为$\{J_{xm}(\alpha)\}_{m=1}^{N}$和$\{J_{zm}(\alpha)\}_{m=1}^{M}$，且有

$$\left.\begin{aligned}J_{sx}(\alpha) &= \sum_{m=1}^{N} c_m J_{xm}(\alpha)\\J_{sz}(\alpha) &= \sum_{m=1}^{M} d_{\mathrm{m}} J_{zm}(\alpha)\end{aligned}\right\} \tag{6.1.39}$$

把以上基函数设定为在$|x| > \frac{w}{2}$时等于零，则有

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} J_{xl}(\alpha)E_x(\alpha)\mathrm{d}\alpha &= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} J_{xl}(x)E_x(x)\mathrm{d}x = 0\\\int_{-\infty}^{\infty} J_{zk}(\alpha)E_z(\alpha)\mathrm{d}\alpha &= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} J_{zk}(x)E_z(x)\mathrm{d}x = 0\end{aligned}\right\} \tag{6.1.40}$$

这样，当用基函数的展开式（6.1.39）代替式（6.1.31）中的表面电流并用此基函数对方程（6.1.31）两侧求内积时，就可得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[J_{xl}(\alpha)G_{xx}(\alpha,h)\sum_{m=1}^{N}c_m J_{xm}(\alpha)+J_{xl}(\alpha)G_{xz}(\alpha,h)\sum_{m=1}^{M}d_m J_{zm}(\alpha)\right]\mathrm{d}\alpha=0,$$
$$l=1,2,\cdots,N \tag{6.1.41}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[J_{zk}(\alpha)G_{zx}(\alpha,h)\sum_{m=1}^{N}c_m J_{xm}(\alpha)+J_{zk}(\alpha)G_{zz}(\alpha,h)\sum_{m=1}^{M}d_m J_{zm}(\alpha)\right]\mathrm{d}\alpha=0,$$
$$k=1,2,\cdots,M \tag{6.1.42}$$

若令

$$\left.\begin{aligned}K_{lm}^{xx}(\beta)&=\int_{-\infty}^{\infty}J_{xl}(\alpha)G_{xx}(\alpha,h)J_{xm}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\\K_{lm}^{xz}(\beta)&=\int_{-\infty}^{\infty}J_{xl}(\alpha)G_{xz}(\alpha,h)J_{zm}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\\K_{km}^{zx}(\beta)&=\int_{-\infty}^{\infty}J_{zk}(\alpha)G_{zx}(\alpha,h)J_{xm}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\\K_{km}^{zz}(\beta)&=\int_{-\infty}^{\infty}J_{zk}(\alpha)G_{zz}(\alpha,h)J_{zm}(\alpha)\mathrm{d}\alpha\end{aligned}\right\} \tag{6.1.43}$$

可把式（6.1.41）和（6.1.42）改写成以下形式。

$$\left.\begin{aligned}\sum_{m=1}^{N}K_{lm}^{xx}(\beta)c_m+\sum_{m=1}^{M}K_{lm}^{xz}(\beta)d_m=0,\quad l=1,2,\cdots,N\\\sum_{m=1}^{N}K_{km}^{zx}(\beta)c_m+\sum_{m=1}^{M}K_{km}^{zz}(\beta)d_m=0,\quad k=1,2,\cdots,M\end{aligned}\right\} \tag{6.1.44}$$

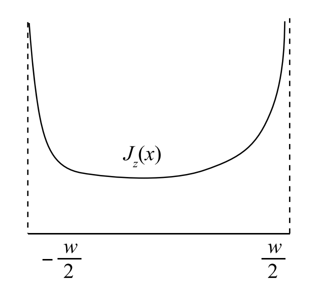
这已经是一个以展开系数为未知量的代数方程，这种方程可以用计算机求解。求得系数后就可以由式（6.1.39）计算导带上的表面电流。

在解电流之前首先需要知道 β 与频率的关系，即微带的色散特性。由于方程（6.1.44）中的 c_m 和 d_n 不可能同时为零，这就要求该方程的行列式必须等于零。这个由行列式等于零而获得的方程决定了 β 与频率的关系，故称为微带线的色散方程。

决定这一求解过程繁简程度的主要因素是基函数的选择，使方程组（6.1.44）快速收敛的基函数可以使计算大大简化。显然基函数与导带上电流的分布越接近，方程组收敛得就越快。所以，基函数的选择又依赖于我们对导带上电流分布的预知程度。由物理分析和测量可知，$J_{sx}(x)$ 为奇函数，$J_{sz}(x)$ 则为偶函数，而且在边缘上有奇异性，如图 6-2 所示。图 6-3 为用过的基函数。在文献［13］中用图 6-3 所示的基函数计算了不同阶精度基模的传输常数与频率的关系。这种关系往往用等效介电常数 ε_{eff} 来表示，其定义为

$$\varepsilon_{\text{eff}}=\left(\frac{\beta}{k_0}\right)^2$$

计算结果示于图 6-4，图上还同时给出了 Denlinger 由积分方程法计算的结果。



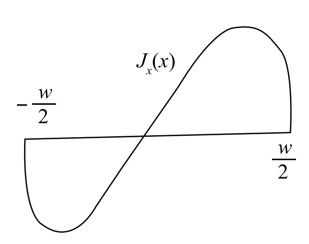
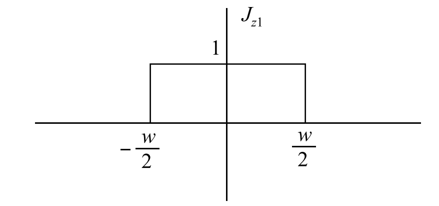
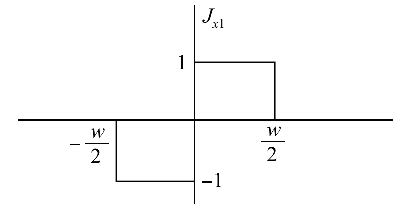
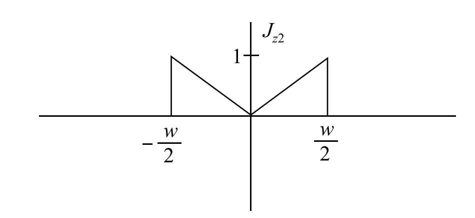


图 6－2　表面电流分布







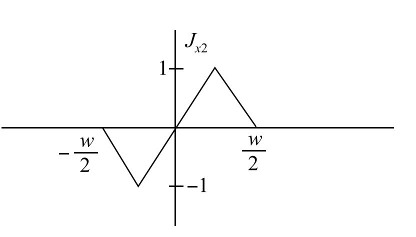


图 6－3　一种基函数

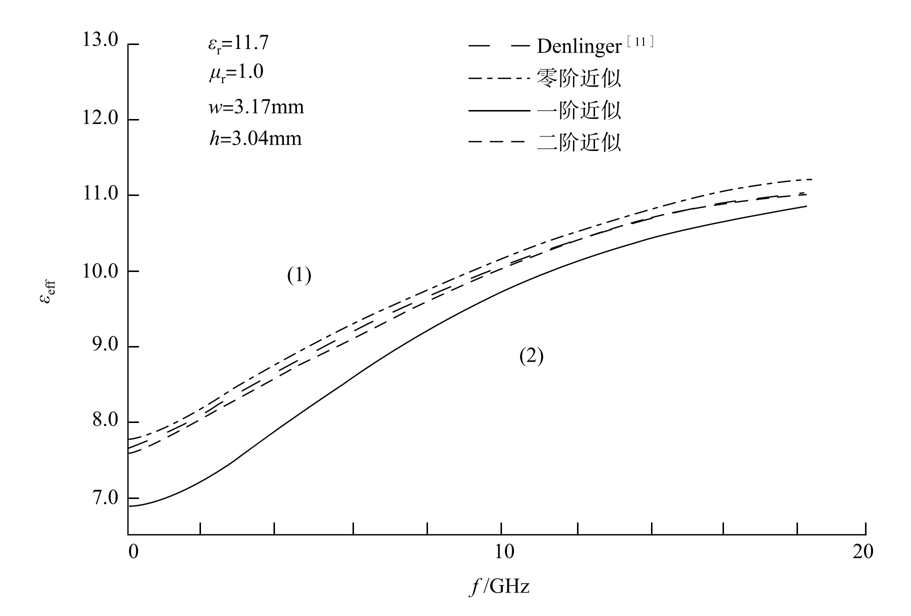


图 6－4　开放微带线的色散特性

微带线的另一个重要参量是特性阻抗，作为一种色散传输系统其特性阻抗不是唯一确定的。通常采用两种定义方式，一种通过电流，另一种通过电压来定义。通过电流定义的特性阻抗用 Z_{0I} 表示

$$Z_{0I} = \frac{2P}{I_0^2} \tag{6.1.45}$$

其中，P 为沿 z 轴的功率流的时间平均值；I_0 则是导带上沿 z 轴的总电流。P 可通过下式进行计算。

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \vec{E} \times \overline{\vec{H}} \cdot \hat{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(E_x\overline{H}_y - E_y\overline{H}_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{6.1.46}$$

应用帕西伐尔（Parseval）定理，上式又可写作

$$P = \mathrm{Re}\,\frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[E_x(\alpha,y)\overline{H}_y(\alpha,y) - E_y(\alpha,y)\overline{H}_x(\alpha,y)]\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}y \tag{6.1.47}$$

其中的电场和磁场分量由式（6.1.21）和（6.1.22）给出。电流 I_0 的计算则可通过对导带上纵向电流的积分得到，即为

$$I_0 = \int_{-w/2}^{w/2} J_{sz}(x)\mathrm{d}x \tag{6.1.48}$$

通过电压计算特性阻抗的定义为

$$Z_{0V} = \frac{V^2}{2P} \tag{6.1.49}$$

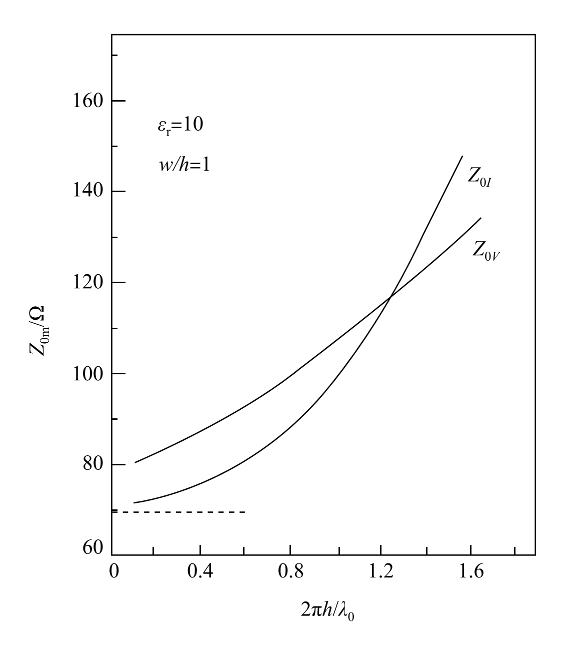


图 6－5　开放微带线的特性阻抗

其中

$$V = \int_0^h E_{y1}(0, y)\,\mathrm{d}y \tag{6.1.50}$$

按以上两种定义所计算的一种结构的特性阻抗示于图6-5。该结果显示，当$\omega \to 0$时Z_{0I}趋于准静态时的结果，而对Z_{0V}则不然，这可能是V的计算对电流分布很敏感所致。此外，计算结果还显示，特性阻抗随着频率的提高而增大。这可解释为，当频率提高时，由于能量更多地集中于介质之中，使得导带与接地板之间的电场增强，使微带线的等效介电常数增大，而减小了导带的等效宽度。

6.2　一般屏蔽微带线中场的奇异积分方程表示

由于奇异积分算子方程把微带线中导带边缘上电场和电流的奇异性自动地包含在其中，使得由这种方法所导出的色散方程具有高速收敛的特性。因此，用奇异积分方程建立微带线的理论具有十分重要的实际意义。下面介绍用积分区间带有间隙的奇异积分方程对微带线进行混合模全波分析。为了使分析结果具有尽量广泛的适应性，在分析中我们将不限制微带的条数、宽度和它们之间的横向距离，但仍假设导带为无限薄的理想导体，衬底为均匀无耗的。这样，这里所建立的包括单屏蔽微带线和多导带耦合屏蔽微带线的一般性混合模分析的统一理论，可用于各种类似的微带结构。

6.2.1　一般屏蔽微带线中电磁场的基本关系

屏蔽微带线中电磁场的特点与开放微带线类似，差别主要在于屏蔽盒所形成的边界条件的影响。如果仍用赫兹矢量表示，则场的关系仍用式（6.1.13）和（6.1.14）表示，在横向$\psi_i^e(x,\ y)$和$\psi_i^h(x,\ y)$，$i=1,\ 2$，满足式（6.1.17）所示的二维齐次亥姆霍兹算子方程。

所分析的一般形式屏蔽微带线横向结构及坐标表示由图6-6给出。考虑到屏蔽微带线的边界条件，其中可能存在的电磁场对应的赫兹矢量可以表示为

$$\left.\begin{aligned}
\psi_1^e(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n^e \mathrm{sh}\alpha_n^{(1)} y \sin k_n x \\
\psi_2^e(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n^e \mathrm{sh}\alpha_n^{(2)} (h-y) \sin k_n x \\
\psi_1^h(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n^h \mathrm{ch}\alpha_n^{(1)} y \cos k_n x \\
\psi_2^h(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n^h \mathrm{ch}\alpha_n^{(2)} (h-y) \cos k_n x
\end{aligned}\right\} \tag{6.2.1}$$

其中

$$\alpha_n^{(1)} = (k_n^2 + \beta^2 - \varepsilon_r k_0^2)^{1/2}$$

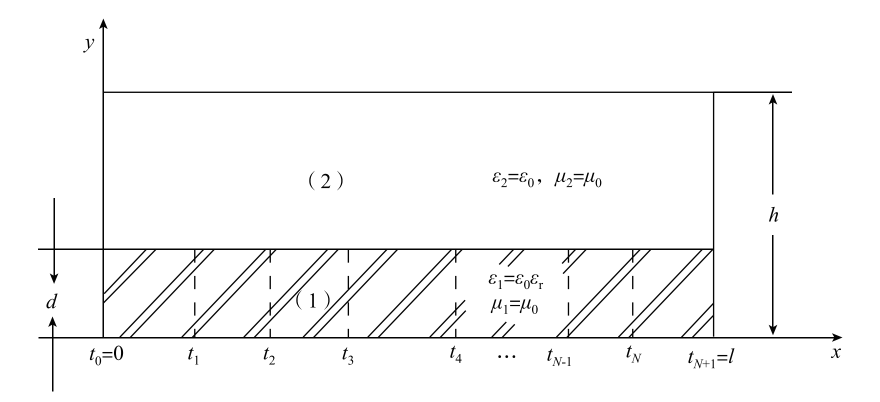


图6-6　一般形式屏蔽带线的结构及坐标

$$\alpha_n^{(2)} = (k_n^2 + \beta^2 - k_0^2)^{1/2}$$

$$k_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1,2,\cdots$$

由上式所给出的 ψ_i^e（x，y）和 ψ_i^h（x，y）（$i=1$，2）按式（6.2.1）可计算出已满足屏蔽盒所要求边界条件的各场分量，其中介质交界面的切向分量为

$$\left.\begin{aligned}
E_{x1}(x,y) &= -\mathrm{i}\beta\sum_{n=1}^{\infty}A_n^e k_n \mathrm{sh}\alpha_n^{(1)}y\cos k_n x \\
&\quad - \mathrm{i}\omega\mu_1\sum_{n=1}^{\infty}A_n^h\alpha_n^{(1)}\mathrm{sh}\alpha_n^{(1)}y\cos k_n x \\
E_{z1}(x,y) &= (k_1^2-\beta^2)\sum_{n=1}^{\infty}A_n^e\alpha_n^{(1)}y\sin k_n x \\
H_{x1}(x,y) &= \mathrm{i}\omega\varepsilon_1\sum_{n=1}^{\infty}A_n^e\alpha_n^{(1)}\mathrm{ch}\alpha_n^{(1)}y\sin k_n x \\
&\quad + \mathrm{i}\beta\sum_{n=1}^{\infty}A_n^h k_n \mathrm{ch}\alpha_n^{(1)}y\sin k_n x \\
H_{z1}(x,y) &= (k_1^2-\beta^2)\sum_{n=1}^{\infty}A_n^h\mathrm{ch}\alpha_n^{(1)}y\cos k_n x
\end{aligned}\right\} \tag{6.2.2}$$

$$\left.\begin{aligned}
E_{x2}(x,y) &= -\mathrm{i}\beta\sum_{n=1}^{\infty}B_n^e k_n \mathrm{sh}\alpha_n^{(2)}(k-y)\cos k_n x \\
&\quad + \mathrm{i}\omega\mu_2\sum_{n=1}^{\infty}B_n^h\alpha_n^{(2)}\mathrm{sh}\alpha_n^{(2)}(h-y)\cos k_n x \\
E_{z2}(x,y) &= (k_2^2-\beta^2)\sum_{n=1}^{\infty}B_n^e\mathrm{sh}\alpha_n^{(2)}(h-y)\sin k_n x
\end{aligned}\right\} \tag{6.2.3}$$

$$\left.\begin{aligned} H_{x2}(x,y) &= -\mathrm{i}\omega\varepsilon_2\sum_{n=1}^{\infty}B_n^e\alpha_n^{(2)}\mathrm{ch}\alpha_n^{(2)}(h-y)\sin k_n x \\ &\quad + \mathrm{i}\beta\sum_{n=1}^{\infty}B_n^h k_n\mathrm{ch}\alpha_n^{(2)}(h-y)\sin k_n x \\ H_{z2}(x,y) &= (k_2^2-\beta^2)\sum_{n=1}^{\infty}B_n^h\mathrm{ch}\alpha_n^{(2)}(h-y)\cos k_n x \end{aligned}\right\}$$

这些场分量还必须满足介质交界面上的边界条件，在 $y=d$ 处边界条件可分为下列相对独立的四组。

$$E_{x1}=E_{x2},\ 0<x<l \tag{6.2.4}$$

$$E_{z1}=E_{z2},\ 0<x<l \tag{6.2.5}$$

$$\left.\begin{aligned} &E_{x1}=0,\ t_{2i-1}<x<t_{2i},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ \frac{N}{2} \\ &H_{z1}=H_{z2},\ t_{2i}<x<t_{2i+1},\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \frac{N}{2} \end{aligned}\right\} \tag{6.2.6}$$

$$\left.\begin{aligned} &E_{z1}=0,\ t_{2i-1}<x<t_{2i},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ \frac{N}{2} \\ &H_{x1}=H_{x2},\ t_{2i}<x<t_{2i+1},\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \frac{N}{2} \end{aligned}\right\} \tag{6.2.7}$$

由这些边界条件可得到以下一组方程。

$$\begin{aligned} &(k_1^2-\beta^2)\sum_{n=1}^{\infty}A_n^e\mathrm{sh}\alpha_n^{(1)}d\sin k_n x \\ &= (k_2^2-\beta^2)\sum_{n=1}^{\infty}B_n^e\mathrm{sh}\alpha_n^{(2)}(h-d)\sin k_n x,\quad 0<x<l \end{aligned} \tag{6.2.8}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty}A_n^e k_n\mathrm{sh}\alpha_n^{(1)}d\cos k_n x + \frac{\omega\mu_0}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}A_n^h\alpha_n^{(1)}\mathrm{sh}\alpha_n^{(1)}d\cos k_n x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}B_n^e k_n\mathrm{sh}\alpha_n^{(2)}(h-d)\cos k_n x - \frac{\omega\mu_0}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}B_n^h\alpha_n^{(2)}\mathrm{sh}\alpha_n^{(2)}(h-d)\cos k_n x,\quad 0<x<l \end{aligned} \tag{6.2.9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n^e\mathrm{sh}\alpha_n^{(1)}\sin k_n x=0,\quad t_{2i-1}<x<t_{2i},\quad i=1,2,\cdots,\frac{N}{2} \tag{6.2.10}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\omega\varepsilon_0}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}A_n^e\alpha_n^{(1)}\mathrm{ch}\alpha_n^{(1)}d\sin k_n x + \sum_{n=1}^{\infty}A_n^h k_n\mathrm{ch}\alpha_n^{(1)}d\sin k_n x \\ &= -\frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_r}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}B_n^e\alpha_n^{(2)}\mathrm{ch}\alpha_n^{(2)}(h-d)\sin k_n x + \sum_{n=1}^{\infty}B_n^h k_n\mathrm{ch}\alpha_n^{(2)}(h-d)\sin k_n x, \\ &\qquad t_{2i}<x<t_{2i+1},\quad i=0,1,2,\cdots,\frac{N}{2} \end{aligned} \tag{6.2.11}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty}A_n^e k_n\mathrm{sh}\alpha_n^{(1)}d\cos k_n x + \frac{\omega\mu_0}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}A_n^h\alpha_n^{(1)}\mathrm{sh}\alpha_n^{(1)}d\cos k_n x=0, \\ &\qquad t_{2i-1}<x<t_{2i},\quad i=1,2,\cdots,\frac{N}{2} \end{aligned} \tag{6.2.12}$$

$$(k_1^2-\beta^2)\sum_{n=1}^{\infty}A_n^h\text{ch}\alpha_n^{(1)}d\cos k_nx=(k_2^2-\beta^2)\sum_{n=1}^{\infty}B_n^h\text{ch}\alpha_n^{(2)}(h-d)\cos k_nx,$$
$$t_{2i}<x<t_{2i+1},\quad i=0,1,2,\cdots,\frac{N}{2} \tag{6.2.13}$$

由这些关系出发可建立起以后所需要的一系列基础方程。首先由式（6.2.10）和（6.2.12）可直接得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{A_n^e}\sin k_nx=0,\quad t_{2i-1}<x<t_{2i},\quad i=1,2,\cdots,\frac{N}{2} \tag{6.2.14}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{A_n^e}k_n\cos k_nx+\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{A_n^n}k_n\cos k_nx=0,\quad t_{2i-1}<x<t_{2i},\quad i=1,2,\cdots,\frac{N}{2} \tag{6.2.15}$$

其中

$$\widetilde{A_n^e}=A_n^e\text{sh}\alpha_n^{(1)}d$$
$$\widetilde{A_n^h}=\frac{\omega\mu_0}{\beta}A_n^h\frac{\alpha_n^{(1)}}{k_n}\text{sh}\alpha_n^{(1)}d$$

为了获得其他基础方程，我们将利用式（6.2.8）、（6.2.9）和（6.2.11）消去 B_n^e 和 B_n^h，而只用 A_n^e 和 A_n^h 表示场量之间的关系，这样所得的方程为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{A_n^e}k_nP_n(\tilde{\beta})\sin k_nx+\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{A_n^h}k_nT_n(\tilde{\beta})\sin k_nx=0,\quad t_{2i}<x<t_{2i+1},$$
$$i=0,1,2,\cdots,\frac{N}{2} \tag{6.2.16}$$

其中

$$P_n(\tilde{\beta})=\varepsilon_r\frac{\alpha_n^{(1)}}{k_n}\text{cth}\alpha_n^{(1)}d+\frac{\varepsilon_r-\tilde{\beta}^2}{1-\tilde{\beta}^2}\frac{\alpha_n^{(2)}}{k_n}\text{cth}\alpha_n^{(2)}(h-d)$$
$$+\tilde{\beta}^2\frac{1-\varepsilon_r}{1-\tilde{\beta}^2}\frac{k_n}{\alpha_n^{(2)}}\text{cth}\alpha_n^{(2)}(h-d)$$
$$T_n(\tilde{B})=\tilde{\beta}^2\frac{k_n}{\alpha_n^{(1)}}\text{cth}\alpha_n^{(1)}d+\tilde{\beta}^2\frac{k_n}{\alpha_n^{(2)}}\text{cth}\alpha_n^{(2)}(h-d)$$
$$\tilde{\beta}=\frac{\beta}{k_0}$$

用类似的方法由式（6.2.8）、（6.2.9）和（6.2.13）可以得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{A_n^e}Q_n(\tilde{\beta})\cos k_nx+\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{A_n^h}W_n(\tilde{\beta})\cos k_nx=0,t_{2i}<x<t_{2i+1},i=0,1,2,\cdots,\frac{N}{2} \tag{6.2.17}$$

其中，

$$Q_n(\tilde{\beta})=\frac{1-\varepsilon_r}{1-\tilde{\beta}^2}\frac{k_n}{\alpha_n^{(2)}}\text{cth}\alpha_n^{(2)}(h-d)$$

$$W_n(\tilde{\beta}) = \frac{\varepsilon_r - \tilde{\beta}^2}{1 - \tilde{\beta}^2} \frac{k_n}{\alpha_n^{(1)}} \mathrm{cth}\alpha_n^{(1)} d + \frac{k_n}{\alpha_n^{(2)}} \mathrm{cth}\alpha_n^{(2)}(h - d)$$

这组方程为我们建立奇异积分方程打下了基础，因此称它们为基础方程。

6.2.2 辅助方程

用奇异积分方程方法对微带线进行全波分析，最终也是要建立起一个线性代数方程组，该方程组的未知量是$\widetilde{A_n^e}$和$\widetilde{A_n^h}$，为了使所建立的方程组具有快速收敛的特性，将对上面已建立起的基础方程进行一番特殊处理。首先把式（6.2.14）对 x 进行一次微商，再把所得结果代入式（6.2.15），便可得到下面的两个方程。

$$\left.\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{A_n^e} k_n \cos k_n x = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{A_n^h} k_n \cos k_n x = 0 \end{aligned}\right\}, \quad t_{2i-1} < x < t_{2i}, \quad i = 1, 2, \cdots, \frac{N}{2} \qquad (6.2.18)$$

把方程（6.2.17）对 x 进行一次微商然后乘以 T，再与乘以 W 的式（6.2.16）相减，而后把相减所得的结果除以（$PW - TQ$），最后在所得方程的两侧同加一项

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{A_n^e} k_n \sin k_n x$$

即又得另一方程

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{A_n^e} k_n \sin k_n x = f(x), \quad t_{2i} < x < t_{2i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, \frac{N}{2} \qquad (6.2.19)$$

其中，P、T、Q 和 W 分别为 $P_n(\tilde{\beta})$、$T_n(\tilde{\beta})$、$Q_n(\tilde{\beta})$ 和 $W_n(\tilde{\beta})$ 当 $n \to \infty$ 时的极限，它们是

$$P = \varepsilon_r + \frac{\varepsilon_r - \tilde{\beta}^2}{1 - \tilde{\beta}^2} + \tilde{\beta}^2 \frac{1 - \varepsilon_r}{1 - \tilde{\beta}^2}$$

$$T = 2\tilde{\beta}^2$$

$$Q = \frac{1 - \varepsilon_r}{1 - \tilde{\beta}^2}$$

$$W = \frac{\varepsilon_r - \tilde{\beta}^2}{1 - \tilde{\beta}^2} + 1$$

另外

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \widetilde{A_n^e} + b_n \widetilde{A_n^h}) \sin k_n x$$

其中

$$a_n = k_n\left[1 - \frac{P_n(\tilde{\beta})W - TQ_n(\tilde{\beta})}{PW - TQ}\right]$$

$$b_n = k_n \frac{W_n(\tilde{\beta})T - T_n(\tilde{\beta})W}{PW - TQ}$$

完全类似地，把方程（6.2.17）对 x 进行一次微商然后乘以 P，再与乘以 Q 的式（6.2.16）相减，而后把所得结果除以（$PW - TQ$），最后在所得方程的两侧同减一项

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{A_n^h} k_n \sin k_n x$$

就可得到另一方程

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{A_n^h} k_n \sin k_n x = g(x), \quad t_{2i} < x < t_{2i+1}, \quad i = 0,1,2,\cdots,\frac{N}{2} \tag{6.2.20}$$

其中

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \widetilde{A_n^e} + d_n \widetilde{A_n^h}) \sin k_n x$$

$$c_n = k_n \frac{P_n(\tilde{\beta})Q - Q_n(\tilde{\beta})P}{PW - TQ}$$

$$d_n = k_n\left[1 - \frac{W_n(\tilde{\beta})P - T_n(\tilde{\beta})Q}{PW - TQ}\right]$$

新的方程组（6.2.18）~（6.2.20）重要的性质是，$f(x)$ 和 $g(x)$ 所包含的权系数 a_n、b_n、c_n 和 d_n 随 n 的增加而按指数规律衰减。正是这一特性保证了最后所求得的色散方程高速收敛的特性。我们把这些方程称为辅助方程，由它们出发可以导出我们需要的奇异积分方程。

6.2.3　奇异积分算子方程的建立

为了建立描述微带线特性的奇异积分方程，我们首先引入一组辅助函数 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，考虑到方程（6.2.18）的特性，这组函数定义为

$$\left.\begin{aligned} F_1(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{A_n^e} \cos k_n x, \quad t_{2i} < x < t_{2i+1}, \quad i = 0,1,2,\cdots,\frac{N}{2} \\ F_2(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{A_n^h} \cos k_n x, \quad t_{2i} < x < t_{2i+1}, \quad i = 0,1,2,\cdots,\frac{N}{2} \end{aligned}\right\} \tag{6.2.21}$$

利用三角函数的正交性，由上式便可得

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{A_n^e} k_n &= \frac{2}{l} \int\!\!\!\!\!\!= _0^l F_1(x) \cos k_n x \mathrm{d}x \\ \widetilde{A_n^h} k_n &= \frac{2}{l} \int\!\!\!\!\!\!= _0^l F_2(x) \cos k_n x \mathrm{d}x \end{aligned}\right\}, \quad t_{2i} < x < t_{2i+1}, \quad i = 0,1,2,\cdots,\frac{N}{2} \tag{6.2.22}$$

其中，积分号上的两个横道表示积分限不连续，在该式中表示除去 $t_{2i-1} < x < t_{2i}$，

$i=1,2,\cdots,\dfrac{N}{2}$。

把式（6.2.22）代入方程（6.2.19）和（6.2.20）即可得到一组有关辅助函数 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 的积分算子方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{l}\fint_0^l F_1(x')k(x,x')\mathrm{d}x' &= \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\widetilde{A_n^e}+b_n\widetilde{A_n^h})\sin k_n x\\ \frac{2}{l}\fint_0^l F_2(x')k(x,x')\mathrm{d}x' &= \sum_{n=1}^{\infty}(c_n\widetilde{A_n^e}+d_n\widetilde{A_n^h})\sin k_n x\end{aligned}\right\}\tag{6.2.23}$$

其中

$$k(x,x') = \sum_{n=1}^{\infty}\sin k_n x\cos k_n x' = \frac{1}{2}\frac{\sin\dfrac{\pi x}{l}}{\cos\dfrac{\pi x'}{l}-\cos\dfrac{\pi x}{l}}\tag{6.2.24}$$

显然，这是个奇异积分核，所以式（6.2.23）是一对奇异积分算子方程，而且其积分限上带有间隙。如果再做变量替换

$$y = \cos\frac{\pi x'}{l},\quad z = \cos\frac{\pi x}{l}$$

式（6.2.23）就变成

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\fint_{-1}^{1}\frac{F_1(x')}{(1-y^2)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}y}{y-z} &= \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\widetilde{A_n^e}+b_n\widetilde{A_n^h})G_n(z)\\ \frac{1}{\pi}\fint_{-1}^{1}\frac{F_2(x')}{(1-y^2)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}y}{y-z} &= \sum_{n=1}^{\infty}(c_n\widetilde{A_n^e}+d_n\widetilde{A_n^h})G_n(z)\end{aligned}\right\}\tag{6.2.25}$$

其中

$$G_n(z) = \frac{\sin(n\cos^{-1}z)}{(1-z^2)^{1/2}}\tag{6.2.26}$$

积分号上的两横现在代表除去间隙 $\lambda_{2i}<y<\lambda_{2i-1}$，$i=1,2,\cdots,\dfrac{N}{2}$，其中

$$\lambda_i = \cos\frac{\pi t_i}{l}$$

这是一对标准的积分限带有间隙的奇异积分算子方程。这是一种比较特殊的积分方程，关于它的理论需要特别进行讨论。

6.3 希尔伯特变换和奇异积分算子方程

上面我们已经把一般屏蔽微带线全波分析问题归结为求解积分区间带有间隙的奇异积分算子方程的问题。这类积分方程在一般的文献中很少讨论，所以我们要对这一类方程的理论作一定的介绍。

6.3.1　希尔伯特变换和奇异积分算子方程

所谓希尔伯特变换是指下列函数关系。

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\text{P. V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(y)}{y-x}\mathrm{d}y \tag{6.3.1}$$

它把函数 $\varphi(x)$ 变换为 $f(x)$，其中的 P. V. 表示主值积分。显然，(6.3.1) 的右侧是个奇异积分算子，积分核 $\frac{1}{y-x}$ 是奇异的，这是希尔伯特变换的特点，其中 $f(x)$，$\varphi(x)\in L^p(-\infty,\infty)$，$1<p<\infty$。

这一变换常记作

$$f(x) = H_x[\varphi(y)] \tag{6.3.2}$$

或简单地写成

$$f = H[\varphi] \tag{6.3.3}$$

定理 1　如果 $\varphi(x)\in L^p(-\infty,\infty)$，则变换 (6.3.1) 决定一个函数 $f(x)\in L^p(-\infty,\infty)$，而且 $f(x)$ 的希尔伯特变换为 $-\varphi(x)$，即

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi}\text{P. V.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{y-x}\mathrm{d}y \tag{6.3.4}$$

可以看出，式 (6.3.4) 是式 (6.3.1) 的逆变换。这样，式 (6.3.1) 和 (6.3.4) 构成一个希尔伯特变换对。这种逆变换关系可简单地表示成

$$H[H(\varphi)] = -\varphi \tag{6.3.5}$$

由复变函数理论可知，希尔伯特变换表示一个上半平面解析的复变函数的实部与虚部之间的关系。由这一理论不仅能证明以上变换关系，而且还可以证明以下定理。

定理 2　设 $\varphi_1(x)\in L^{p_1}(-\infty,\infty)$，$\varphi_2(x)\in L^{p_2}(-\infty,\infty)$，如果

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}\leqslant 1$$

则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x)\varphi_2(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty}H_x[\varphi_1(y)]H_x[\varphi_2(y)]\mathrm{d}x \tag{6.3.6}$$

定理 3　设 $\varphi_1(x)\in L^{p_1}(-\infty,\infty)$，$\varphi_2(x)\in L^{p_2}(-\infty,\infty)$，如果

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}<1$$

则有

$$H\{\varphi_1H[\varphi_2]+\varphi_2H[\varphi_1]\} = H[\varphi_1]H[\varphi_2]-\varphi_1\varphi_2 \tag{6.3.7}$$

利用以上理论，不难求解以下形式的奇异积分算子方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(y)}{y-x}\mathrm{d}y = f(x) \tag{6.3.8}$$

其中，$f(x)$ 为已知函数；$\varphi(x)$ 为待求函数；λ 则为常数。首先对式 (6.3.8) 两边施以希尔伯特变换，即

$$H_x\{\varphi(y)-\lambda\pi H_x[H_x[\varphi(y)]]\}=H_x[f(y)] \tag{6.3.9}$$

利用式（6.3.5）则上式成为

$$H_x[\varphi(y)]+\lambda\pi\varphi(x)=H_x[f(y)] \tag{6.3.10}$$

从式（6.3.8）中解出 $H_x[\varphi(y)]$ 后代入上式即有

$$(1+\lambda^2\pi^2)\varphi(x)=f(x)+\lambda\pi H_x[f(y)]$$

由此解出 $\varphi(x)$ 即得方程（6.3.8）的解

$$\varphi(x)=\frac{1}{1+\lambda^2\pi^2}\left[f(x)+\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y)}{y-x}\mathrm{d}y\right] \tag{6.3.11}$$

6.3.2　积分区间有限希尔伯特变换

如果函数 $\varphi(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 之外为零，则相应于（6.3.1）的希尔伯特变换成为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(y)}{y-x}\mathrm{d}y \tag{6.3.12}$$

该式被称为积分区间有限希尔伯特变换，并记作

$$f(x)=T_x[\varphi(y)]=T[\varphi] \tag{6.3.13}$$

在相同的条件下也存在类似的关系

$$T\{\varphi_1T[\varphi_2]+\varphi_2T[\varphi_1]\}=T[\varphi_1]T[\varphi_2]-\varphi_1\varphi_2 \tag{6.3.14}$$

对于积分区间有限希尔伯特变换而言，不存在像式（6.3.4）那样简单的逆变换，因为这需要区间 $[-1,1]$ 以外 $f(x)$ 的知识，它一般并不为零。事实上，在 $L^p(p>1)$ 空间逆变换不是唯一的。为了求得式（6.3.12）的逆变换，可借助于函数

$$\varphi(x)=(1-x^2)^{\pm 1/2}$$

的有限希尔伯特变换的性质。首先讨论 $T_x[(1-x^2)^{-1/2}]$，为此我们令

$$y=\frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{6.3.15}$$

则容易验证，当 $|x|<1$ 时有

$$T_x[(1-y^2)^{-1/2}]=\frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-1}^{1}\frac{(1-y^2)^{-1/2}}{y-x}\mathrm{d}y=0 \tag{6.3.16}$$

$$T_x[(1-y^2)^{1/2}]=\frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-1}^{1}\frac{(1-y^2)^{1/2}}{y-x}\mathrm{d}y=-x \tag{6.3.17}$$

如果设 $\varphi_1(x)=\varphi(x)$，$\varphi_2(x)=(1-x^2)^{1/2}$，则由式（6.3.14）可得

$$T_x[-y\varphi(y)+(1-y^2)^{1/2}f(y)]=-xf(x)-\sqrt{1-x^2}\varphi(x)$$

其中，$f(x)$ 为 $\varphi(x)$ 的区间有限希尔伯特变换。但因

$$\begin{aligned}T_x[y\varphi(y)]&=\frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-1}^{1}\frac{y\varphi(y)}{y-x}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-1}^{1}\frac{y-x+x}{y-x}\varphi(y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(y)\,\mathrm{d}y + xf(x)$$

于是有

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(y)\,\mathrm{d}y + T_x[(1-y^2)^{1/2}f(y)] = -(1-x^2)^{1/2}\varphi(y)$$

这一结果常写成如下的形式

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-y^2}f(y)}{y-x}\mathrm{d}y + \frac{c}{\sqrt{1-x^2}} \tag{6.3.18}$$

其中

$$c = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(y)\,\mathrm{d}y \tag{6.3.19}$$

它具有任意常数的性质。式（6.3.18）可以看作式（6.3.12）的逆变换，或者说式（6.3.18）是奇异积分算子方程（6.3.12）的解。

6.3.3　积分区间带有间隙的奇异积分算子方程

有一类积分算子方程，其中的积分算子的积分区间是间断的，即积分算子方程在积分区间的某一段甚至某几段是不成立的，这类方程称为积分区间有间隙的奇异积分方程。在前面对一般形式屏蔽微带线进行全波分析时就导出了这一类积分算子方程。

如果积分区间只有一段间隙，我们把这类奇异积分算子方程表示为

$$\frac{1}{\pi}\mathrm{P.V.}\,⨍_{-1}^{1}\frac{\varphi(y)}{y-x}\mathrm{d}y = f(x),\quad -1 < x < 1\,(\text{除去间隙 }\lambda < x < \mu) \tag{6.3.20}$$

即是，$-1<x<\lambda$，$\mu<x<1$. 积分号上带一横道表示积分区间存在一个间隙 $\lambda<y<\mu$。式（6.3.20）中的 $f(x)$ 为已知函数，$\varphi(x)$ 为待求函数。

如果设

$$\varphi^*(x) = \begin{cases}\varphi(x), & -1<x<\lambda,\quad \mu<x<1\\ 0, & \lambda<x<\mu\end{cases} \tag{6.3.21}$$

$$f^*(x) = \begin{cases}f(x), & -1<x<\lambda,\quad \mu<x<1\\ \psi(x), & \lambda<x<\mu\end{cases} \tag{6.3.22}$$

则可得到新的方程，因为以下基本上都是主值积分，为了简化，以下将把符号“P. V.”省略。现在考虑

$$\frac{1}{\pi}⨍_{-1}^{1}\frac{\varphi^*(y)}{y-x}\mathrm{d}y = f^*(x),\quad -1<x<1 \tag{6.3.23}$$

显然这一方程与方程（6.3.12）是相同的类型，故其逆变换具有（6.3.18）的形式，而且可以写成

$$\varphi^*(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}\left[c - \frac{1}{\pi}⨍_{-1}^{1}\frac{(1-y^2)^{1/2}f(y)}{y-x}\mathrm{d}y - \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\mu}\frac{(1-y^2)^{1/2}\psi(y)}{y-x}\mathrm{d}y\right] \tag{6.3.24}$$

由于在区间 $\lambda < x < \mu$ 内 $\varphi^*(x) = 0$，故由上式可得

$$\frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\mu}\frac{(1-y^2)^{1/2}\psi(y)}{y-x}\mathrm{d}y = c - \frac{1}{\pi}\fint_{-1}^{1}\frac{(1-y^2)^{1/2}f(y)}{y-x}\mathrm{d}y \tag{6.3.25}$$

再做变换

$$\xi = \frac{2}{\mu-\lambda}\left[x - \frac{1}{2}(\mu+\lambda)\right]$$
$$\eta = \frac{2}{\mu-\lambda}\left[y - \frac{1}{2}(\mu+\lambda)\right] \tag{6.3.26}$$

可把（6.3.25）变为

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-y^2)^{1/2}\psi(y)}{\eta-\xi}\mathrm{d}\eta = g(\xi), \quad -1 < \xi < 1 \tag{6.3.27}$$

这里的 $g(\xi)$ 代表（6.3.25）中的右侧部分，而显然方程（6.3.27）的解则可写成

$$\psi(y) = \frac{1}{(1-y^2)^{1/2}(1-\eta^2)^{1/2}}\left[c' - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\zeta^2)^{1/2}g(\zeta)}{\zeta-\eta}\mathrm{d}\zeta\right] \tag{6.3.28}$$

把这一结果代回到式（6.3.24）中就能得到用 $f(x)$ 表示的 φ^*。我们考虑 $-1 < x < \lambda$，$\mu < x < 1$ 的情形，这样我们有

$$\varphi(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}}\left[c - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-y^2)^{1/2}f(y)}{y-x} - \frac{c'}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{d\eta}{(1-\eta^2)^{1/2}(\eta-\xi)}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(1-\eta^2)^{1/2}(\eta-\xi)}\left(\int_{-1}^{1}\frac{(1-\zeta^2)^{1/2}g(\zeta)}{\zeta-\eta}\right)\mathrm{d}\eta\right] \tag{6.3.29}$$

当 $\lambda < x < \mu$ 时，$-1 < \xi < 1$，而在（6.3.29）中的条件为 $-1 < x < \lambda$ 和 $\mu < x < 1$，故此时有 $|\xi| > 1$，于是

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}\eta}{(1-\eta^2)^{1/2}(\eta-\xi)} = T_\xi[(1-\eta^2)^{-1/2}] = -(1-\xi^2)^{-1/2}\mathrm{sgn}\xi \tag{6.3.30}$$

又因

$$\frac{1}{\eta-\xi}\cdot\frac{1}{\zeta-\eta} = \frac{1}{\eta-\xi}\left(\frac{1}{\eta-\xi}+\frac{1}{\zeta-\eta}\right)$$

故有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(1-\eta^2)^{1/2}(\eta-\xi)}\left[\int_{-1}^{1}\frac{(1-\zeta^2)^{1/2}g(\zeta)}{\zeta-\eta}\right]\mathrm{d}\eta$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\zeta^2)^{1/2}g(\zeta)}{\zeta-\xi}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{(1-\eta^2)^{-1/2}}{\eta-\xi}+\frac{(1-\eta^2)^{-1/2}}{\zeta-\eta}\right]\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi$$
$$= -\frac{\mathrm{sgn}\xi}{(\xi^2-1)^{1/2}}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\zeta^2)^{1/2}g(\zeta)}{\zeta-\xi}\mathrm{d}\zeta \tag{6.3.31}$$

这是因为此处 $|\xi| > 1$，而 $|\zeta| < 1$，故有

$$T_\xi[(1-\eta^2)^{-1/2}] = -(\zeta^2-1)^{-1/2}\mathrm{sgn}\xi, \quad |\xi| > 1$$
$$T_\zeta[(1-\eta^2)^{-1/2}] = 0, \quad |\zeta| < 1$$

此外，考虑到式（6.3.25）和（6.3.27），式（6.3.31）中包含 $g(\zeta)$ 的积分为

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\zeta^2)^{1/2}g(\zeta)}{\zeta-\xi}\mathrm{d}\zeta = \frac{c}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\zeta^2)^{1/2}}{\zeta-\xi}\mathrm{d}\zeta$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\zeta^2)^{1/2}}{\zeta-\xi}\cdot\frac{1}{\pi}⨍_{-1}^{1}\frac{(1-y^2)^{1/2}f(y)}{y-z}\mathrm{d}y\mathrm{d}\zeta \qquad (6.3.32)$$

这里的 z 相当于式（6.3.26）中的 x，与 ζ 对应。由于

$$\frac{1}{y-x}\left(\frac{1}{\zeta-\xi}+\frac{1}{\eta-\zeta}\right)=\frac{1}{(\zeta-\xi)(y-z)}$$

则（6.3.32）右侧的第二项可表示为

$$-\frac{1}{\pi}⨍_{-1}^{1}\frac{(1-y^2)^{1/2}f(y)}{y-x}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left[\frac{(1-\zeta^2)^{1/2}}{\zeta-\xi}+\frac{(1-\zeta^2)^{1/2}}{\eta-\zeta}\right]\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}y$$

再由于

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\zeta^2)^{1/2}}{\zeta-\xi}\mathrm{d}\zeta=-\xi+(\xi^2-1)^{1/2}\mathrm{sgn}\xi,\quad |\xi|>1 \qquad (6.3.33)$$

所以式（6.3.32）成为

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\zeta^2)^{1/2}g(\zeta)}{\zeta-\xi}\mathrm{d}\zeta = C[-\xi+(\xi^2-1)^{1/2}\mathrm{sgn}\xi]$$
$$-\frac{1}{\pi}⨍_{-1}^{1}\frac{(1-y^2)^{1/2}f(y)}{y-x}[-\xi+(\xi^2-1)^{1/2}\mathrm{sgn}\xi+\eta-(\eta^2-1)^{1/2}\mathrm{sgn}\eta]\mathrm{d}y$$
$$(6.3.34)$$

把式（6.3.34）、（6.3.31）和（6.3.30）代回到式（6.3.29），经整理后就得到

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi}⨍_{-1}^{1}\frac{Y}{X}\frac{f(y)}{y-x}\mathrm{d}y+\frac{P(x)}{X} \qquad (6.3.35)$$

其中

$$Y=(1-y^2)^{1/2}(\eta^2-1)^{1/2}\mathrm{sgn}\eta$$
$$X=(1-x^2)^{1/2}(\xi^2-1)^{1/2}\mathrm{sgn}\xi$$
$$P(x)=C_0(C_1+\xi)$$

而

$$C_0=C=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(y)\mathrm{d}y$$
$$C_1=\frac{C'}{C}+\frac{2}{C(\mu-\lambda)\pi}⨍_{-1}^{1}(1-y^2)^{1/2}f(y)\mathrm{d}y$$

式（6.3.35）就是形如（6.3.20）的积分区间带有一个间隙的奇异积分算子方程的解，除了待定常数外完全由已知函数 $f(x)$ 表达出来。

6.3.4　积分区间带有多个间隙的奇异积分算子方程

如果积分区间的间隙不只一个，则把与方程（6.3.20）类似的方程表示为

$$\frac{1}{\pi}\fint_{-1}^{1}\frac{\varphi(y)}{y-x}\mathrm{d}y = f(x), \quad -1 < x,y < 1(\text{除去间隙 } \lambda_i < x,y < \mu_i, i = 1,2,\cdots,n) \tag{6.3.36}$$

其中，我们用积分号上两个横道表示积分区间存在多于一个的间隙。和以前一样，方程只当 x 在间隙外取值时才是成立的。而且，对于间隙中的 x 值积分不再是奇异的，因为 y 不取其中的值。我们可用归纳法证明方程（6.3.36）的解具有以下形式。

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\pi}\fint_{-1}^{1}\frac{Y}{X}\cdot\frac{f(y)}{(y-x)}\mathrm{d}y + \frac{P_n(x)}{X} \tag{6.3.37}$$

其中

$$X = (1-x^2)^{1/2}\prod_{1}^{n}(\xi_r^2-1)^{1/2}\operatorname{sgn}\xi_r$$

$$Y = (1-y^2)^{1/2}\prod_{1}^{n}(\eta_r^2-1)^{1/2}\operatorname{sgn}\eta_r$$

$$\xi_r = \frac{2}{\mu_r-\lambda_r}\left[x-\frac{1}{2}(\lambda_r+\mu_r)\right]$$

$$\eta_r = \frac{2}{\mu_r-\lambda_r}\left[y-\frac{1}{2}(\lambda_r+\mu_r)\right]$$

$$P_n(x) = C_0\prod_{1}^{n}(C_r+\xi_r)$$

这里 C_r 为任意常数。

现在我们设以上结果具有一般意义，那么当存在 $n+1$ 个间隙时也是正确的。为了证明此点，我们在积分区间原有的 n 个间隙的基础上再增加一个间隙（λ，μ），对此情况我们设

$$\theta(y) = \begin{cases}\varphi(y), & \lambda > x, \quad y < \mu \\ 0, & \lambda < x, \quad y < \mu\end{cases} \tag{6.3.38}$$

则有新的方程

$$\frac{1}{\pi}\fint_{-1}^{1}\frac{\theta(y)}{y-x}\mathrm{d}y = \begin{cases}f(x), & -1 < x < 1(\text{除去 } n \text{ 个间隙}) \\ g(x), & \lambda < x,y < \mu\end{cases} \tag{6.3.39}$$

对这样一个方程而言，相当于只有原来的 n 个间隙，它的解就是式（6.3.37），故可以表示为

$$\theta(x) = -\frac{1}{\pi}\fint_{-1}^{1}\frac{f(y)}{y-x}\frac{Y}{X}\mathrm{d}y - \frac{1}{\pi}\fint_{\lambda}^{\mu}\frac{g(y)}{y-x}\frac{Y}{X}\mathrm{d}y + \frac{P_n(x)}{X} \tag{6.3.40}$$

按规定，θ（x）在 $\lambda<x<\mu$ 时为零，因此由上式即可得到

$$\frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\mu}\frac{Yg(y)}{y-x}\mathrm{d}y = P_n(x) - \frac{1}{\pi}\fint_{-1}^{1}\frac{Yf(y)}{y-x}\mathrm{d}y, \quad \lambda < x < \mu \tag{6.3.41}$$

和前面一样，如式（6.3.26）所示引入新的归一化变量 ξ、η，并用 $G(\xi)$ 表示式（6.3.41）的右方，则可得到关于 $g(y)$ 的标准积分区间有限的奇异积分方程

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{Yg(\eta)}{\eta-\xi}\mathrm{d}\eta = G(\xi) \tag{6.3.42}$$

它的解可以表示为

$$g(\eta) = \frac{1}{Y(1-\eta^2)^{1/2}}\left[C-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\zeta^2)^{1/2}G(\zeta)}{\zeta-\eta}\mathrm{d}\zeta\right] \tag{6.3.43}$$

为了避免混淆，这里引用了新的归一化变量。把 $g(\eta)$ 代回到式（6.3.41）时，其左侧的积分便是

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(1-\eta^2)^{1/2}(\eta-\xi)}\left[C-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\zeta^2)^{1/2}G(\zeta)}{\zeta-\eta}\right]\mathrm{d}\eta \tag{6.3.44}$$

下面考虑，当把它代入到式（6.3.40）时，x 将取（λ，μ）以外的值，这时 $|\xi|>1$，于是上式的第一部分积分成为

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}\eta}{(1-\eta^2)^{1/2}(\eta-\xi)} = -(\xi^2-1)^{1/2}\mathrm{sgn}\xi$$

这样我们就有

$$\frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\mu}\frac{Yg(y)}{y-x}\mathrm{d}y = -\frac{\mathrm{sgn}\xi}{(\xi^2-1)^{1/2}}\left[C-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\zeta^2)^{1/2}G(\zeta)}{\zeta-\xi}\mathrm{d}\zeta\right] \tag{6.3.45}$$

其中

$$G(\zeta) = P_n(z) - \frac{1}{\pi}⨍_{-1}^{1}\frac{Yf(y)}{y-z}\mathrm{d}y$$

这里的 z 按式（6.3.26）的关系与 ζ 对应。在（6.3.45）中包含 P_n（z）的积分可以写作

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(z)-P_n(x)}{\zeta-\xi}(1-\zeta^2)^{1/2}d\zeta-\frac{P_n(x)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\zeta^2)^{1/2}}{\zeta-\xi}d\zeta$$

现在的 $P_n(z)-P_n(x)$ 是 z 和 x 的 n 阶多项式，它含有（$z-x$）或（$\zeta-\xi$）的因子，于是第一部分积分结果是个 x 的 $n-1$ 阶多项式，记作 $Q_{n-1}(x)$，而由于有式（6.3.33）这一结果，可把式（6.3.45）写成

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\mu}\frac{Yg(y)}{y-x}\mathrm{d}y = -\frac{\mathrm{sgn}\xi}{(\xi^2-1)^{1/2}}\Big[&C+Q_{n-1}(x)+\xi P_n(x)\\&-(\xi^2-1)^{1/2}P_n(x)\mathrm{sgn}\xi+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\zeta^2)^{1/2}}{\zeta-\xi}\mathrm{d}\zeta⨍_{-1}^{1}\frac{Yf(y)}{y-z}\mathrm{d}y\Big]\end{aligned} \tag{6.3.46}$$

该式中的右侧倒数第二项将在代回到式（6.3.40）时被抵消，面前三项之和构成一个 $n+1$ 阶的多项式，可记作 $P_{n+1}(x)$. 连同前面的系数，它们在式（6.3.40）中将形成一项，即

$$\frac{P_{n+1}(x)\mathrm{sgn}\xi}{(\xi^2-1)^{1/2}}$$

它被除以 X 就构成一个新的自由项。式（6.3.46）中右侧的最后一项将等于

$$\frac{1}{\pi}⨍_{-1}^{1}\frac{Yf(y)}{y-x}[-\xi+(\xi^2-1)^{-1/2}\mathrm{sgn}\xi+\eta-(\eta^2-1)^{1/2}\mathrm{sgn}\eta]\mathrm{d}y$$

这里第一部分是个常数，将归入 $P_{n+1}(x)$，而另一部分将在代入式（6.3.40）时

被抵消，能产生影响的一项是

$$-\frac{1}{\pi}⨍_{-1}^{1}\frac{Y}{X}\frac{(\eta^2-1)^{1/2}\operatorname{sgn}\eta}{(\xi^2-1)^{1/2}\operatorname{sgn}\xi}\frac{f(y)}{y-x}\mathrm{d}y$$

它与式（6.3.37）相比，只是使 Y 和 X 按间隙数的增加而依规律加长到 $n+1$.
这样我们就证明了式（6.3.37）对任意的间隙都代表方程（6.3.36）的解。

6.4 屏蔽微带线的色散特性

我们已从一般屏蔽微带线的全波分析入手导出了一组积分区间带有间隙的奇异积分算子方程，又根据奇异积分算子的理论导出了这类方程解的一般表达形式。下面将根据这种解建立一般形式屏蔽微带线的色散方程，并根据这一方程计算对称屏蔽微带线的色散特性。

6.4.1 一般形式屏蔽微带线的色散方程

已经求出了方程（6.3.36）的解的表达式（6.3.37），就可以把一般形式屏蔽微带线全波分析的奇异积分方程（6.2.25）的解表示成

$$F_1(x)=\frac{1}{\prod_{i=1}^{N/2}(\xi_i^2-1)^{1/2}\operatorname{sgn}\xi_i}\Bigg[\sum_{i=1}^{N/2}C_i x^i-\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\widetilde{A_m^e}+b_m\widetilde{A_m^h})\cdot⨍_{-1}^{1}\frac{(1-y^2)^{1/2}\prod_{i=1}^{N/2}(\eta_i^2-1)^{1/2}\operatorname{sgn}\eta_i G_m(y)}{y-x}\mathrm{d}y\Bigg] \tag{6.4.1}$$

$$F_2(x)=\frac{1}{\prod_{i=1}^{N/2}(\xi_i^2-1)^{1/2}\operatorname{sgn}\xi_i}\Bigg[\sum_{i=1}^{N/2}C'_i x^i-\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}(c_m\widetilde{A_m^e}+d_m\widetilde{A_m^h})\cdot⨍_{-1}^{1}\frac{(1-y^2)^{1/2}\prod_{i=1}^{N/2}(\eta_i^2-1)^{1/2}\operatorname{sgn}\eta_i G_m(y)}{y-x}\mathrm{d}y\Bigg] \tag{6.4.2}$$

其中，C_i 和 C_i'均为待定常数。为了确定这些常数我们利用边界条件

$$\int_{t_{2k}}^{t_{2k+1}}F_1(x)\mathrm{d}x=E_{z1}\Big|_{t_{2k}}^{t_{2k+1}}=0,\quad k=0,1,2,\cdots,\frac{N}{2} \tag{6.4.3}$$

由此可得到确定 C_k 的$\dfrac{N}{2}+1$ 个方程

$$\sum_{i=0}^{N/2}C_i\int_{2k}^{2k+1}R(x)\cos^i\left(\frac{\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x=\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\widetilde{A_m^e}+b_m\widetilde{A_m^h})\int_{2k}^{2k+1}S_m(x)R(x)\mathrm{d}x$$

$$k=0,1,2,\cdots,\frac{N}{2} \tag{6.4.4}$$

其中

$$R(x)=\frac{1}{\prod_{i=1}^{N/2}(\xi_i^2-1)^{1/2}\operatorname{sgn}\xi_i}$$

$$S_m(x) = \frac{1}{\pi} \fint_{-1}^{1} \frac{(1 - y^2)^{1/2} \prod_{i=1}^{N/2} (\eta_i^2 - 1)^{1/2} \operatorname{sgn}\eta_i G_m(y)}{y - x} \mathrm{d}y$$

从方程（6.4.4）中解出 C_i，并表示为

$$C_i = \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \widetilde{A_m^e} + b_m \widetilde{A_m^h}) H_m^{(i)}, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, \frac{N}{2} \qquad (6.4.5)$$

这里的 $H_m^{(i)}$ 为 $R_m(x)$ 和 $S_m(x)$ 在非导带间隙段上积分组成的有理函数。

为了确定 C_i'，可考虑方程（6.2.12）在 $x \to x_i \left(i = 1, 2, \cdots, \frac{N}{2} + 1 \right)$ 成立这一事实，利用式（6.2.22）和相关的已知结果（6.4.1）、(6.4.2）和（6.4.5），可得到确定 C_i' 的方程组

$$\sum_{i=0}^{N/2} C'_i U_i^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} (c_m \widetilde{A_m^e} + d_m \widetilde{A_m^h}) V_m^{(k)} - \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \widetilde{A_m^e} + b_m \widetilde{A_m^h}) K_m^{(k)},$$

$$k = 1, 2, \cdots, \frac{N}{2} + 1 \qquad (6.4.6)$$

其中

$$K_m^{(k)} = \sum_{i=0}^{N/2} H_m^{(i)} X_i^{(k)} - Y_m^{(k)}$$

$$X_i^{(k)} = Q f_i^{(k)} - \sum_{n=1}^{\infty} E_n^{(i)} \frac{\cos k_n t_k}{k_n} (Q - Q_n(\tilde{\beta}))$$

$$Y_m^{(k)} = Q g_m^{(k)} - \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} \frac{\cos k_n t_k}{k_n} (Q - Q_n(\tilde{\beta}))$$

$$U_i^{(k)} = W f_i^{(k)} - \sum_{n=1}^{\infty} E_n^{(k)} \frac{\cos k_n t_k}{k_n} (W - W_n(\tilde{\beta}))$$

$$V_m^{(k)} = W g_m^{(k)} - \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} \frac{\cos k_n t_k}{k_n} (W - W_n(\tilde{\beta}))$$

而

$$E_n^{(i)} = \frac{2}{l} \fint_0^l R(x) \cos^i\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos k_n x \mathrm{d}x$$

$$D_{mn} = \frac{2}{l} \fint_0^l R(x) S_m(x) \cos k_n x \mathrm{d}x$$

$$f_i^{(k)} = \frac{2}{l} \fint_0^l R(x) K(t_k, x) \cos^i\left(\frac{\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x$$

$$g_m^{(k)} = \frac{2}{l} \fint_0^l R(x) K(t_k, x) S_m(x) \mathrm{d}x$$

$$K(t_k, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos k_n t_k \cos k_n x}{k_n}$$

由式（6.4.6）解出 C_i'，并可表示为下列形式

$$C'_i = \sum_{m=1}^{\infty}(a_m \widetilde{A_m^e} + b_m \widetilde{A_m^h})M_m^{(i)} + \sum_{m=1}^{\infty}(c_m \widetilde{A_m^e} + d_m \widetilde{A_m^h})N_m^{(i)}, \quad i = 0,1,2,\cdots,\frac{N}{2} \tag{6.4.7}$$

其中，$M_m^{(i)}$ 和 $N_m^{(i)}$ 可通过 $U_i^{(k)}$、$V_m^{(k)}$ 和 $K_m^{(k)}$ 表示出来。

把确定了 C_i 和 C'_i以后的 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 代回到式（6.2.22）中，便得到关于$\widetilde{A_m^e}$和$\widetilde{A_m^h}$的方程组，其形式为

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{m=1}^{\infty}(k_p\delta_{mp} - a_m I_{mp})\widetilde{A_m^e} - \sum_{m=1}^{\infty} b_m I_{mp}\widetilde{A_m^h} = 0, \quad p = 1,2,\cdots\\&\sum_{m=1}^{\infty}(a_m J_{mq} + c_m K_{mq})\widetilde{A_m^e} - \sum_{m=1}^{\infty}(k_q\delta_{mq} - b_m J_{mq} - d_m K_{mq})\widetilde{A_m^h} = 0, \quad q = 1,2,\cdots\end{aligned}\right\} \tag{6.4.8}$$

其中

$$I_{mp} = \sum_{i=0}^{N/2} H_m^{(i)} E_p^{(i)} - D_{mp}$$

$$J_{mq} = \sum_{i=0}^{N/2} M_m^{(i)} E_q^{(i)}$$

$$K_{mq} \sum_{i=0}^{N/2} N_m^{(i)} E_q^{(i)} - D_{mq}$$

而 δ_{mp}和 δ_{mq}均为 Kronecker delta。

式（6.4.8）是一个关于$\widetilde{A_m^e}$和$\widetilde{A_m^h}$的无限线性代数方程组。由于$\widetilde{A_m^e}$和$\widetilde{A_m^h}$不能同时为零，故方程（6.4.8）的系数行列式必须等于零，由此就得到一个确定任意屏蔽微带线电磁波传输常数 β 与频率关系的色散方程。对给定频率也可解得不同模式的电磁结构的传输常数，对一定的频率和 β 值可确定相应的$\widetilde{A_m^e}$和$\widetilde{A_m^h}$，进而再确定$\widetilde{B_m^e}$和$\widetilde{B_m^h}$，便又可获得相应的电磁模式场解。

如果只求近似解，则只需求解有限代数方程组。由于代数方程组（6.4.8）具有高速收敛的特性，为达到工程上满意的精度，往往最低几阶近似已能满足要求。这一性质将在下面的具体应用中显示出来。

由于前面我们是在一般情况下对微带线进行全波分析的，以上所得结果具有广泛的适应性。当无导带存在时，上面所分析的问题就变为一种部分介质填充的矩形波导。当只存在一条导带时，就成为一种简单的屏蔽微带线。如果导带处于中心对称位置，就成为一种简单对称的屏蔽微带线。若导带在一侧与屏蔽盒连接，就成为一种鳍线型结构。如果有两条导带且分别连接两侧屏蔽盒壁，就成为一种槽线。若一般地存在两个以上导带，就是一般耦合屏蔽微带线。若两条导带分布在对称位置上，就称为对称屏蔽耦合微带线。

6.4.2　简单对称屏蔽微带线的色散特性

对于简单对称屏蔽微带线而言，屏蔽盒中只存在一条导带，因此这时有 $N=2$，在这种情况下方程组（6.4.8）的各个参量就成为

$$\left.\begin{aligned} I_{mp} &= H_m^{(0)}E_p^{(0)} + H_m^{(1)}E_p^{(1)} - D_{mp} \\ J_{mg} &= M_m^{(0)}E_q^{(0)} + M_m^{(1)}E_q^{(1)} \\ K_{mq} &= N_m^{(0)}E_q^{(0)} + N_m^{(1)}E_q^{(1)} - D_{mq} \end{aligned}\right\} \tag{6.4.9}$$

其中

$$H_m^{(0)} = \frac{R_s^{(0)}R_c^{(1)} - R_s^{(1)}R_c^{(0)}}{R^{(0)}R_c^{(1)} - R^{(1)}R_c^{(0)}}$$

$$H_m^{(1)} = \frac{R_s^{(0)}R^{(1)} - R_s^{(1)}R^{(0)}}{R_c^{(0)}R^{(1)} - R_c^{(1)}R^{(0)}}$$

$$R^{(i)} = \int_{t_{2i}}^{t_{2i+1}} R(x)\,\mathrm{d}x$$

$$R_c^{(i)} = \int_{t_{2i}}^{t_{2i+1}} R(x)\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x$$

$$R_s^{(i)} = \int_{t_{2i}}^{t_{2i+1}} R(x)S_m(x)\,\mathrm{d}x$$

此外还有

$$\begin{aligned} M_m^{(0)} = \frac{1}{U_0^{(1)}U_1^{(2)} - U_0^{(2)}U_1^{(1)}}\Big[&(X_0^{(2)}U_1^{(1)} - X_0^{(1)}U_1^{(2)})H_m^{(0)} \\ &+ (X_1^{(2)}U_1^{(1)} + X_1^{(1)}U_1^{(2)})H_m^{(1)} + (Y_m^{(1)}U_1^{(2)} - Y_m^{(2)}U_1^{(1)})\Big] \end{aligned}$$

$$N_m^{(0)} = \frac{V_m^{(1)}U_1^{(2)} - V_m^{(2)}U_1^{(1)}}{U_0^{(1)}U_1^{(2)} - U_0^{(2)}U_1^{(1)}}$$

$$\begin{aligned} M_m^{(1)} = \frac{1}{U_0^{(2)}U_1^{(1)} - U_0^{(1)}U_1^{(2)}}\Big[&(X_0^{(2)}U_0^{(1)} - X_0^{(1)}U_0^{(2)})H_m^{(0)} \\ &+ (X_1^{(2)}U_0^{(1)} - X_1^{(1)}U_0^{(2)})H_m^{(1)} + (Y_m^{(1)}U_0^{(2)} - Y_m^{(2)}U_0^{(1)})\Big] \end{aligned}$$

$$N_m^{(1)} = \frac{V_m^{(1)}U_0^{(2)} - V_m^{(2)}U_0^{(1)}}{U_0^{(2)}U_1^{(1)} - U_0^{(1)}U_1^{(2)}}$$

到此已把所有用到的参量都给出了具体的表达式，剩下的工作就是按步进行计算了。大部分参量的计算都没有困难，只有 D_{mn} 的计算因为涉及到 $S_m(x)$，需要特别加以讨论。在简单对称屏蔽微带线的情况 $S_m(x)$ 的表达式为

$$S_m(x) = \frac{1}{l}⨍_0^l \frac{\left(1-\cos^2\dfrac{\pi x'}{l}\right)^{1/2}(\eta^2-1)^{1/2}\mathrm{sgn}\eta\sin m\dfrac{\pi x'}{l}}{\cos\dfrac{\pi x'}{l} - \cos\dfrac{\pi x}{l}}\mathrm{d}x' \tag{6.4.10}$$

下面将以 $S_1(x)$ 为例讨论上式的积分计算问题。当 $m>1$ 时，只需把 $\sin\left(m\frac{\pi x'}{l}\right)$展开就可归结为与 $S_1(x)$ 类似的计算。现在把 $S_1(x)$ 改写为

$$S_1(x) = \frac{1}{\pi}\fint_{-1}^{1}\frac{(1-y^2)^{1/2}(\eta^2-1)^{1/2}\mathrm{sgn}\eta}{y-x}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{\pi}\fint_{-1}^{1}\frac{(1-y^2)(\eta^2-1)\mathrm{sgn}\eta}{(1-y^2)^{1/2}(\eta^2-1)^{1/2}(y-x)}\mathrm{d}y \tag{6.4.11}$$

展开被积函数的分子部分可以发现，上式的计算归结为如下形式的一类积分。

$$J_n^{(1)}(x) = \fint_{-1}^{1}\frac{y^n\mathrm{sgn}\eta}{(1-y^2)^{1/2}(\eta^2-1)^{1/2}(y-x)}\mathrm{d}y \tag{6.4.12}$$

而上式又可化作

$$J_n^{(1)}(x) = \fint_{-1}^{1}\frac{(y-x+x)y^{n-1}\mathrm{sgn}\eta}{(1-y^2)^{1/2}(\eta^2-1)^{1/2}(y-x)}\mathrm{d}y$$

$$= I_{n-1}^{(1)} + I_{n-2}^{(1)}x + I_{n-3}^{(1)}x^2 + \cdots \tag{6.4.13}$$

其中

$$I_n^{(1)} = \fint_{-1}^{1}\frac{y^n\mathrm{sgn}\eta}{(1-y^2)^{1/2}(\eta^2-1)^{1/2}}\mathrm{d}y \tag{6.4.14}$$

这样，$J_n^{(1)}(x)$ 的计算问题又归结为 $I_n^{(1)}$ 的计算。

为了计算 $I_n^{(1)}$，我们考虑积分方程

$$\frac{1}{\pi}\fint_{-1}^{1}\frac{H(y)\mathrm{d}y}{y-x} = f(x),\quad -1<x<\lambda,\quad \mu<x<1 \tag{6.4.15}$$

其解可具体表示为

$$H(x) = \frac{\mathrm{sgn}\xi}{(1-x^2)^{1/2}(\xi^2-1)^{1/2}}\cdot\left[c_0+c_1x-\frac{1}{\pi}\fint_{-1}^{1}\frac{(1-y^2)^{1/2}(\eta^2-1)^{1/2}\mathrm{sgn}\eta f(y)}{y-x}\mathrm{d}y\right] \tag{6.4.16}$$

令 $f(x)=0$，并把式（6.4.16）表示的解代回到（6.4.15）即可得到

$$\fint_{-1}^{1}\frac{(c_0+c_1y)\mathrm{sgn}\eta}{(1-y^2)^{1/2}(\eta^2-1)^{1/2}(y-x)}\mathrm{d}y = 0$$

并由此得到两个恒等式

$$\fint_{-1}^{1}\frac{\mathrm{sgn}\eta}{(1-y^2)^{1/2}(\eta^2-1)^{1/2}(y-x)}\mathrm{d}y = 0 \tag{6.4.17}$$

$$\fint_{-1}^{1}\frac{y\mathrm{sgn}\eta}{(1-y^2)^{1/2}(\eta^2-1)^{1/2}(y-x)}\mathrm{d}y = 0 \tag{6.4.18}$$

不难看出，把式（6.4.18）与乘以 x 的式（6.4.17）相减，便可得到

$$I_0^{(1)} = \fint_{-1}^{1}\frac{\mathrm{sgn}\eta}{(1-y^2)^{1/2}(\eta^2-1)^{1/2}}\mathrm{d}y = 0 \tag{6.4.19}$$

若令 $f(x)=1$，则方程（6.4.15）的解可表示为

$$H(x) = \frac{\mathrm{sgn}\xi}{(1-x^2)^{1/2}(\xi^2-1)^{1/2}}\cdot\left\{c_0+c_1x+\frac{1}{\pi}\left[L^2I_1^{(1)}x^2+(L^2I_2^{(1)}+2LMI_1^{(1)})x\right.\right.$$

$$+2LMI_2^{(1)} - (L^2 - M^2 + 1)I_1^{(1)} + L^2 I_3^{(1)} \Big]\Big\} \tag{6.4.20}$$

其中

$$L = \frac{2}{\mu - \lambda},\quad M = \frac{\mu + \lambda}{\mu - \lambda}$$

把式（6.4.20）代回到 $f(x)=1$ 时的方程（6.4.15），把未求出的 $I_2^{(1)}$ 和 $I_3^{(1)}$ 当作一般常数，再利用已知的恒等式就可得到

$$I_1^{(1)} = \frac{\pi}{L}$$

若令 $f(x)=x$，则按以上同样的步骤可以得到

$$I_2^{(1)} = -M\frac{\pi}{L^2}$$

依此类推，若令 $f(x)=x^{n-1}$，则可按同样的步骤可求得到 $I_n^{(1)}$。实际上，很容易找到这些参数之间的递推规律，只需计算少量几个参数。

根据 $I_n^{(1)}$ 的计算结果不难证明 $S_1(x)$ 可以表示为

$$S_1(x) = -Lx^2 + Ax + B$$

其中，A 和 B 为两个常数。

对于对称的简单屏蔽微带线，由于 $\mu=-\lambda$，可以推出 $I_{2n}^{(1)}=0$，$n=1, 2, \cdots$. 再考虑到其他参数的性质将有

$$M_{2m}^{(0)} = N_{2m}^{(0)} = 0,\quad M_{2m+1}^{(1)} = N_{2m+1}^{(1)} = 0$$

由此可以发现，对简单的对称屏蔽微带线而言，方程（6.4.8）分裂为相互独立的两组，一组与偶对称模有关，另一组则对应于奇对称模。分别由这些方程组的系数行列式等于零即可得到相应电磁模式的色散方程。为获得最简单的近似结果，令 m、p 和 g 只取到 2，可得到偶对称模的近似色散方程。

$$\begin{aligned}&[k_1 - a_1(H_1^{(0)}E_1^{(0)} - D_{11})][k_1 - b_1M_1^{(0)}E_1^{(0)} - d_1(N_1^{(0)}E_1^{(0)} - D_{11})]\\&\quad - b_1(H_1^{(0)}E_1^{(0)} - D_{11})[a_1M_1^{(0)}E_1^{(0)} - c_1(N_1^{(0)}E_1^{(0)} - D_{11})] = 0\end{aligned} \tag{6.4.21}$$

和奇对称模的色散方程

$$\begin{aligned}&[k_2 - a_2(H_2^{(1)}E_2^{(1)} - D_{22})][k_2 - b_2M_2^{(1)}E_2^{(1)} - d_2(N_2^{(1)}E_2^{(1)} - D_{22})]\\&\quad - b_2(H_2^{(1)}E_2^{(1)} - D_{22})[a_2M_2^{(1)}E_2^{(1)} - c_2(N_2^{(1)}E_2^{(1)} - D_{22})] = 0\end{aligned} \tag{6.4.22}$$

在简单对称屏蔽微带线中偶对称模的最低模式为其基模。所以，色散方程（6.4.21）的最小根为基模的传输常数。给定不同频率，由该方程解得的最小根的变化即代表基模的色散特性。色散方程的其他根为其他高次模式的传输常数。因此，对给定的微带线结构，根据色散方程根的分布还可判断在给定频率下可能存在哪些模式。

表 6－1 给出了由上述方法对一种对称简单微带线结构基模色散特性的计算结果。为了显示其收敛特性，分别求解了 2×2 和 4×4 两种方程组，并把结果与 Nornsby 等在文献［9］中给出的用 100×100 阶方程组所获得的结果进行比较。这一对比充分显示出奇异积分方程法的高速收敛特性。

表 6－1　本法计算结果与其他作者计算结果的比较

频率/GHz	β/mm^{-1} 本方法 2×2	β/mm^{-1} 本方法 4×4	β/mm^{-1} Nornsky 法 100×100	微带线 几何参数
10	0.530	0.531	0.55	$l=3.5\mathrm{mm}$
20	1.107	1.108	1.17	$t_1=1.25\mathrm{mm}$ $t_2=2.25\mathrm{mm}$
30	1.707	1.715	1.77	$d=0.5\mathrm{mm}$
40	2.317	2.335		$h=2.0\mathrm{mm}$
50	2.930	2.950		$\varepsilon_r=9.0$

把这些结果以传输常数和频率的关系用曲线表示出来即形成色散曲线。图 6－7 给出了由奇异积分方程法、谱域法和准 TEM 波法计算的结果，为了显示高次模及其色散特性与微带线尺度之间的关系，图 6－8 和图 6－9 分别给出了对两种不同尺度的微带线计算所得的色散曲线，在图中有的还用有效介电常数与频率的关系表示色散特性。

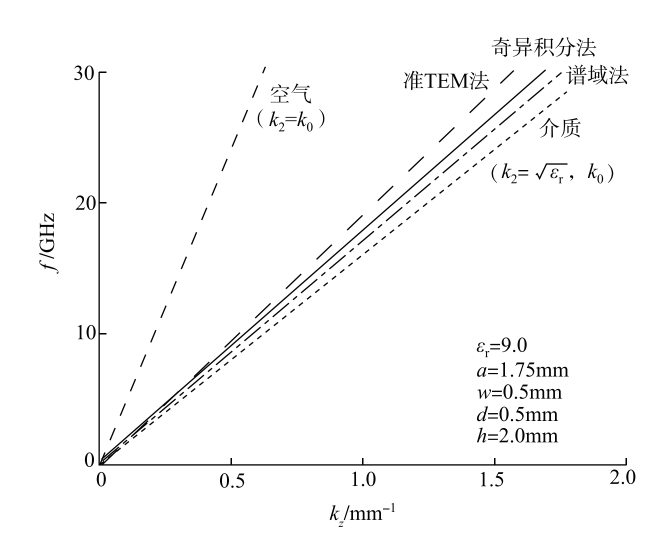


图 6－7　简单对称屏蔽微带线基模的色散特性

6.4.3　对称屏蔽耦合微带线的色散特性

对称屏蔽耦合微带线中的电磁场，由于结构的对称性可依电场的纵向分量的分布分为两类模式。对称面两侧的纵向电场为偶对称分布者称作偶模，奇对称分布者称作奇模。对奇模而言，由于在对称面处电场的切向分量总为零，因而可在

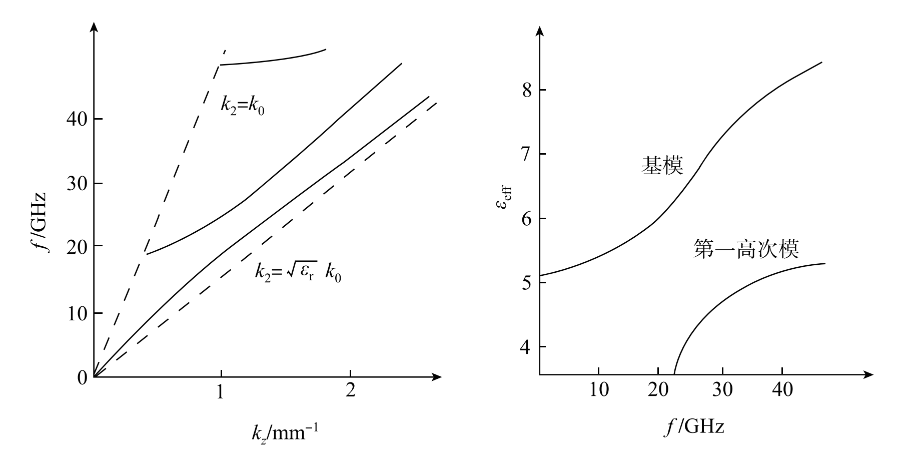


图 6－8　一种屏蔽微带线中高次模及其色散特性

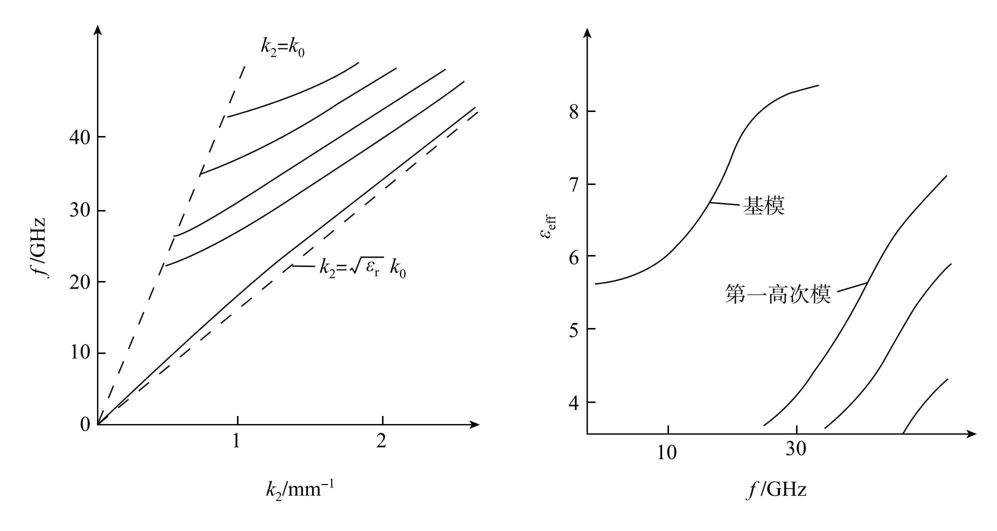


图 6－9　尺度较大屏蔽微带线中的高次模及色散特性

对称面处放置一电壁，这时对称屏蔽耦合微带线就被分为两个完全相同的简单屏蔽微带线，其色散特性可用前面的方法进行计算。对于偶模而言，由于在对称面处可放置一磁壁，这样也形成两个完全一样的简单屏蔽微带线，只是其侧壁之一是良性磁导体，不能直接引用前面的公式。不过，我们已建立了分析任意微带线的一般性理论，当然它也适用于屏蔽耦合微带线。

由于耦合微带线中有两条导带，故这时有 $N=4$，和简单的屏蔽微带线一样，主要需要特别讨论的依然是 $S_m(x)$ 的计算问题，对耦合微带线的情况 $S_m(x)$ 具有以下的形式。

$$S_m(x) = \frac{1}{\pi}⨍_{-1}^{1} \frac{(1-y^2)^{1/2}(y_1^2-1)^{1/2}\mathrm{sgn}\boldsymbol{\eta}_1\mathrm{sgn}\boldsymbol{\eta}_2 G_m(y)}{y-x}\mathrm{d}y,$$

$$-1 < y < \lambda_1,\quad \mu_1 < y < \lambda_2,\quad \mu_2 < y < 1 \tag{6.4.23}$$

其中

$$\eta_1 = \frac{2}{\mu_1 - \lambda_1}\left[y - \frac{1}{2}(\mu_1 + \lambda_1)\right]$$

$$\eta_2 = \frac{2}{\mu_2 - \lambda_2}\left[y - \frac{1}{2}(\mu_2 + \lambda_2)\right]$$

由于 $G_m(y)$ 总是可以展开为 y 的多项式，故 $S_m(x)$ 的计算总可归结为求积分

$$J_n^{(2)} = \frac{1}{\pi}\fint_{-1}^{1}\frac{y^n(1-y^2)^{1/2}(\eta_1^2-1)^{1/2}(\eta_2^2-1)^{1/2}\mathrm{sgn}\eta_1\mathrm{sgn}\eta_2}{y-x}\mathrm{d}y \tag{6.4.24}$$

而它又可归结为以下积分的计算

$$I_n^{(2)} = \fint_{-1}^{1}\frac{y^n\mathrm{sgn}\eta_1\mathrm{sgn}\eta_2}{(1-y^2)^{1/2}(\eta_1^2-1)^{1/2}(\eta_2^2-1)^{1/2}}\mathrm{d}y \tag{6.4.25}$$

$I_n^{(2)}$ 的计算与 $I_n^{(1)}$ 的计算类似，也是利用积分方程（6.4.15），当 $f(x)=0$ 时其解可定出三个恒等式

$$\fint_{-1}^{1}\frac{\mathrm{sgn}\eta_1\mathrm{sgn}\eta_2}{(1-y^2)^{1/2}(\eta_1^2-1)^{1/2}(\eta_2^2-1)^{1/2}(y-x)}\mathrm{d}y = 0$$

$$\fint_{-1}^{1}\frac{y\mathrm{sgn}\eta_1\mathrm{sgn}\eta_2}{(1-y^2)^{1/2}(\eta_1^2-1)^{1/2}(\eta_2^2-1)^{1/2}(y-x)}\mathrm{d}y = 0$$

$$\fint_{-1}^{1}\frac{y^2\mathrm{sgn}\eta_1\mathrm{sgn}\eta_2}{(1-y^2)^{1/2}(\eta_1^2-1)^{1/2}(\eta_2^2-1)^{1/2}(y-x)}\mathrm{d}y = 0$$

且由此三个恒等式可推知

$$I_0^{(2)} = \fint_{-1}^{1}\frac{\mathrm{sgn}\eta_1\mathrm{sgn}\eta_2}{(1-y^2)^{1/2}(\eta_1^2-1)^{1/2}(\eta_2^2-1)^{1/2}}\mathrm{d}y = 0$$

$$I_1^{(2)} = \fint_{-1}^{1}\frac{y\mathrm{sgn}\eta_1\mathrm{sgn}\eta_2}{(1-y^2)^{1/2}(\eta_1^2-1)^{1/2}(\eta_2^2-1)^{1/2}}\mathrm{d}y = 0$$

若令 $f(x)=1$，则用类似的方法和已知的结果可以得到

$$I_2^{(2)} = \frac{\pi}{L_1L_2}$$

其中

$$L_1 = \frac{2}{\mu_1 - \lambda_1}, \quad L_2 = \frac{2}{\mu_2 - \lambda_2}$$

一般地通过解方程

$$\frac{1}{\pi}\fint_{-1}^{1}\frac{H(y)}{y-x}\mathrm{d}y = x^{n-2}$$

可求得 $I_n^{(2)}$，$n=2$，3，…。

对于对称的屏蔽耦合微带线而言，$\mu_1=-\lambda_1$，$\mu_2=-\lambda_2$，这样也使得方程组（6.4.8）中的相关参数具有与简单微带线相同的性质。于是，也导致方程组（6.4.8）分裂成相互独立的两组，一组相应于耦合微带线中的偶模，另一组则对

应于奇模。作为近似计算，若 m、p 和 q 也只取到 2，则仍然得到与式（6.4.21）和（6.4.22）相同的两个色散方程，只是由于 N 值不同，所有参数都有新的含义。图 6 - 10 和图 6 - 11 给出了用该方法计算的两种屏蔽耦合微带线的色散特性，同时给出了偶模和奇模及其相应高次模的计算结果。

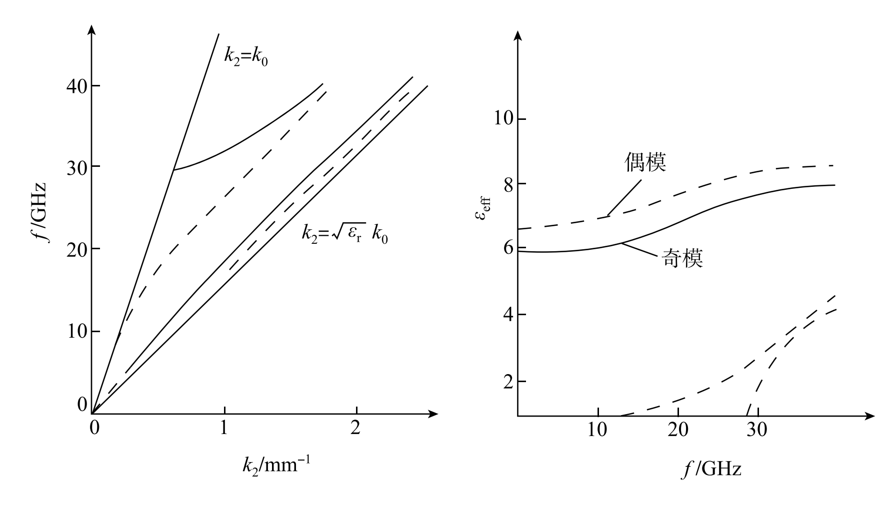


图 6 - 10　屏蔽耦合微带线的色散特性

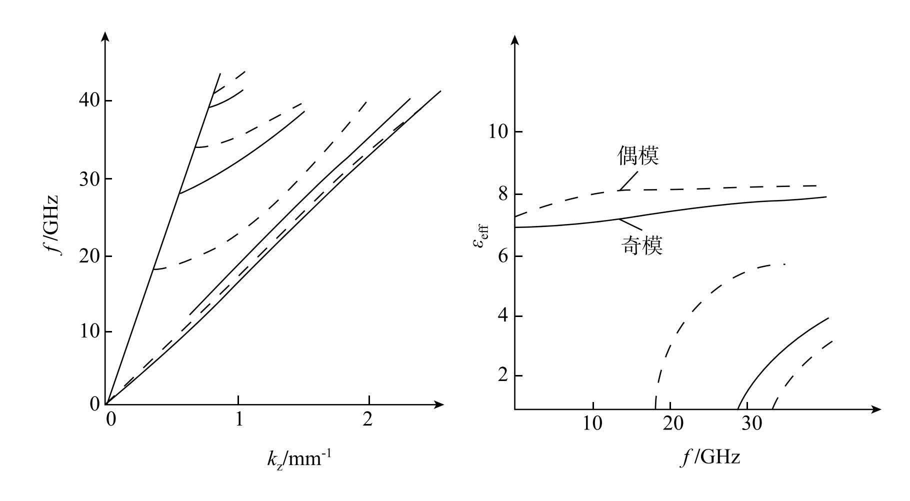


图 6 - 11　另一种屏蔽耦合微带线的高次模和色散特性

由以上分析可以看出，用奇异积分方程法研究微带线问题，虽然其推论过程比较繁琐，但一旦基础工作完成，最后的应用反而相对比较简单。

第 7 章　金属腔体中的电磁场

金属腔体不仅能构成高品质因数的电磁谐振器，也是各种高频电路设备的有效屏蔽设施。金属腔体中的电磁现象具有典型性，其分析方法具有代表性。为简单起见，我们假设腔体由理想导体构成，并主要对一些一般性问题进行分析。[57]

7.1　矢量微分算子和矢量波函数

在一般情况下，导电体腔内的电磁场满足由矢量微分算子所构成的方程。并不是总能把矢量算子方程变为标量算子方程，讨论矢量微分算子方程的直接求解方法也是很有必要的。本节将讨论腔体内矢量微分算子方程的性质，尤其是自伴双旋度算子构成的本征值问题以及相应问题的本征函数——矢量波函数的特性。

7.1.1　矢量微分算子和本征值问题

考虑由理想导体围成的金属腔体，腔的体积用 V 表示，其表面足够光滑，并用 S 表示。如果 V 内的媒质用 $\bar{\bar{\varepsilon}}(\vec{r})$ 和 $\bar{\bar{\mu}}(\vec{r})$ 表示，则由源 $\vec{J}(\vec{r})$ 和 $\vec{M}(\vec{r})$ 在 V 内所产生的电磁场满足的矢量波动方程已由式（1.1.61）和（1.1.62）给出，它们是

$$\nabla \times \bar{\bar{\mu}}^{-1}(\vec{r}) \cdot \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) - \omega^2 \bar{\bar{\varepsilon}}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{i}\omega \vec{J}(\vec{r}) - \nabla \times \bar{\bar{\mu}}^{-1}(\vec{r}) \cdot \vec{M}(\vec{r}) \tag{7.1.1}$$

$$\nabla \times \bar{\bar{\varepsilon}}^{-1}(\vec{r}) \cdot \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) - \omega^2 \bar{\bar{\mu}}(\vec{r}) \cdot \vec{H}(\vec{r}) = -\mathrm{i}\omega \vec{M}(\vec{r}) + \nabla \times \bar{\bar{\varepsilon}}^{-1}(\vec{r}) \cdot \vec{J}(\vec{r}) \tag{7.1.2}$$

如果我们定义两个矢量微分算子 L_E 和 L_H 如 $L_{E(H)}$：$L^2(V)^3 \to L^2(V)^3$，其形式为

$$(L_E \vec{u})(\vec{r}) = \nabla \times \bar{\bar{\mu}}^{-1}(\vec{r}) \cdot \nabla \times \vec{u}(\vec{r}) - \omega^2 \bar{\bar{\varepsilon}}(\vec{r}) \cdot \vec{u}(\vec{r}) \tag{7.1.3}$$

$$D(L_E) = \{\vec{u}(\vec{r}) : \vec{u}(\vec{r}), \nabla \times \bar{\bar{\mu}}^{-1}(\vec{r}) \cdot \nabla \times \vec{u}(\vec{r}) \in L^2(V)^3, \vec{n} \times \vec{u}(\vec{r})|_S = 0\} \tag{7.1.4}$$

以及

$$(L_H \vec{u})(\vec{r}) = \nabla \times \bar{\bar{\varepsilon}}^{-1}(\vec{r}) \cdot \nabla \times \vec{u}(\vec{r}) - \omega^2 \bar{\bar{\mu}}^{-1}(\vec{r}) \cdot \vec{u}(\vec{r}) \tag{7.1.5}$$

$$D(L_H) = \{\vec{u}(\vec{r}) : \vec{u}(\vec{r}), \nabla \times \bar{\bar{\varepsilon}}^{-1}(\vec{r}) \cdot \nabla \times \vec{u}(\vec{r}) \in L^2(V)^3, \vec{n} \times \nabla \times \vec{u}(\vec{r})|_S = 0\} \tag{7.1.6}$$

其中，$\vec{u}(\vec{r})$ 表示电场 $\vec{E}(\vec{r})$ 或磁场 $\vec{H}(\vec{r})$。

在以上各式中如果场是由给定的源所决定的，则其中 ω 是确定已知的，未知

量为$\vec{E}(\vec{r})$ 和$\vec{H}(\vec{r})$。在以上定义下，方程（7.1.1）和（7.1.2）的解就可以表示成

$$\vec{E}(\vec{r}) = L_E^{-1}[-\mathrm{i}\omega\vec{J}(\vec{r}) - \nabla\times\bar{\bar{\mu}}^{-1}(\vec{r})\cdot\vec{M}(\vec{r})] \tag{7.1.7}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = L_H^{-1}[-\mathrm{i}\omega\vec{M}(\vec{r}) + \nabla\times\bar{\bar{\varepsilon}}^{-1}(\vec{r})\cdot\vec{J}(\vec{r})] \tag{7.1.8}$$

这里的 L_E^{-1} 和 L_H^{-1} 为 L_E 和 L_H 的逆算子，也称为格林函数算子。

在 2.5.2 中我们已经证明，当 $\bar{\bar{\mu}}^{\dagger}=\bar{\bar{\mu}}$，$\bar{\bar{\varepsilon}}^{\dagger}=\bar{\bar{\varepsilon}}$ 时，算子 L_E 和 L_H 都是自伴的。

如果在腔体空间 V 中的媒质是均匀各向同性且无耗的，其参数可用 ε 和 μ 表示。这时，方程（7.1.1）和（7.1.2）就变成

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}(\vec{r}) - k^2\vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{i}\omega\mu\vec{J}(\vec{r}) - \nabla\times\vec{M}(\vec{r}) \tag{7.1.9}$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{H}(\vec{r}) - k^2\vec{H}(\vec{r}) = -\mathrm{i}\omega\varepsilon\vec{M}(\vec{r}) + \nabla\times\vec{J}(\vec{r}) \tag{7.1.10}$$

相应的矢量微分算子就成为

$$(L\vec{u})(\vec{r}) = (L_E\vec{u})(\vec{r}) = (L_H\vec{u})(\vec{r}) = \nabla\times\nabla\times\vec{u}(\vec{r}) - k^2\vec{u}(\vec{r}) \tag{7.1.11}$$

已证明在齐次边界条件下它们都是自伴的。

在研究腔体的特性时，我们还对其中的自然模式感兴趣，这时设定 $\vec{J}(\vec{r}) = \vec{M}(\vec{r}) = 0$，需要确定的是谐振频率和各自然模式的电磁场分布。在这种情况下，所要解决的是本征值问题。在一般情况下本征值方程可表示为

$$\begin{aligned} L_E(\omega_n)\vec{u}_n &= \lambda_n(\omega_n)\vec{u}_n \\ L_H(\omega_n)\vec{u}_n &= \lambda_n(\omega_n)\vec{u}_n \end{aligned} \tag{7.1.12}$$

当然，这里的$\vec{u}_n$ 还必须满足适当的矢量边界条件。式（7.1.12）表示的是非标准或广义本征值方程，腔体谐振的频率 ω_n 使得

$$\lambda_n(\omega_n) = 0 \tag{7.1.13}$$

对应于这些本征值的本征函数处于算子 $L_{E(H)}$ 的零空间，它们也正是腔体的自然模。或者说，腔体的每一个自然模就是算子 $L_{E(H)}$ 零空间中的一个本征函数。

广义本征值问题也可以定义为

$$\begin{aligned} \nabla\times\bar{\bar{\mu}}^{-1}(\vec{r})\cdot\nabla\times\vec{u}_n(\vec{r}) &= \lambda_n\bar{\bar{\varepsilon}}(\vec{r})\cdot\vec{u}_n(\vec{r}) \\ \nabla\times\bar{\bar{\varepsilon}}^{-1}(\vec{r})\cdot\nabla\times\vec{u}_n(\vec{r}) &= \lambda_n\bar{\bar{\mu}}(\vec{r})\cdot\vec{u}_n(\vec{r}) \end{aligned} \tag{7.1.14}$$

其中，$\lambda_n=\omega_n$；而 $\bar{\bar{\varepsilon}}$ 和 $\bar{\bar{\mu}}$ 视作权重因子。

对于算子（7.1.11），也可以讨论以下广义本征值问题。

$$\nabla\times\nabla\times\vec{u}_n(\vec{r}) = \lambda_n\varepsilon\mu\vec{u}_n(\vec{r}) \tag{7.1.15}$$

其中，$\lambda_n=\omega_n$。如果媒质是无耗的，则把 k^2 视作本征值也是方便的，这时对应的本征值方程就成为

$$\nabla\times\nabla\times\vec{u}_n(\vec{r}) = \lambda_n u_n(\vec{r}) \tag{7.1.16}$$

其中，$\lambda_n=k^2=\omega_n^2\varepsilon\mu$。

我们知道，作为偏微分算子方程的本征值方程，为了唯一地确定本征函数还需要适当的边界条件。考虑到矢量函数的本性，以上所提到的相应矢量边界条件

$\vec{n}\times\vec{u}_n(\vec{r})|_S=0$ 和$\vec{n}\times\nabla\times\vec{u}_n(\vec{r})=0$ 还不能有效地唯一确定$\vec{u}_n(\vec{r})$。在实际应用中对于理想导体腔体问题作为第一类齐次矢量边界条件将采用

$$\begin{aligned}\vec{n}\times\vec{u}_n(\vec{r})|_S&=0\\ \vec{n}\cdot\vec{u}_n(\vec{r})|_S&=0\end{aligned}\tag{7.1.17}$$

而作为第二类齐次矢量边界条件则采用

$$\begin{aligned}\vec{n}\times\nabla\times\vec{u}_n(\vec{r})|_S&=0\\ \vec{n}\cdot\vec{u}_n(\vec{r})|_S&=0\end{aligned}\tag{7.1.18}$$

与式（7.1.17）相对应的$\vec{u}_n(\vec{r})$称为短路电本征函数，而与式（7.1.18）相对应的$\vec{u}_n(\vec{r})$则称为短路磁本征函数。这样确定的矢量本征函数是完备的[57]。

7.1.2 矢量波函数

在均匀各向同性媒质空间中的无源电磁场问题已归结为求解用式（7.1.16）表示的矢量函数的本征值问题。该方程的完备解可通过标量函数表示出来。由该标量函数表示的矢量本征函数称为矢量波函数。如果用$\psi(\vec{r})$表示所选的标量函数，它满足相应的标量亥姆霍兹方程

$$(\nabla^2+k^2)\psi(\vec{r})=0\tag{7.1.19}$$

由$\psi(\vec{r})$ 定义的矢量函数

$$\vec{M}(\vec{r})=\nabla\times[\vec{a}\psi(\vec{r})]\tag{7.1.20}$$

$$\vec{N}(\vec{r})=\frac{1}{k}\nabla\times\vec{M}(\vec{r})\tag{7.1.21}$$

都是本征值方程（7.1.16）的解，其中$\vec{a}$为任意常矢量，称为引导矢量。用直接代入法很容易证明以上结论。首先，由$\vec{M}(\vec{r})$ 代替$\vec{u}_n(\vec{r})$ 可由式（7.1.16）得到

$$\begin{aligned}\nabla\times\nabla\times\vec{M}(\vec{r})-k^2\vec{M}(\vec{r})&=\nabla\times\nabla\times\nabla\times(\vec{a}\psi)-k^2(\vec{a}\psi)\\&=\nabla\times[\nabla\times\nabla\times(\vec{a}\psi)-k^2\vec{a}\psi]\\&=\nabla\times[-\nabla^2(\vec{a}\psi)+\nabla\nabla\cdot(\vec{a}\psi)-k^2\vec{a}\psi]\\&=-\nabla\times(\nabla^2\psi+k^2\psi)\vec{a}=0\end{aligned}$$

这就说明$\vec{M}(\vec{r})$ 是方程（7.1.16）的解。当把$\vec{N}(\vec{r})$ 代入式（7.1.16）又可得到

$$\nabla\times\nabla\times\vec{N}-k^2\vec{N}=\frac{1}{k}\nabla\times(\nabla\times\nabla\times\vec{M}-k^2\vec{M})=0$$

也就是说，只要$\vec{M}$是方程（7.1.16）的解，则由式（7.1.21）所定义的$\vec{N}$也满足方程（7.1.16）。

$\vec{M}$和$\vec{N}$称为方程（7.1.16）的矢量本征函数或矢量波函数，相应的本征值为k，由式（7.1.20）和（7.1.21）可知，$\vec{M}$和$\vec{N}$的散度都等于零，或者说是无散的，从而有

$$\nabla^2\begin{Bmatrix}\vec{M}\\\vec{N}\end{Bmatrix}=\nabla\nabla\cdot\begin{Bmatrix}\vec{M}\\\vec{N}\end{Bmatrix}-\nabla\times\nabla\times\begin{Bmatrix}\vec{M}\\\vec{N}\end{Bmatrix}=-\nabla\times\nabla\times\begin{Bmatrix}\vec{M}\\\vec{N}\end{Bmatrix}$$

于是由方程（7.1.16）可知

$$\nabla^2\begin{Bmatrix}\vec{M}\\\vec{N}\end{Bmatrix}+k^2\begin{Bmatrix}\vec{M}\\\vec{N}\end{Bmatrix}=0 \tag{7.1.22}$$

此外还因

$$\vec{M}=\frac{1}{k^2}\nabla\times\nabla\times\vec{M}=\frac{1}{k^2}\nabla\times(k\vec{N})=\frac{1}{k}\nabla\times\vec{N} \tag{7.1.23}$$

也就是$\vec{M}$和$\vec{N}$之间存在关系

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{M}&=k^2\vec{N}\\\nabla\times\vec{N}&=k\vec{M}\end{aligned} \tag{7.1.24}$$

把它们和无源麦克斯韦方程

$$\nabla\times\vec{E}(\vec{r})=-\mathrm{i}\omega\mu\vec{H}(\vec{r})$$
$$\nabla\times\vec{H}(\vec{r})=\mathrm{i}\omega\varepsilon\vec{E}(\vec{r})$$

进行比较可以看出，$\vec{M}$和$\vec{N}$分别是$\vec{E}$和$\vec{H}$的等效量。

由于$\vec{M}$和$\vec{N}$是无散度但有旋度的，也被称为无散矢量波函数，它们自然与 V 中的无散电磁自然模联系。但是，并不是电磁场全部都是无散的，因此必须定义一种有散的矢量波函数。这种矢量波函数我们用$\vec{L}$表示，并定义为

$$\vec{L}(\vec{r})=\nabla\psi(\vec{r}) \tag{7.1.25}$$

这样定义的$\vec{L}(\vec{r})$显然有以下性质。

$$\nabla\cdot\vec{L}(\vec{r})=\nabla\cdot\nabla\psi(\vec{r})=\nabla^2\psi(\vec{r})=-k^2\psi(\vec{r}) \tag{7.1.26}$$

$$\nabla\times\vec{L}(\vec{r})=\nabla\times\nabla\psi(\vec{r})=0 \tag{7.1.27}$$

也就是说，$\vec{L}$是无旋但有散的。而且由式（7.1.26）又可推知

$$\nabla\nabla\cdot\vec{L}(\vec{r})+k^2\vec{L}(\vec{r})=0$$

因为　$\nabla\times\nabla\times\vec{L}(\vec{r})=0$，于是又有

$$\nabla^2\vec{L}(\vec{r})+k^2\vec{L}(\vec{r})=0 \tag{7.1.28}$$

如果用 A 表示算子$\nabla\times\nabla\times$，则由式（7.1.27）可知$\vec{L}(\vec{r})$满足

$$A\vec{L}(\vec{r})=0 \tag{7.1.29}$$

即全部$\vec{L}(\vec{r})$构成 A 的零空间，它是无限维的。同时，式（7.1.25）中的 $\psi(\vec{r})$ 对应于所有本征值为 k^2 对方程（7.1.19）所有可能的解。因为算子$\nabla\times\nabla\times$和∇^2在合适的边界条件下都是自伴的，则它们的本征函数构成完备的函数空间。方程（7.1.16）和（7.1.19）的本征函数覆盖着满足同类边界条件的函数空间，由于在这些边界条件下$\nabla\times\nabla\times$和∇^2都是自伴的，所以本征函数集$\vec{u}_n(\vec{r})$和 $\psi_n(\vec{r})$分别在其满足同样边界条件的函数空间中都是完备的。

由式（7.1.23）可知$\vec{M}\perp\vec{N}$，又因

$$\vec{M}=\nabla\times(\vec{a}\psi)=\psi\nabla\times\vec{a}-\nabla\psi\times\vec{a}=\vec{a}\times\vec{L} \tag{7.1.30}$$

所以又有 $\vec{M}\perp\vec{L}$。此外，还可以证明$\vec{N}\perp\vec{L}$，也就是说，对同一函数 ψ 矢量波函数

$\vec{M}$、$\vec{N}$和$\vec{L}$是相互正交的。

除以上关系外，我们还可以证明当 V 为两端封闭的一段均匀柱形腔体时，矢量波函数还满足按矢量内积定义的正交性。首先证明标量本征函数的正交性。

设标量函数 $\psi_a(\vec{r})$ 和 $\psi_b(\vec{r})$ 分别满足方程

$$(\nabla^2 + k_a^2)\psi_a(\vec{r}) = 0 \tag{7.1.31}$$

$$(\nabla^2 + k_b^2)\psi_b(\vec{r}) = 0 \tag{7.1.32}$$

以及相应的边界条件。将式（7.1.31）乘以 $\psi_b(\vec{r})$ 减去式（7.1.32）乘以 $\psi_a(\vec{r})$，即可得到

$$\psi_b(\vec{r})\nabla^2\psi_a(\vec{r}) - \psi_a(\vec{r})\nabla^2\psi_b(\vec{r}) = (k_a^2 - k_b^2)\psi_a(\vec{r})\psi_b(\vec{r}) \tag{7.1.33}$$

因为有

$$\psi_b(\vec{r})\nabla^2\psi_a(\vec{r}) - \psi_a(\vec{r})\nabla^2\psi_b(\vec{r}) = \nabla\cdot(\psi_b\nabla\psi_a - \psi_a\nabla\psi_b) \tag{7.1.34}$$

则对式（7.1.33）在体积 V 积分并应用高斯定理就得

$$\int_S(\psi_b\nabla\psi_a - \psi_a\nabla\psi_b)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = (k_b^2 - k_a^2)\int_V\psi_a(\vec{r})\psi_b(\vec{r})\,\mathrm{d}V \tag{7.1.35}$$

如果 $\psi(\vec{r})$ 满足第一类或第二类齐次边界条件，则有

$$(k_b^2 - k_a^2)\int_V\psi_a(\vec{r})\psi_b(\vec{r})\,\mathrm{d}V = 0$$

当 $k_a^2 \neq k_b^2$ 时，就得到正交关系

$$\int_V\psi_a(\vec{r})\psi_b(\vec{r})\,\mathrm{d}V = 0 \tag{7.1.36}$$

有了这一正交关系，则在上述柱形理想导体腔体 V 中当取$\vec{a}$垂直于两个端面时又可进一步证明[57] $\vec{M}$、$\vec{N}$和$\vec{L}$之间存在以下正交关系。

$$\int_V\vec{M}_a(\vec{r})\cdot\vec{N}_b(\vec{r})\,\mathrm{d}V = 0 \tag{7.1.37}$$

$$\int_V\vec{M}_a(\vec{r})\cdot\vec{L}_b(\vec{r})\,\mathrm{d}V = 0 \tag{7.1.38}$$

$$\int_V\vec{N}_a(\vec{r})\cdot\vec{L}_b(\vec{r})\,\mathrm{d}V = 0 \tag{7.1.39}$$

以及当 $k_a^2 \neq k_b^2$ 时有

$$\int_V\vec{M}_a(\vec{r})\cdot\vec{M}_b(\vec{r})\,\mathrm{d}V = 0 \tag{7.1.40}$$

$$\int_V\vec{N}_a(\vec{r})\cdot\vec{N}_b(\vec{r})\,\mathrm{d}V = 0 \tag{7.1.41}$$

$$\int_V\vec{L}_a(r)\cdot\vec{L}_b(\vec{r})\,\mathrm{d}V = 0 \tag{7.1.42}$$

因为无界空间可视作 V 和 S 在各个方向都趋于无限大，所以本节的结论也适合无界空间中的无源电磁场。

7.1.3　本征函数展开法

为简单起见，假设所考虑的由理想导体构成的腔体中的电磁场由电型源

$\vec{J}(\vec{r})$ 产生，因而电磁场所满足的方程为

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) - k^2 \vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{i}\omega\mu \vec{J}(\vec{r}) \tag{7.1.43}$$

所对应的本征值方程则成为

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}_n(\vec{r}) = k_n^2 \vec{E}_n(\vec{r}) \tag{7.1.44}$$

如上所述，当$\vec{E}(\vec{r})$ 满足边界条件（7.1.17）时本征函数$\vec{E}_n(\vec{r})$ 构成相应算子定义域的一个完备正交基。由于$\vec{E}(\vec{r})$，$\vec{J}(\vec{r}) \in L^2(V)^3$，可以有以下展开关系。

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_n \langle \vec{E}(\vec{r}), \vec{E}_n(\vec{r}) \rangle \vec{E}_n(\vec{r}) \tag{7.1.45}$$

$$\vec{J}(\vec{r}) = \sum_n \langle \vec{J}(\vec{r}), \vec{E}_n(\vec{r}) \rangle \vec{E}_n(\vec{r}) \tag{7.1.46}$$

其中，n 表示三重整数。

把式（2.3.27）推广到矢量函数空间，我们可以把方程（7.1.43）的解表示成

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{i}\omega\mu \sum_n \frac{\langle \vec{J}(\vec{r}), \vec{E}_n(\vec{r}) \rangle}{k_n^2 - k^2} \vec{E}_n(\vec{r}) \tag{7.1.47}$$

方程（7.1.43）的解还可以通过并矢格林函数表示出来，即

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{i}\omega\mu \int_\Omega \bar{\bar{G}}_e(\vec{r}, \vec{r}', k^2) \cdot \vec{J}(\vec{r}') \mathrm{d}\Omega' \tag{7.1.48}$$

其中，Ω 为$\vec{J}(\vec{r})$ 的支撑集。这里的 $\bar{\bar{G}}_e(\vec{r}, \vec{r}', k^2)$ 也可以由式（2.4.28）的推广而得到，其形式为

$$\bar{\bar{G}}_e(\vec{r}, \vec{r}', k^2) = \sum_n \frac{\vec{E}_n(\vec{r}) \vec{E}_n^*(\vec{r}')}{k_n^2 - k^2} \tag{7.1.49}$$

由于矢量波函数同样也是一个完备函数集，方程（7.1.43）的解也可以通过$\vec{M}$、$\vec{N}$和$\vec{L}$表示出来[57]。

7.2　典型腔体中的电磁模式

不管腔体的用途如何，了解其内部电磁场的模式和谐振频率都是重要的。但是，求出封闭形式的电磁解并不是对任何形状的腔体都能做到的，只有几种典型的腔体得到了详细的分析。此外，直接求矢量微分算子方程的矢量场解也是困难的，而通过矢势求解可把问题标量化。本节就通过矢势求解典型腔体中的电磁模式。

7.2.1　矩形腔体中的自然电磁模式

在 1.2 我们已经通过势函数来表示电磁场，在均匀各向同性媒质空间中频域形式如下。

只有电型源时

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\mathrm{i}\omega \vec{A} - \nabla \varphi$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mathrm{i}\omega\varepsilon\mu\varphi$$

只有磁型源时

$$\vec{E} = -\nabla \times \vec{A}_m$$

$$\vec{H} = -\mathrm{i}\omega\varepsilon \vec{A}_m - \nabla \varphi_m$$

$$\nabla \cdot \vec{A}_m = -\mathrm{i}\omega\mu\varphi_m$$

依此我们可以得到电磁场的一般表示

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} - \mathrm{i}\omega\varepsilon\mu \vec{A}_m + \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\nabla\nabla \cdot \vec{A}_m \tag{7.2.1}$$

$$\vec{E} = -\mathrm{i}\omega \vec{A} + \frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon\mu}\nabla\nabla \cdot \vec{A} - \nabla \times \vec{A}_m \tag{7.2.2}$$

而$\vec{A}$和$\vec{A}_m$ 在无源情况下满足同样的齐次亥姆霍兹方程

$$(\nabla^2 + k^2)\begin{Bmatrix}\vec{A}\\ \vec{A}_\mathrm{m}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \tag{7.2.3}$$

设矩形腔的长宽高分别为 a、b 和 c，在直角坐标系中分别为 $0 \leqslant x \leqslant a$、$0 \leqslant y \leqslant b$、$0 \leqslant z \leqslant c$。类似于矩形波导中的情形，腔中的电磁模式也可分为相对于任何一个坐标的 TM(E)模和 TE(H)模。如果把这一特定方向选作 z，则产生 TM^z 模的条件是

$$\vec{A} = \hat{z}A_z, \quad \vec{A}_\mathrm{m} = 0$$

产生 TE^z 模的条件是

$$\vec{A} = 0, \quad \vec{A}_\mathrm{m} = \hat{z}A_{mz}$$

如果用 ψ 表示 A_z 或 A_{mz}，则方程（7.2.3）就变成

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0 \tag{7.2.4}$$

求出 ψ 后即可由式（7.2.1）和（7.2.2）求出各类模式场分量的表达形式。由此可以看出，我们已把求解矢量微分算子方程问题转变为标量函数的微分方程问题。以电场为例，各分量场的计算式为

$$\begin{aligned}
E_x &= \frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon\mu}\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial A_{mz}}{\partial y} \\
E_y &= \frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon\mu}\frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z} + \frac{\partial A_{mz}}{\partial x} \\
E_z &= -\mathrm{i}\omega A_z + \frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon\mu}\frac{\partial^2 A_z}{\partial^2 z}
\end{aligned} \tag{7.2.5}$$

对磁场也可以得到类似的计算公式。从这些结果很容易看出前面所作分析的依据。

方程（7.2.4）对应的本征值方程为

$$\nabla^2\psi_{mnp}(x,y,z) = \lambda_{mnp}\psi_{mnp}(x,y,z) \tag{7.2.6}$$

其中，$\lambda_{mnp} = -k_{mnp}^2 = -\omega_{mnp}^2\varepsilon\mu$。

方程（7.2.6）已经是很熟悉的，可用简单的分离变量法求解，考虑到相应的边界条件，很容易得到以下结果。

$$A_z(\vec{r}) = \psi_{mnp}^e(\vec{r}) = \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{p\pi}{c}z\right) \tag{7.2.7}$$

其中，m，$n=1$，2，3，…，$p=0$，1，2，…。

$$A_{mz}(\vec{r}) = \psi_{mnp}^h(\vec{r}) = \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{p\pi}{c}z\right) \tag{7.2.8}$$

其中，m，$n=0$，1，2，…，但除去 $m=n=0$，$p=1$，2，3，…。

两类模式的本征值均为

$$\lambda_{mnp}^{e,h} = -(\omega_{mnp}^{e,h})^2\varepsilon\mu = -\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{c}\right)^2\right] \tag{7.2.9}$$

由此可知腔体的谐振频率为

$$\omega_{mnp}^{e,h} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{c}\right)^2} \tag{7.2.10}$$

至于各模式场分量的具体表达形式即可由 $\psi^{e,h}$ 通过式（7.2.1）和（7.2.2）计算出来。

7.2.2　圆柱形腔体中的自然电磁模式

分析圆柱形腔体中的电磁场自然地应选圆柱坐标系，且 z 轴与圆柱的中轴重合。若腔体的半径为 a，则有 $0\leqslant\rho\leqslant a$，$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$，$0\leqslant z\leqslant l$，其中 l 为腔体的长度。若仍以 z 方向把电磁场分解为 TM^z（E）模和 TE^z（H）模，则它们的生成条件和在矩形腔中一样。

若用 $\vec{F}$ 表示一般矢量函数，F_ρ、F_φ 和 F_z 表示它的三个分量，则在圆柱坐标系中有

$$\nabla^2\vec{F} = \hat{\rho}\left(\nabla^2 F_\rho - \frac{F_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}\right) + \hat{\varphi}\left(\nabla^2 F_\varphi - \frac{F_\varphi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial F_\rho}{\partial\rho}\right) + \hat{z}\,\nabla^2 F_z \tag{7.2.11}$$

因此，若 $\vec{F}$ 只有 z 分量，则使方程（7.2.3）在圆柱坐标系中成为

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0 \tag{7.2.12}$$

其中，$\psi=A_z$ 或 $\psi=A_{mz}$，相应的本征值方程可写成

$$\nabla^2\psi_{mnp}(\varphi,\rho,z) = \lambda_{mnp}\psi_{mnp}(\varphi,\rho,z) \tag{7.2.13}$$

它在圆柱坐标中成为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi_{mnp}}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi_{mnp}}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi_{mnp}}{\partial z^2} = \lambda_{mnp}\psi_{mnp} \tag{7.2.14}$$

其中，$\lambda_{mnp} = -\omega_{mnp}^2\varepsilon\mu = -k_{mnp}^2$。

用分离变量法，设 $\psi_{mnp}(\vec{r})=\psi_\rho(\rho)\psi_\varphi(\rho)\psi_z(z)$，可以把方程（7.2.14）化为等效的三个方程

$$\left[\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\right)+(k_\rho^2\rho^2-k_\varphi^2)\right]\psi_\rho(\rho)=0 \tag{7.2.15}$$

$$\left(\frac{d^2}{d\varphi^2}+k_\rho^2\right)\psi_\varphi(\varphi)=0 \tag{7.2.16}$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}+k_z^2\right)\psi_z(z)=0 \tag{7.2.17}$$

其中，$k_\rho^2=k^2-k_z^2$。

考虑到应满足的理想导体的边界条件，它们都是典型的斯特姆－刘维尔型自伴本征值方程，分别解出后就得到

$$A_z(\vec{r})=\psi_{mnp}^e(\vec{r})=J_m(k_{mn}\rho)\begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \tag{7.2.18}$$

其中，m，$p=0$，1，2，…，$n=1$，2，3，…，而 k_{mn}满足 $J_m(k_{mn}a)=0$

此外

$$\lambda_{mnp}^e=-k_{mnp}^2=-\left[(k_{mn})^2+\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2\right] \tag{7.2.19}$$

$$\omega_{mnp}^e=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{(k_{mn}{}^2)+\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2} \tag{7.2.20}$$

对于 TE^z（H）模相应的结果则为

$$A_{mz}(\vec{r})=\psi_{mnp}^h(\vec{r})=J_m(k'_{mn}\rho)\begin{Bmatrix}\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix}\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right) \tag{7.2.21}$$

其中，$m=0$，1，2，…，n，$p=1$，2，3，…，而 k'_{mn}满足 $J'_m(k'_{mn}a)=0$

$$\lambda_{mnp}^k=-k_{mnp}^2=-\left[(k'_{mn})^2+\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2\right] \tag{7.2.22}$$

$$\omega_{mnp}^h=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{(k'_{mn})^2+\left(\frac{p\pi}{l}\right)^2} \tag{7.2.23}$$

至于各模式场的电磁场分量的表达式，可把式（7.2.1）和（7.2.2）在圆柱坐标系中展开后再代入 A_z 和 A_{mz}的表示式而求得。

另外，上面所求得的标量本征函数 ψ 也可用于求出矢量波函数。

7.3 非均匀填充媒质腔体中电磁场的变分原理

如果腔体内媒质是不均匀的，则直接求解电磁场的分布并得到相应的电磁参数将是非常困难的。这时可以用近似方法求得一些重要参数，如谐振频率。由上面的分析可知，谐振频率与本征值相关，而且可以表示为变分形式。

在5.4 中我们已经证明，自伴本征值问题（5.4.1）的等价变分式是（5.4.2）。

为了更具普遍性，我们讨论非均匀填充各向异性理想导电腔体的电磁场问题，其中的自然模式场构成如下的本征值问题。

$$\nabla \times \bar{\bar{\mu}}^{-1}(\vec{r}) \cdot \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = \omega^2 \bar{\bar{\varepsilon}}(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) \tag{7.3.1}$$

若定义算子 L：$L^2(V)^3 \to L^2(V)^3$，其中

$$(L\vec{E})(\vec{r}) = \nabla \times \bar{\bar{\mu}}^{-1} \cdot \nabla \times \vec{E}(\vec{r})$$

$$D(L) = \{\vec{E};\vec{E},\nabla \times \bar{\bar{\mu}}^{-1} \cdot \nabla \times \vec{E} \in L^2(V)^3, \vec{n} \times \vec{E}|_S = 0\} \tag{7.3.2}$$

现在证明，如果 $\bar{\bar{\varepsilon}}$ 和 $\bar{\bar{\mu}}$ 为无耗且互易的，则 L 为自伴算子。为此假设 E_1，$E_2 \in D(L)$，则

$$\begin{aligned}\langle L\vec{E}_1,\vec{E}_2\rangle &= \int_V (\nabla \times \bar{\bar{\mu}}^{-1} \cdot \nabla \times \vec{E}_1) \cdot \vec{E}_2^* \mathrm{d}V \\ &= \int_V \nabla \times \vec{E}_2^* \cdot \bar{\bar{\mu}}^{-1} \cdot \nabla \times \vec{E}_1 \mathrm{d}V - \oint_S (\vec{E}_2^* \times \bar{\bar{\mu}}^{-1} \cdot \nabla \times \vec{E}_1) \cdot \vec{n} \mathrm{d}S\end{aligned} \tag{7.3.3}$$

由于 $\vec{n} \cdot (\vec{E}_2^* \times \bar{\bar{\mu}}^{-1} \cdot \nabla \times \vec{E}_1) = (\bar{\bar{\mu}}^{-1} \cdot \nabla \times \vec{E}_1) \cdot (\vec{n} \times \vec{E}_2^*)$，而 $\vec{n} \times \vec{E}_2|_S = 0$，上式中的面积分消失。在给定条件下 $\bar{\bar{\varepsilon}}^\dagger = \bar{\bar{\varepsilon}}$，$\bar{\bar{\mu}}^\dagger = \bar{\bar{\mu}}$，则显然有

$$\langle L\vec{E}_1,\vec{E}_2\rangle = \langle \vec{E}_1, L\vec{E}_2\rangle$$

即 L 为自伴的。进而显然有算子 $B = \bar{\bar{\varepsilon}} \cdot$ 也是自伴的。于是，与式（7.3.1）等价的变分式成为

$$\omega^2 = \frac{\int_V E^*(\vec{r}) \cdot [\nabla \times \bar{\bar{\mu}}^{-1} \cdot \nabla \times \vec{E}(\vec{r})] \mathrm{d}V}{\int_V E^*(\vec{r}) \cdot \bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \mathrm{d}V} \tag{7.3.4}$$

如果媒质是有耗的但仍是互易的，则用上面同样的方法可以证明算子 L 和 B 都是伪自伴即对称的，这时可把变分式表示为

$$\omega^2 = \frac{\int_V \vec{E}(\vec{r}) \cdot [\nabla \times \bar{\bar{\mu}}^{-1} \cdot \nabla \times \vec{E}(\vec{r})] \mathrm{d}V}{\int_V \vec{E}(\vec{r}) \cdot \bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \mathrm{d}V} \tag{7.3.5}$$

这时的 ω 一般为复数。

进一步，如果 $\bar{\bar{\varepsilon}}$ 和 $\bar{\bar{\mu}}$ 既非无耗也非互易，就需要知道 L 和 B 的伴随算子 L^a 和 B^a。因为

$$\begin{aligned}\langle \vec{E}_1, L\vec{E}_2\rangle &= \int_V \vec{E}_1 \cdot [\nabla \times (\bar{\bar{\mu}}^{-1})^* \cdot \nabla \times \vec{E}_2^*] \mathrm{d}V \\ &= \int_V \nabla \times \vec{E}_1 \cdot (\bar{\bar{\mu}}^{-1})^* \cdot \nabla \times \vec{E}_2^* \mathrm{d}V \\ &= \int_V \nabla \times \vec{E}_2^* \cdot (\bar{\bar{\mu}}^\dagger)^{-1} \cdot \nabla \times \vec{E}_1 \mathrm{d}V \\ &= \langle L^a \vec{E}_1, \vec{E}_2\rangle\end{aligned}$$

其中

$$L^a = \nabla \times (\bar{\bar{\mu}}^\dagger)^{-1} \cdot \nabla \times$$

此外，容易证明 $B^a = \bar{\bar{\varepsilon}}^{\dagger}$，于是根据（5.4.6）我们有

$$\omega^2 = \frac{\int_V \vec{E}_a(\vec{r})^* \cdot [\nabla \times (\bar{\bar{\mu}})^{-1} \cdot \nabla \times \vec{E}(\vec{r})] \mathrm{d}V}{\int_V \vec{E}_a(\vec{r})^* \cdot \bar{\bar{\varepsilon}} \cdot \vec{E}(\vec{r}) \mathrm{d}V} \tag{7.3.6}$$

其中，$\vec{E}_a$ 为辅助量，它满足

$$L^a \vec{E}_a(\vec{r}) = \omega^2 B^a \vec{E}_a(\vec{r})$$

7.4　一般金属腔体电磁场问题的积分算子方程表示

对金属腔体中电磁场问题进行严格的解析分析有很大的局限性，只有在很简单的情况下才能进行到底。对于较复杂的问题不得不采用近似方法，尤其是数值方法。当采用近似法或数值法时，把问题表示成积分算子方程往往是解决问题的第一步。

仍然考虑腔内部的媒质均匀各向同性，腔体由理想导体构成，腔内存在电流源$\vec{J}(\vec{r})$，其支撑集为 Ω。这样，腔体内的电场$\vec{E}(\vec{r})$ 满足算子方程

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) - k^2 \vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{i}\omega\mu \vec{J}(\vec{r}) \tag{7.4.1}$$

利用自由空间的并矢格林函数 $\bar{\bar{G}}_e(\vec{r}, \vec{r}')$，它满足算子方程

$$\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_e(\vec{r},\vec{r}') - k^2 \bar{\bar{G}}_e(\vec{r},\vec{r}') = \bar{\bar{I}}\delta(\vec{r} - \vec{r}') \tag{7.4.2}$$

考虑第二矢量－并矢格林定理

$$\int_V [(\nabla \times \nabla \times \vec{A}) \cdot \bar{\bar{B}} - \vec{A} \cdot (\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{B}})] \mathrm{d}V = \oint_S [(\vec{n} \times \vec{A}) \cdot (\nabla \times \bar{\bar{B}}) + (\vec{n} \times \nabla \times \vec{A}) \cdot \bar{\bar{B}}] \mathrm{d}S \tag{7.4.3}$$

我们有

$$\begin{aligned} &\int_V \{[\nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r})] \cdot \bar{\bar{G}}_e(\vec{r},\vec{r}') - \vec{E}(\vec{r}) \cdot [\nabla \times \nabla \times \bar{\bar{G}}_e(\vec{r},\vec{r}')]\} \mathrm{d}V \\ &= \oint_S \{[\vec{n} \times \vec{E}(\vec{r})] \cdot \nabla \times \bar{\bar{G}}_e(\vec{r},\vec{r}') + [\vec{n} \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r})] \cdot \bar{\bar{G}}(\vec{r},\vec{r}')\} \mathrm{d}S \end{aligned} \tag{7.4.4}$$

代入式（7.4.1）和（7.4.2）并考虑 $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ 的性质和导体表面的边界条件 $\vec{n} \times \vec{E}(\vec{r})|_S = 0$，又可得到

$$\vec{E}(\vec{r}') = -\mathrm{i}\omega\mu \int_\Omega \vec{J}(\vec{r}) \cdot \bar{\bar{G}}_e(\vec{r},\vec{r}') \mathrm{d}\Omega + \oint_S [\vec{n} \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r})] \cdot \bar{\bar{G}}_e(\vec{r},\vec{r}') \mathrm{d}S \tag{7.4.5}$$

再用$\vec{n}$叉乘上式并让$\vec{r}'$落到 S 上就导致

$$-\mathrm{i}\omega\mu \int_\Omega \vec{n} \times \bar{\bar{G}}_e(\vec{r},\vec{r}') \cdot \vec{J}(\vec{r}) \mathrm{d}\Omega + \oint_S [\vec{n} \times \bar{\bar{G}}_e(\vec{r},\vec{r}')] \cdot [\vec{n} \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r})] \mathrm{d}S = 0, \quad \vec{r}' \in S \tag{7.4.6}$$

这里我们利用了自由空间并矢格林函数的性质

$$\overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}')^{\mathrm{T}} = \overline{\overline{G}}_e(\vec{r}',\vec{r}) \tag{7.4.7}$$

由麦克斯韦方程得到的关系

$$\vec{n} \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r})\big|_S = -\mathrm{i}\omega\mu\, \vec{n} \times \vec{H}(\vec{r})\big|_S \tag{7.4.8}$$

并令

$$\vec{n} \times \vec{H}(\vec{r})\big|_S = \vec{J}_{es}(\vec{r})\big|_S \tag{7.4.9}$$

则可由方程（7.4.6）得到

$$\oint_S \vec{n} \times \overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}') \cdot \vec{J}_{es}(\vec{r})\,\mathrm{d}S = -\int_\Omega \vec{n} \times \overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}') \cdot \vec{J}(\vec{r})\,\mathrm{d}\Omega \tag{7.4.10}$$

其中，$\vec{J}(\vec{r})$ 为已知。这样，我们就得到了一个以$\vec{J}_{es}(\vec{r})\big|_S$ 为未知量的第一类弗雷德霍姆积分算子方程。

对于自然模式，它是在$\vec{J}(\vec{r}) = 0$ 时的腔内电磁场分布，这时的$\vec{J}_{es}$维持腔内的本征模式，它所满足的方程可由式（7.4.10）得到，即

$$\oint_S \vec{n} \times \overline{\overline{G}}_e(\vec{r},\vec{r}') \cdot \vec{J}_{es}(\vec{r})\,\mathrm{d}S = 0 \tag{7.4.11}$$

这是个第一类齐次弗雷德霍姆型积分方程，它可视作谐振频率为本征值的非标准本征值问题。

第 8 章　电磁场的散射和衍射

电磁散射涉及非常广泛的领域，并具有极其重要的实际意义。电磁散射可来自空中目标、地上目标和海上目标，也包括天空、大地和海洋本身，甚至电磁系统内部。由于散射体的多样性和电磁或几何结构的复杂性，电磁散射问题的解决极具挑战性，解决问题的方法也就多种多样。显然，解析方法只能解决一些典型的简单问题，大部分问题要靠近似和数值方法解决。本章只就一些基本问题进行讨论。

8.1　散射问题的积分算子方程[38]

复杂目标的电磁散射场往往需要采用近似或数值方法进行求解，这时由积分算子方程出发是一种重要的途径。积分算子方程的导出有多种方法，表示形式也有多种。本节先讨论用标量格林函数表示的散射场的算子方程及其各种有用形式。

8.1.1　标量格林函数表示的积分算子方程一般形式

用标量格林函数导出电磁场问题的积分算子方程是一种较早期的传统方法。对于电磁散射问题，这种方法已经很成熟。

为了导出电磁散射问题的积分方程表示，我们考虑图 8－1 所示的情况。把空间分为两个媒质区域，分别称为区域 1 和区域 2。区域 1 中的媒质用 ε_1 和 μ_1 表示，其体积为 V_1，表面用 S 表示，其中的电场为 $\vec{E}_1(\vec{r},\ \omega)$；区域 2 的体积为

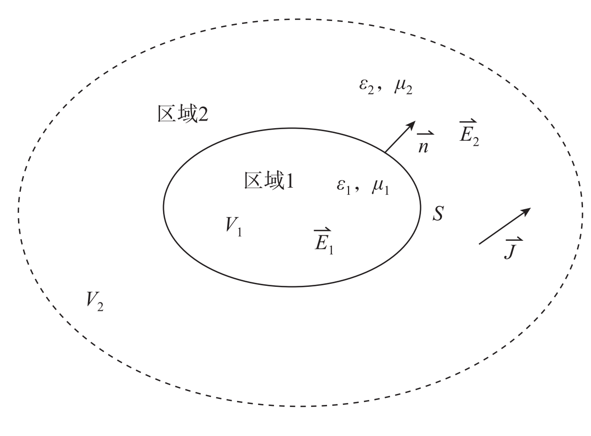


图 8－1　电磁场散射问题

V_2，其外表面用 $S_{\inf}$ 表示，媒质特性为 ε_2 和 μ_2，电场则用 $\vec{E}_2(\vec{r},\ \omega)$ 表示。为了书写简单我们把变量 ω 省略，分别用 $\vec{E}_1(\vec{r})$ 和 $\vec{E}_2(\vec{r})$ 表示电场。假设只在区域 2 中存在电流源 $\vec{J}(\vec{r})$，其支撑集为 Ω。

我们先讨论 V_2 中的电磁场，它们在频域应满足相应的麦克斯韦方程

$$\nabla \times \vec{E}_2(\vec{r}) = -\mathrm{i}\omega\mu_2 \vec{H}_2(\vec{r}) \tag{8.1.1}$$

$$\nabla \times \vec{H}_2(\vec{r}) = \mathrm{i}\omega\varepsilon \vec{E}_2 + \vec{J}(\vec{r}) \tag{8.1.2}$$

及由此导出的矢量波动方程

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}_2(\vec{r}) - k_2^2 \vec{E}_2(\vec{r}) = -\mathrm{i}\omega\mu_2 \vec{J}(\vec{r}) \tag{8.1.3}$$

设 $G_2(\vec{r},\vec{r}')$ 为满足以下方程的自由空间的格林函数。

$$\nabla^2 G_2^2(\vec{r},\vec{r}') + k_2^2 G_2(\vec{r},\vec{r}') = -\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{8.1.4}$$

$\vec{a}$ 为一个任意常矢量，则利用恒等式

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} + \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})$$

$$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}(\nabla\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\nabla\cdot\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$$

和方程（8.1.4）可以得到

$$\begin{aligned}\nabla\times\nabla\times(G_2\vec{a}) &= -\vec{a}\,\nabla^2 G_2 + (\vec{a}\cdot\nabla)\nabla G_2 \\ &= \vec{a}[k_2^2 G_2 + \delta(\vec{r}-\vec{r}')] + \nabla(\vec{a}\cdot\nabla G_2)\end{aligned} \tag{8.1.5}$$

再利用矢量格林定理

$$\begin{aligned}&\int_V (\vec{A}\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{B} - \vec{B}\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{A})\mathrm{d}V \\ &= \oint_S (\vec{B}\times\nabla\times\vec{A} - \vec{A}\times\nabla\times\vec{B})\,\mathrm{d}\vec{S}\end{aligned}$$

则又可得到

$$\begin{aligned}&\int_{V_2}[(G_2\vec{a})\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{E}_2 - \vec{E}_2\cdot\nabla\times\nabla\times(G_2\vec{a})]\mathrm{d}V \\ &= \int_{V_2}[(G_2\vec{a})\cdot(-\mathrm{i}\omega\mu_2\vec{J} + k_2^2\vec{E}_2) \\ &\quad - \vec{E}_2\cdot(k_2^2 G_2\vec{a}) - \vec{E}_2\cdot\vec{a}\delta(\vec{r}-\vec{r}') - \vec{E}_2\cdot\nabla(\vec{a}\cdot\nabla G_2)]\mathrm{d}V \\ &= -\oint_{S'}[\vec{E}_2\times\nabla\times G_2\vec{a} - G_2\vec{a}\times(-\mathrm{i}\omega\mu_2\vec{H}_2)]\cdot\vec{n}\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{8.1.6}$$

其中，$S' = S + S_{\inf}$，这里除了用到式（8.1.3）和（8.1.4）之外，还用了式（8.1.1）。

由一般矢量运算不难得到

$$\begin{aligned}&\int_{V_2}[\vec{E}_2\cdot\nabla(\vec{a}\cdot\nabla G_2)]\mathrm{d}V \\ &= \int_{V_2}\{\nabla\cdot[(\vec{a}\cdot\nabla\vec{G}_2)\vec{E}_2] - (\vec{a}\cdot\nabla G_2)(\nabla\cdot\vec{E}_2)\}\mathrm{d}V \\ &= -\oint_{S'}[(\vec{a}\cdot\nabla G_2)\vec{E}_2]\cdot\vec{n}\mathrm{d}S - \vec{a}\cdot\int_{V_2}\frac{\rho}{\varepsilon_2}\nabla G_2\mathrm{d}V\end{aligned}$$

$$= -\vec{a}\cdot\oint_{S'}\nabla G_2(\vec{E}_2\cdot\vec{n})\mathrm{d}S - \vec{a}\cdot\int_{V_2}\frac{\rho}{\varepsilon_2}\nabla G_2\mathrm{d}V \tag{8.1.7}$$

其中用到了 $\nabla\cdot\vec{E}_2 = \dfrac{\rho}{\varepsilon_2}$。另外，由 $\nabla\times(G_2\vec{a}) = \nabla G_2\times\vec{a}$，我们又有

$$\begin{aligned}\oint_{S'}[\vec{E}_2\times\nabla\times(G_2\vec{a})]\cdot\vec{n}\mathrm{d}S &= \oint_{S'}[\vec{E}_2\times(\nabla G_2\times\vec{G})]\cdot\vec{n}\mathrm{d}S\\ &= \oint_{S'}(\nabla G_2\times\vec{a})\cdot(\vec{n}\times\vec{E}_2)\mathrm{d}S\\ &= \vec{a}\cdot\oint_{S'}(\vec{n}\times\vec{E}_2)\times\nabla\vec{G}_2\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{8.1.8}$$

把式（8.1.7）和（8.1.8）代回到式（8.1.6）即有

$$\begin{aligned}&\vec{a}\cdot\int_{V_2}[-\mathrm{i}\omega\mu_2 G_2\vec{J} - \vec{E}_2\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') + \frac{\rho}{\varepsilon_2}\nabla G_2]\mathrm{d}V\\ &\quad = -\vec{a}\cdot\oint_{S'}[(\vec{n}\cdot\vec{E}_2)\nabla G_2 + (\vec{n}\times\vec{E}_2)\times\nabla G_2 + \mathrm{i}\omega\mu_2 G_2(\vec{H}_2\times\vec{n})]\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{8.1.9}$$

由于 $\vec{a}$ 为任意常矢量，去掉 $\vec{a}$ 的点乘上式仍然成立。此外，若 $G_2(\vec{r},\vec{r}\,')$ 为无界空间的格林函数，则在无穷远处应满足辐射条件。这样，当 $S_{\inf}$ 趋向无穷远时，上式中对 $S_{\inf}$ 的面积分应该消失，而且有 $G_2(\vec{r},\vec{r}\,') = G_2(\vec{r}\,',\vec{r})$。于是利用 δ 函数的性质就可由式（8.1.9）得到电场 $\vec{E}_2(\vec{r})$ 的积分表示

$$\begin{aligned}&\int_{V_2}[-\mathrm{i}\omega\mu_2 G_2(\vec{r},\vec{r}\,')\vec{J}(\vec{r}\,') + \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\varepsilon_2}\nabla' G_2(\vec{r},\vec{r}\,')]\mathrm{d}V'\\ &\quad - \int_S[\mathrm{i}\omega\mu_2 G_2(\vec{r},\vec{r}\,')(\vec{n}\times\vec{H}_2(\vec{r}\,')) - (\vec{n}\times\vec{E}_2(\vec{r}\,'))\times\nabla' G_2(\vec{r},\vec{r}\,')\\ &\quad - \vec{n}\cdot\vec{E}_2(\vec{r}\,')\nabla' G_2(\vec{r},\vec{r}\,')]\mathrm{d}S' = \begin{cases}\vec{E}_2(\vec{r}), & \vec{r}\in V_2\\ 0, & \vec{r}\notin V_2\end{cases}\end{aligned} \tag{8.1.10}$$

用完全类似的方法或对偶关系可获得关于 $\vec{H}_2(\vec{r})$ 的积分表示

$$\begin{aligned}&\int_{V_2}[G_2(\vec{r},\vec{r}\,')\nabla'\vec{J}(\vec{r}\,') + \frac{\rho_m(\vec{r}\,')}{\mu_2}\nabla' G_2(\vec{r},\vec{r}\,')]\mathrm{d}V'\\ &\quad - \int_S[\mathrm{i}\omega\varepsilon_2 G_2(\vec{r},\vec{r}\,')(\vec{n}\times\vec{E}_2(\vec{r}\,')) + (\vec{n}\times\vec{H}_2(\vec{r}\,'))\times\nabla' G_2(\vec{r},\vec{r}\,')\\ &\quad + (\vec{n}\cdot\vec{H}_2(\vec{r}\,')\nabla' G_2(\vec{r},\vec{r}\,')]\mathrm{d}S' = \begin{cases}H_2(\vec{r}), & \vec{r}\in V_2\\ 0, & \vec{r}\notin V_2\end{cases}\end{aligned} \tag{8.1.11}$$

同理，也可以导出 V_1 中的电磁场 $\vec{E}_i(\vec{r})$ 和 $\vec{H}_1(\vec{r})$ 的积分表示，它们是

$$\begin{aligned}&\int_S[\mathrm{i}\omega\mu_1 G_1(\vec{r},\vec{r}\,')(\vec{n}\times\vec{H}_1(\vec{r}\,')) - (\vec{n}\times\vec{E}_1(\vec{r}))\times\nabla' G_1(\vec{r},\vec{r}\,')\\ &\quad - \vec{n}\cdot\vec{E}_1(\vec{r}\,')\times\nabla' G_1(\vec{r},\vec{r}\,')]\mathrm{d}S' = \begin{cases}\vec{E}_1(\vec{r}), & \vec{r}\in V_1\\ 0, & \vec{r}\notin V\end{cases}\end{aligned} \tag{8.1.12}$$

$$-\int_S[\mathrm{i}\omega\varepsilon_1 G_1(\vec r,\vec r\,')(\vec n\times\vec E_1(\vec r\,'))+(\vec n\times\vec H_1(\vec r))\times\nabla' G_1(\vec r,\vec r\,')$$

$$+\vec n'\vec H_1(\vec r\,')\nabla' G_1(\vec r,\vec r\,')]\mathrm{d}S'=\begin{cases}\vec H_1(\vec r), & \vec r\in V_1\\ 0, & \vec r\notin V\end{cases}\tag{8.1.13}$$

以上所得表示式原则上属于积分方程的形式，因为未知量包含在积分号内。但是，这里还存在着一些难题，其中之一是当 $\vec r=\vec r\,'$ 时格林函数的奇异性，其二是电场方程中存在未知的磁场，磁场方程中存在未知的电场，即是一种耦合形式的方程。所以，直接利用这些方程去解决电磁散射问题仍有很大困难。

8.1.2　电磁散射问题的表面积分算子方程

如果把 S 所包围的区域视作均匀的散射体，其内部不存在体分布的场源。S 外也是均匀的媒质空间，电磁源存在于 S 之外，甚至处于无限远。在这种条件下，方程（8.1.10）和（8.1.11）中 $\rho(\vec r)$ 和 $\rho_m(\vec r)$ 均为零，而包含 $\vec J(\vec r)$ 的积分正是 S 外的场源所产生的入射电磁场，如果用 $\vec E_{\mathrm{inc}}(\vec r)$ 表示，则有

$$\vec E_{\mathrm{inc}}(\vec r)=-\mathrm{i}\omega\mu_2\int_\Omega G_2(\vec r,\vec r\,')\vec J(\vec r\,')\mathrm{d}V'$$

在这种情况下区域 2 中的电磁场可表示为

$$\vec E_{\mathrm{inc}}(\vec r)-\int_S[\mathrm{i}\omega\mu_2 G_2(\vec r,\vec r\,')(\vec n\times\vec H_2(\vec r\,'))-(\vec n\times\vec E_2(\vec r\,'))\times\nabla G_2(\vec r,\vec r\,')$$

$$-\vec n\cdot\vec E_2(\vec r\,')\nabla' G_2(\vec r,\vec r\,')]\mathrm{d}S'=\begin{cases}\vec E_2(\vec r), & \vec r\in V_2\\ 0, & \vec r\notin V_2\end{cases}\tag{8.1.14}$$

类似地还有

$$\vec H_{\mathrm{inc}}(\vec r)+\int_S[\mathrm{i}\omega\varepsilon_2 G_2(\vec r,\vec r\,')(\vec n\times\vec E_2(\vec r\,'))+(\vec n\times\vec H_2(\vec r\,'))\times\nabla' G_2(\vec r,\vec r\,')$$

$$+\vec n\cdot\vec H_2(\vec r\,')\nabla' G_2(\vec r,\vec r\,')]\mathrm{d}S'=\begin{cases}\vec H_2(\vec r), & \vec r\in V_2\\ 0, & \vec r\in V_1\end{cases}\tag{8.1.15}$$

$$\int_S[\mathrm{i}\omega\mu_1 G_1(\vec r,\vec r\,')(\vec n\times\vec H_1(\vec r\,'))-(\vec n\times\vec E_1(\vec r\,'))\times\nabla' G_1(\vec r,\vec r\,')$$

$$-\vec n\cdot\vec E_1(\vec r\,')\nabla' G_1(\vec r,\vec r\,')]\mathrm{d}S'=\begin{cases}\vec E_1(\vec r), & \vec r\in V_1\\ 0, & \vec r\in V_2\end{cases}\tag{8.1.16}$$

$$-\int_S[\mathrm{i}\omega\varepsilon_1 G_1(\vec r,\vec r\,')(\vec n\times\vec E_1(\vec r\,'))+(\vec n\times\vec H_1(\vec r\,'))\times\nabla' G_1(\vec r,\vec r\,')$$

$$+\vec n\cdot\vec H_1(\vec r\,')\nabla' G_1(\vec r,\vec r\,')]\mathrm{d}S'=\begin{cases}\vec H_1(\vec r), & \vec r\in V_1\\ 0, & \vec r\in V_2\end{cases}\tag{8.1.17}$$

这样，就把两个均匀区域的电磁场通过其交界面上的电磁场表达了出来。但是，这还只是形式上的，因为以上积分在 $\vec r=\vec r\,'$ 时会因为格林函数的奇异性而

发散。

为了消除发散，我们将用积分主值代替奇异积分，并估计这样做的影响。为简单起见，设 S 面足够光滑，可将其中任意小的部分近似视为平面。在 S 面上取任意一点 O，以 O 为圆心，a 为半径，在 S 上取一足够小的圆平面 S_a，S 的其余部分用 S_0 表示。于是，在 S 上对函数 $f(\vec{r},\vec{r}')$ 的奇异积分可表示为

$$\int_S f(\vec{r},\vec{r}')\,\mathrm{d}S' = \int_{S_a} f(\vec{r},\vec{r}')\,\mathrm{d}S' + \int_{S_0} f(\vec{r},\vec{r}')\,\mathrm{d}S'$$

当 $S_a \to 0$ 时，如果积分 $\int_{S_0} f(\vec{r},\vec{r}')\,\mathrm{d}S'$ 存在，就称其为积分 $\int_S f(\vec{r},\vec{r}')\,\mathrm{d}S'$ 的积分主值或主值积分，并记作 P. V. $\int_S f(\vec{r},\vec{r}')\,\mathrm{d}S'$ 。

纵观式（8.1.14）~（8.1.17）各式中的面积分的各项不难发现，如果假定各场量都可视为 $\vec{r}'$ 的连续函数，则它们在 S_a 上的积分都可当作常数而提到积分号外面，实际需要考虑的是对被积函数奇异部分的积分。如果令

$$\nabla' G = \left(\nabla'_S + \vec{n}\frac{\partial}{\partial n}\right)G$$

则需要讨论的是以下三种形式的积分，

$$I_1 = \int_{S_a} G(\vec{r},\vec{r}')\,\mathrm{d}S',\quad I_2 = \int_{S_a} \frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}')}{\partial n}\mathrm{d}S',\quad I_3 = \int_{S_a} \nabla'_S G(\vec{r},\vec{r}')\,\mathrm{d}S'$$

其中，∇'_S 为∇在 S 上的切向分量，而 G 则代表 G_1 或 G_2 。由于 $|\vec{r}-\vec{r}'|\to 0$ ，故有近似

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \to \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

为了计算以上积分，我们采用图 8－2 所示的局部坐标系，设观察点 P 和源点 Q 在柱坐标系中分别为（0，0，z）和（ρ'，ϕ'，z'），令 $z'=0$，则有积分

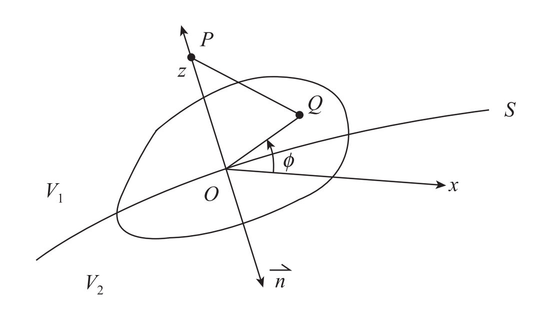


图 8－2　计算积分的局部坐标系

$$I_1 = \frac{1}{4\pi}\int_0^a \frac{2\pi\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + z^2}}\mathrm{d}\rho' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + z^2} - |z|\right)$$

$$I_2 = \frac{1}{4\pi}\int_0^a \left[-\frac{\partial}{\partial z'}\frac{1}{\sqrt{\rho'^2 + (z - z')^2}}\right]_{z'=0} 2\pi\rho'\mathrm{d}\rho'$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{z}{|z|}\right]$$

当 P 点从 V_1 中趋于 S 上的 O 点时，$z \to 0$ ，这样就得到

$$I_1 = \frac{a}{2}, \quad I_2 = -\frac{1}{2}$$

因此，当 $a \to 0$ 时就有

$$I_1 = 0, \quad I_2 = -\frac{1}{2}$$

对于 I_3，可在局部坐标系中表示为

$$I_3 = \hat{x}' \frac{1}{4\pi}\int_{S_a} \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}}\right)\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' + \hat{y}' \frac{1}{4\pi}\int_{S_a} \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}}\right)\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$$

由于被积函数是 x' 和 y' 的偶函数，则显然有 $I_3 = 0$。

利用以上结果即可得到

$$\vec{E}_{\mathrm{inc}}(\vec{r}) - \mathrm{P.V.}\int_S [\mathrm{i}\omega\mu_2 G_2(\vec{r},\vec{r}')(\vec{n} \times \vec{H}_2(\vec{r}')) - (\vec{n} \times \vec{E}_2(\vec{r}')) \times \nabla' G_2(\vec{r},\vec{r}') - (\vec{n} \cdot \vec{E}_2(\vec{r}'))\nabla' G_2(\vec{r},\vec{r}')]\mathrm{d}S' = \frac{1}{2}\vec{E}_2(\vec{r}), \quad \vec{r} \in S \tag{8.1.18}$$

$$\vec{H}_{\mathrm{inc}}(\vec{r}) + \mathrm{P.V.}\int_S [\mathrm{i}\omega\varepsilon_2 G_2(\vec{r},\vec{r}')(\vec{n} \times \vec{E}_2(\vec{r}')) + (\vec{n} \times \vec{H}_2(\vec{r}')) \times \nabla' G_2(\vec{r},\vec{r}') + (\vec{n} \cdot \vec{H}_2(\vec{r}'))\nabla' G_2(\vec{r},\vec{r}')]\mathrm{d}S' = \frac{1}{2}\vec{H}_2(\vec{r}), \quad \vec{r} \in S \tag{8.1.19}$$

$$\mathrm{P.V.}\int_S [\mathrm{i}\omega\mu_1 G_1(\vec{r},\vec{r}')(\vec{n} \times \vec{H}_1(\vec{r}')) - (\vec{n} \times \vec{E}_1(\vec{r}')) \times \nabla' G_1(\vec{r},\vec{r}') - (\vec{n} \cdot \vec{E}_1(\vec{r}'))\nabla' G_1(\vec{r},\vec{r}')]\mathrm{d}S' = \frac{1}{2}E_1(\vec{r}), \quad \vec{r} \in S \tag{8.1.20}$$

$$-\mathrm{P.V.}\int_S [\mathrm{i}\omega\varepsilon_1 G_1(\vec{r},\vec{r}')(\vec{n} \times \vec{E}_1(\vec{r}')) + (\vec{n} \times \vec{H}_1(\vec{r}')) \times \nabla' G_1(\vec{r},\vec{r}') + (\vec{n} \cdot \vec{H}_1(\vec{r}'))\nabla' G_1(\vec{r},\vec{r}')]\mathrm{d}S' = \frac{1}{2}H_1(\vec{r}), \quad \vec{r} \in S \tag{8.1.21}$$

现在以上各式中的场量均已取在 S 面上，对散射体而言就称为表面积分方程，其中式（8.1.18）和（8.1.20）称为电场积分方程（EFIE），而式（8.1.19）和（8.1.21）则称为磁场积分方程（MFIE）。

但是，以上方程仍存在缺点，即其中包含着场的法向分量。如果都能表示成切向分量，则可以把这些场量与等效源联系起来，这样方程的物理意义就会更加清楚。

由于在无源区域电磁场满足方程

$$\nabla' \times \vec{E}(\vec{r}') = -\mathrm{i}\omega\mu\vec{H}(\vec{r}')$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}') = \mathrm{i}\omega\varepsilon\vec{E}(\vec{r}')$$

则容易得到

$$\vec{n}\cdot\vec{H} = \frac{\mathrm{i}}{\omega\mu}\vec{n}\cdot(\nabla'\times\vec{E}) = -\frac{\mathrm{i}}{\omega\mu}\nabla'\cdot(\vec{n}\times\vec{E})$$

$$\vec{n}\cdot\vec{E} = -\frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\vec{n}\cdot(\nabla'\times\vec{H}) = \frac{\mathrm{i}}{\omega\mu}\nabla'\cdot(\vec{n}\times\vec{H})$$

定义 S 上的表面电流和磁流

$$\vec{J}_{S2} = \vec{n}\times\vec{H}_2, \quad \vec{M}_{S2} = -\vec{n}\times\vec{E}_2$$

$$\vec{J}_{S1} = -\vec{n}\times\vec{H}_1, \quad \vec{M}_{S1} = \vec{n}\times\vec{E}_1$$

则以上表面积分方程又可表示成

$$\vec{E}_{\mathrm{inc}}(\vec{r}) - \mathrm{P.V.}\int_S[\mathrm{i}\omega\mu_2 G_2(\vec{r},\vec{r}')\vec{J}_{S2}(\vec{r}') + \vec{M}_{S2}(\vec{r}')\times\nabla' G_2(\vec{r},\vec{r}') - \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon_2}\nabla'\cdot\vec{J}_{S2}(\vec{r}')\nabla' G_2(\vec{r},\vec{r}')]\mathrm{d}S' = \frac{1}{2}\vec{E}_2(\vec{r}), \quad \vec{r}\in S \tag{8.1.22}$$

$$\vec{H}_{\mathrm{inc}}(\vec{r}) + \mathrm{P.V.}\int_S[-\mathrm{i}\omega\varepsilon_2 G_2(\vec{r},\vec{r}')\vec{M}_{S2}(\vec{r}') + \vec{J}_{S2}(\vec{r}')\times\nabla' G_2(\vec{r},\vec{r}') + \frac{\mathrm{i}}{\omega\mu_2}\nabla'\cdot\vec{M}_{S2}(\vec{r}')\nabla' G_2(\vec{r},\vec{r}')]\mathrm{d}S' = \frac{1}{2}\vec{H}_2(\vec{r}), \quad \vec{r}\in S \tag{8.1.23}$$

$$\mathrm{P.V.}\int_S[-\mathrm{i}\omega\mu_1 G_1(\vec{r},\vec{r}')\vec{J}_{S1}(\vec{r}') - \vec{M}_{S1}(\vec{r}')\times\nabla' G_1(\vec{r},\vec{r}') + \frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon_1}\nabla'\cdot\vec{J}_{S1}(\vec{r}')\nabla' G_1(\vec{r},\vec{r}')]\mathrm{d}S' = \frac{1}{2}\vec{E}_1(\vec{r}), \quad \vec{r}\in S \tag{8.1.24}$$

$$\mathrm{P.V.}\int_S[-\mathrm{i}\omega\varepsilon_1 G_1(\vec{r},\vec{r}')\vec{M}_{S1}(\vec{r}') + \vec{J}_{S1}\,\vec{r}'\times\nabla' G_1(\vec{r},\vec{r}') + \frac{\mathrm{i}}{\omega\mu_1}\nabla'\cdot\vec{M}_{S1}(\vec{r}')\nabla' G_1(\vec{r},\vec{r}')]\mathrm{d}S' = \frac{1}{2}\vec{H}_1(\vec{r}), \quad \vec{r}\in S \tag{8.1.25}$$

由于 $\vec{E}_{1,2}$ 和 $\vec{H}_{1,2}$ 在边界 S 上还要满足边界条件，故以上方程还可以根据具体情况进一步加以简化，使得方程更易于求解。

8.1.3 散射体为理想介质和理想导体时的表面积分算子方程

把上面所得到的表面积分方程用于理想介质和理想导体的电磁散射问题可以得到更简单的形式，有利于进行实际计算。

如果散射体为理想介质，则在 S 面上存在边界条件

$$\vec{n}\times(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0, \quad \vec{n}\times(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0$$

把方程（8.1.22）和（8.1.24）分别改写为

$$\vec{n}\times\vec{E}_{\mathrm{inc}} - \vec{n}\times\mathrm{P.V.}\int_S\Big(\mathrm{i}\omega\mu_2 G_2\vec{J}_{S2} + \vec{M}_{S2}\times\nabla' G_2$$

$$-\frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon_2}\nabla'\cdot\vec{J}_{S2}\nabla'G_2\Big)\mathrm{d}S'=\frac{1}{2}\vec{n}\times\vec{E}_2 \tag{8.1.26}$$

$$\begin{aligned}&\vec{n}\times\mathrm{P.V.}\int_S\Big(-\mathrm{i}\omega\mu_1G_1\vec{J}_{S1}-\vec{M}_{S1}\times\nabla'G_1\\&+\frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon_1}\nabla'\cdot\vec{J}_{S1}\nabla'G_1\Big)\mathrm{d}S'=\frac{1}{2}\vec{n}\times\vec{E}_1\end{aligned} \tag{8.1.27}$$

把上两式相减，并利用 S 面上的边界条件即能得到

$$\begin{aligned}\vec{n}\times\vec{E}_{\mathrm{inc}}(\vec{r})&=\vec{n}\times\mathrm{P.V.}\int_S\Big[\mathrm{i}\omega\mu_0\vec{J}_S(\vec{r}')(G_1+G_2)\\&+\vec{M}_S(\vec{r}')\times\nabla'(G_1+G_2)-\frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon_1}\nabla'\cdot\vec{J}_S\nabla'\Big(G_1+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}G_2\Big)\Big]\mathrm{d}S',\quad\vec{r}\in S\end{aligned} \tag{8.1.28}$$

这里假定了 $\mu_1=\mu_2=\mu_0,\vec{J}_S=\vec{J}_{S2}=-\vec{J}_{S1},\vec{M}_S=\vec{M}_{S2}=-\vec{M}_{S1}$。

用类似的方法可由方程（8.1.23）和（8.1.25）又可以得到

$$\begin{aligned}\vec{n}\times\vec{H}_{\mathrm{inc}}(\vec{r})&=\vec{n}\times\mathrm{P.V.}\int_S\Big[\mathrm{i}\omega\varepsilon_1\vec{M}_S(\vec{r}')\Big(G_1+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}G_2\Big)\\&-\vec{J}_S\times\nabla'(G_1+G_2)-\frac{\mathrm{i}}{\omega\mu_0}\nabla'\cdot\vec{M}_S\nabla'(G_1+G_2)\Big]\mathrm{d}S'\end{aligned} \tag{8.1.29}$$

这样我们就得到了关于散射体表面等效电流和磁流的耦合积分方程。这些表面等效电流和磁流正是产生散射场的二次源。因此，只要求得这些源就能计算出散射场。

当散射体为理想导体时，由于在表面上必须满足条件 $\vec{n}\times\vec{E}_2=0$，又因导体内电磁场为零，故 $\vec{J}_{S1}$ 也消失，于是相应的表面积分方程就成为

$$\begin{aligned}&\vec{n}\times\vec{E}_{\mathrm{inc}}(\vec{r})-\vec{n}\times\mathrm{P.V.}\int_S\Big[\mathrm{i}\omega\mu_0G(\vec{r},\vec{r}')\vec{J}_S(\vec{r}')\\&-\frac{\mathrm{i}}{\omega\varepsilon}\nabla\cdot\vec{J}_S(\vec{r}')\nabla'G(\vec{r},\vec{r}')\Big]\mathrm{d}S'=0,\quad\vec{r}\in S\end{aligned} \tag{8.1.30}$$

$$\vec{n}\times\vec{H}_{\mathrm{inc}}(\vec{r})+\vec{n}\times\mathrm{P.V.}\int_S\vec{J}_S(\vec{r}')\times\nabla'G(\vec{r},\vec{r}')\mathrm{d}S'=\frac{1}{2}\vec{J}_S(\vec{r}),\quad\vec{r}\in S \tag{8.1.31}$$

这样我们就得到了理想导体散射问题表面等效电流源的积分方程。

8.2　用并矢格林函数表示的积分算子方程

电磁场问题的积分方程表示不仅可以通过利用标量格林函数来完成，而且可以用并矢格林函数实现，其优点是表现形式更加紧凑。

8.2.1　电磁散射问题积分算子方程表示的一般形式

我们仍然考虑图 8－1 所示的电磁散射问题，这时两个区域中的电场分别可

用以下矢量波动方程表示。

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}_1(\vec{r})-k_1^2\vec{E}_1(\vec{r})=0,\quad \vec{r}\in V_1 \tag{8.2.1}$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}_2(\vec{r})-k_2^2\vec{E}_2(\vec{r})=-\mathrm{i}\omega\mu_2\vec{J}(\vec{r}),\quad \vec{r}\in V_2 \tag{8.2.2}$$

为了导出相应的积分算子方程，考虑利用并矢格林函数 $\overline{\overline{G}}_{1,2}(\vec{r},\vec{r}')$，它们满足方程

$$\nabla\times\nabla\times\overline{\overline{G}}_{1,2}(\vec{r},\vec{r}')-k_{1,2}^2\overline{\overline{G}}_{1,2}(\vec{r},\vec{r}')=\overline{\overline{I}}\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{8.2.3}$$

用 $\overline{\overline{G}}_2(\vec{r},\vec{r}')$ 右点乘方程（8.2.2），用 $\vec{E}_2$ 左点乘 $\overline{\overline{G}}_2$ 满足的方程（8.2.3），然后把两式相减并在 V_2 上积分，就可得到

$$\int_{V_2}[(\nabla\times\nabla\times\vec{E}_2(\vec{r})\cdot\overline{\overline{G}}_2(\vec{r},\vec{r}')-\vec{E}_2(\vec{r})\cdot(\nabla\times\nabla\times\overline{\overline{G}}_2(\vec{r},\vec{r}')]\mathrm{d}V$$

$$=-\mathrm{i}\omega\mu_2\int_{V_2}\vec{J}\cdot G_2(\vec{r},\vec{r}')\mathrm{d}V-\int_{V_2}\vec{E}_2(\vec{r})\cdot\overline{\overline{I}}\delta(\vec{r}-\vec{r}')\mathrm{d}V \tag{8.2.4}$$

利用矢量－并矢格林第二定理（5.3.29）、δ 函数的性质，以及前面所用的入射波的表示，就能由（8.2.4）得到

$$\vec{E}_2(\vec{r}')=\vec{E}_{\mathrm{inc}}(\vec{r}')+\oint_{S'}[\nabla\times\vec{E}_2(\vec{r})\times\overline{\overline{G}}_2(\vec{r},\vec{r}')$$

$$+\vec{E}_2(\vec{r})\times\nabla\times\overline{\overline{G}}_2(\vec{r},\vec{r}')]\cdot\vec{n}\mathrm{d}S,\quad \vec{r}'\in V_2 \tag{8.2.5}$$

其中，$\overline{\overline{G}}_2$（$\vec{r}$，$\vec{r}'$）为均匀媒质 ε_2、μ_2 无界空间的并矢格林函数，而 $\vec{E}_{\mathrm{inc}}$则是在不存在散射体时 $\vec{J}(\vec{r})$ 在无界空间所产生的电场。

进一步利用恒等式

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\overline{\overline{C}})=(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\overline{\overline{C}}$$

和方程$\nabla\times\vec{E}_2=-\mathrm{i}\omega\mu\vec{H}_2$可知

$$\vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{E}_2\times\overline{\overline{G}}_2)=\vec{n}\times\nabla\times\vec{E}_2\cdot\overline{\overline{G}}_2=-\mathrm{i}\omega\mu_2\overline{\overline{G}}_2(\vec{r},\vec{r}')\cdot\vec{n}\times\vec{H}_2(\vec{r}) \tag{8.2.6}$$

$$\vec{n}\cdot(\vec{E}_2\times\nabla\times\overline{\overline{G}}_2)=\vec{n}\times\vec{E}_2\cdot\nabla\times\overline{\overline{G}}_2=-\nabla\times\overline{\overline{G}}_2\cdot\vec{n}\times\vec{E}_2(\vec{r}) \tag{8.2.7}$$

这里我们用到了关系

$$[\nabla\times G_2(\vec{r},\vec{r}')]^{\mathrm{T}}=-\nabla\times\overline{\overline{G}}_2(\vec{r},\vec{r}')$$

以及对称关系 $\overline{\overline{G}}_2(\vec{r},\vec{r}')=\overline{\overline{G}}_2(\vec{r}',\vec{r})$。

把式（8.2.6）和（8.2.7）所表示的关系用于式（8.2.5）即可得到一个关于电场$\vec{E}_2$的积分方程

$$\vec{E}_{\mathrm{inc}}(\vec{r})-\int_S\Big[\mathrm{i}\omega\mu_2\overline{\overline{G}}_2(\vec{r},\vec{r}')\cdot(\vec{n}\times\vec{H}_2(\vec{r}'))$$

$$+\nabla'\times G_2(\vec{r},\vec{r}')\cdot(\vec{n}\times\vec{E}_2(\vec{r}'))\Big]\mathrm{d}S'=\begin{cases}\vec{E}_2(\vec{r}), & \vec{r}\in V_2\\ 0, & \vec{r}\in V_1\end{cases} \tag{8.2.8}$$

类似的可以得到关于 E_1 的积分方程

$$\int_S \Big[\mathrm{i}\omega\mu_1 \,\overline{\overline{G}}_1(\vec{r},\vec{r}\,')\cdot(\vec{n}\times\vec{H}_1(\vec{r}\,'))$$

$$+\nabla'\times\overline{\overline{G}}_1(\vec{r},\vec{r}\,')\cdot(\vec{n}\times\vec{E}_1(\vec{r}\,'))\Big]\mathrm{d}S' = \begin{cases}\vec{E}_1(\vec{r}), & \vec{r}\in V_1\\ 0, & \vec{r}\in V_2\end{cases} \tag{8.2.9}$$

利用类似的方法可以得到关于磁场的积分方程。

以上方程仍是耦合形式，需要利用具体问题给出的相应边界条件加以简化，同时并矢格林函数的奇异性也要影响以上方程的应用。

8.2.2　奇异积分的处理

由上面导出的方程可以看出，方程（8.2.8）和（8.2.9）的下半部分成为

$$\vec{E}_{\mathrm{inc}}(\vec{r}) - \int_S\big[-\mathrm{i}\omega\mu_2\,\overline{\overline{G}}_2(\vec{r},\vec{r}\,')\cdot(\vec{n}\times\vec{H}_2(\vec{r}\,'))$$

$$+\nabla'\times\overline{\overline{G}}_2(\vec{r},\vec{r}\,')\cdot(\vec{n}\times\vec{E}_2(\vec{r}\,'))\big]\mathrm{d}S' = 0,\quad \vec{r}\in V_1 \tag{8.2.10}$$

$$\int_S\Big[\mathrm{i}\omega\mu_1\,\overline{\overline{G}}_1(\vec{r},\vec{r}\,')\cdot(\vec{n}\times\vec{H}_1(\vec{r}\,'))$$

$$+\nabla'\times\overline{\overline{G}}_1(\vec{r},\vec{r}\,')\cdot(\vec{n}\times\vec{E}_1(\vec{r}\,'))\Big]\mathrm{d}S' = 0,\quad \vec{r}\in V_2 \tag{8.2.11}$$

当 $\vec{r}$ 移到 S 上时，它们就成为 S 上的电磁场所满足的方程，进一步利用 S 上两侧电场和磁场所满足的边界条件

$$\vec{n}\times\vec{E}_1 = \vec{n}\times\vec{E}_2,\quad \vec{n}\times\vec{H}_1 = \vec{n}\times\vec{H}_2$$

就使得两方程的未知量只有 $\vec{n}\times\vec{E}_2$ 和 $\vec{n}\times\vec{H}_2$，它们又可理解为 S 上的等效磁流源和等效电流源，理论上已可由两个方程完全确定。而且，一旦求得了这些等效源，就可由方程（8.2.8）和（8.2.9）的上半部分求出空间任意点的电磁场。

但是，当把 $\vec{r}$ 移到 S 上时，就会由于可能出现 $\vec{r}=\vec{r}\,'$ 的情形，这时并矢格林函数具有奇异性，可能使在 S 上的积分发散，因而需要认真分析。

由上面两个方程可以看出，其中主要包含两类积分，分别为

$$\vec{I}_1 = \int_S \overline{\overline{G}}(\vec{r},\vec{r}\,')\cdot(\vec{n}\times\vec{H}(\vec{r}\,'))\mathrm{d}S'$$

$$\vec{I}_2 = \int_S \nabla'\times\overline{\overline{G}}(\vec{r},\vec{r}\,')\cdot(\vec{n}\times\vec{E}(\vec{r}))\mathrm{d}S'$$

其中，I_1 可以用其主值积分代替，因为其奇异部分的影响可以忽略。

由于

$$\overline{\overline{G}}(\vec{r},\vec{r}\,') = \left(\overline{\overline{I}} + \frac{\nabla\nabla}{k^2}\right)G(\vec{r},\vec{r}\,') = \left(\overline{\overline{I}} + \frac{\nabla'\nabla'}{k^2}\right)G(\vec{r},\vec{r}\,')$$

因此

$$\nabla'\times\overline{\overline{G}}(\vec{r},\vec{r}\,') = \nabla'\times\overline{\overline{I}}G(\vec{r},\vec{r}\,') + \nabla'\times\frac{\nabla'\nabla'}{k^2}G(\vec{r},\vec{r}\,')$$

又由于

$$\nabla' \times \frac{\nabla'\nabla'}{k^2}G(\vec{r},\vec{r}') = (\nabla' \times \nabla')\nabla' \frac{G(\vec{r},\vec{r}')}{k^2} = 0$$

$$\nabla' \times \bar{\bar{I}}G(\vec{r},\vec{r}') = \nabla' G(\vec{r},\vec{r}') \times \bar{\bar{I}}$$

故有

$$\vec{I}_2 = \int_S \nabla' G(\vec{r},\vec{r}') \times (\vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}'))\mathrm{d}S' \tag{8.2.12}$$

考虑

$$\vec{n} \times \vec{I}_2 = \int_S \vec{n} \times [\nabla' G(\vec{r},\vec{r}') \times (\vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}'))]\mathrm{d}S' \tag{8.2.13}$$

因为

$$\nabla' G \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \vec{n}(\nabla' G \cdot \vec{E}) - (\vec{n} \cdot \nabla' G)\vec{E}$$

而且

$$\vec{n} \times \vec{n}(\nabla' G \cdot \vec{E}) = 0$$

$$\vec{n} \times (\nabla' G \cdot \vec{n})\vec{E} = (\vec{n} \times \vec{E})(\vec{n} \cdot \nabla' G)$$

故有

$$\vec{n} \times \vec{I}_2 = -\int_S \vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}')[(\vec{n} \cdot \nabla' G(\vec{r},\vec{r}')]\mathrm{d}S' \tag{8.2.14}$$

对于这种被积函数，其奇异部分的处理与 8.1.2 中对 I_2 的结果相同，于是我们有

$$\vec{n} \times \vec{I}_2 = \frac{1}{2}\vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}) - \mathrm{P.V.}\int_S (\vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}')(\vec{n} \cdot \nabla' G(\vec{r},\vec{r}'))\mathrm{d}S' \tag{8.2.15}$$

8.3　圆柱体对平面电磁波的散射

上面讨论了一般电磁场散射问题，采用的是积分算子方程方法。对一些简单形状的散射体可采用一些简单的方法获得散射场解，如散射体为无限长圆柱体，入射场为特殊极化的平面波时可化为二维问题，采用模式展开法就能得到散射场解。

8.3.1　圆柱介质对平面电磁波的散射[55]

现在考虑一个平面电磁波入射到一个具有复介电常数 $\tilde{\varepsilon}$ 的无限长均匀圆柱形介质体上，介质柱中心沿坐标 z 放置于真空（或空气）中。入射电磁波沿 x 方向传播，极化方向为 z。入射电磁波将在介质柱中诱导二次源，这些源所产生的电磁场就是入射到柱体上的电磁场所产生的电磁散射。这些辐射电磁场与入射电磁场之和与柱内的电磁场应满足圆柱介面上的边界条件。在一定条件下，由此可以确定散射电磁场。

由于我们假定散射体是均匀的，入射场和散射体形状均与 z 坐标无关，二次源所产生的电磁场也应该与 z 无关，而且电场只有 z 分量。在这种情况下由频域

麦克斯韦方程可以得到其在极坐标中的形式

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}E_z(\rho,\varphi) = -\mathrm{i}\omega\mu_0 H_\rho(\rho,\varphi)$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}E_z(\rho,\varphi) = \mathrm{i}\omega\mu H_\phi(\rho,\varphi)$$

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho H_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}H_\rho\right] = \mathrm{i}\omega\tilde{\varepsilon}E_z(\rho,\varphi)$$

并由此可得到 $E_z(\rho,\phi)$ 所满足的微分算子方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + k^2\right)E_z(\rho,\varphi) = 0 \tag{8.3.1}$$

其中，$k^2=\omega^2\tilde{\varepsilon}\mu$。

根据以前我们对这一算子方程的了解，其解可以表示成

$$E_z(\rho,\varphi) = E_z(\rho)E_z(\varphi)$$

由于场在空间分布的唯一性，E_z 必须满足关于坐标 φ 的周期性条件，从而应选

$$E_z(\varphi) = A_m\sin m\varphi + B_m\cos m\varphi \tag{8.3.2}$$

此外，E_z 在柱体内必须满足 $\rho=0$ 时有限的条件，为满足边界条件，只能是随 ρ 的驻波型分布。此外，在 $\rho\to\infty$ 时还要满足无限远条件。为此我们选择

$$E_z(\rho) = A_\rho J_m(k\rho) + B_\rho H_m^{(2)}(k\rho) \tag{8.3.3}$$

以上是可能存在电磁场的基本模式。为了使电磁场满足介质柱的边界条件可把散射场表示为以上模式的组合。如果用 E_z^s 表示柱体外部的散射物，而 E_z^i 表示柱体内部的电磁场，则可有

$$E_z^s(\rho,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty}(A_m\sin m\varphi + B_m\cos m\varphi)H_m^{(2)}(k_0\rho) \tag{8.3.4}$$

$$E_z^i(\rho,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty}(C_m\sin m\varphi + D_m\cos m\varphi)J_m(k\rho) \tag{8.3.5}$$

相应的磁场即为

$$\begin{aligned} H_\rho^s(\rho,\varphi) &= \frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu_0}\frac{\partial}{\partial\rho}E_z^s(\rho,\varphi) \\ &= -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\sum_{m=0}^{\infty}(A_m\sin m\varphi + B_m\cos m\varphi)H_m^{(2)\prime}(k_0\rho) \end{aligned} \tag{8.3.6}$$

$$\begin{aligned} H_\rho^s(\rho,\varphi) &= -\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu_0\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}E_z^s(\rho,\varphi) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{\omega\mu_0\rho}\sum_{m=0}^{\infty}m(A_m\cos m\varphi - B_m\sin m\varphi)H_m^{(2)}(k_0\rho) \end{aligned} \tag{8.3.7}$$

而柱体内部的磁场则是

$$\begin{aligned} H_\phi^i(\rho,\varphi) &= \frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu_0}\frac{\partial}{\partial\rho}E_z^i(\rho,\varphi) \\ &= -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}}{\mu_0}}\sum_{m=0}^{\infty}(C_m\sin m\varphi + D_m\cos m\varphi)\,J'_m(k\rho) \end{aligned} \tag{8.3.8}$$

$$
\begin{aligned}
H_\rho^i(\rho,\varphi) &= -\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu_0\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}E_z^i(\rho,\varphi) \\
&= \frac{\mathrm{i}}{\omega\mu_0\rho}\sum_{m=0}^{\infty}m(C_m\cos m\varphi - D_m\sin m\varphi)J_m(k\rho)
\end{aligned} \tag{8.3.9}
$$

根据假设，入射波电场 $\vec{E}_{\text{inc}}$ 可以表示成

$$
\vec{E}_{\text{inc}} = \hat{z}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0\cdot\vec{r}} = \hat{z}E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0\cdot\rho\cos\varphi}
$$

在散射柱体外的总电磁场为入射电磁场与散射电磁场之和，这个总电场只有 z 方向分量，散射体内部电场也只有 z 方向分量。根据介质表面两侧电场切向分量连续的边界条件就可以得到

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty}(C_m\sin m\varphi + D_m\cos m\varphi)J_m(ka) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}(A_m\sin m\varphi + B_m\cos m\varphi)H_m^{(2)}(ka) + E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka\cos\varphi}
\end{aligned} \tag{8.3.10}
$$

其中，a 为圆柱散射体的半径。这一等式在 $-\pi<\varphi\leqslant\pi$ 时正确。

要确定未知电磁场，关键是确定展开系数。为此，我们利用三角函数的正交性，对式（8.3.10）两边乘以 $\sin m\varphi$，然后对 φ 在 $-\pi$ 到 π 之间积分便得到

$$
\pi C_mJ_m(ka) - \pi A_mH_m^{(2)}(ka) = E_0\int_{-\pi}^{\pi}\sin m\varphi\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0a\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi = 0 \tag{8.3.11}
$$

类似地，再利用 $\cos m\varphi$ 又得到

$$
\begin{aligned}
2\pi D_mJ_m(ka) - 2\pi B_mH_m^{(2)}(ka) &= E_0\varepsilon_m\int_{-\pi}^{\pi}\cos m\varphi\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0a\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi E_0\varepsilon_m\mathrm{i}^{-m}J_m(k_0a)
\end{aligned} \tag{8.3.12}
$$

其中，ε_m 为 Neumann 数。

除此之外，我们还可以利用在 $\rho=a$ 处磁场切向分量的连续性。根据平面电磁波中电场与磁场的关系可以推知，入射波磁场的 φ 向分量为

$$
-\cos\varphi\frac{E_0}{\eta_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0a\cos\varphi}
$$

其中，η_0 为自由空间的波阻抗。由此我们得到

$$
\begin{aligned}
&-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}}{\mu_0}}\sum_{m=0}^{\infty}(C_m\sin m\varphi + D_m\cos m\varphi)J'_m(ka) \\
&= -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\sum_{m=0}^{\infty}(A_m\sin m\varphi + B_m\cos m\varphi)H_m^{(2)\prime}(k_0a) \\
&\quad -\frac{E^0}{\eta_0}\cos\varphi\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0a\cos\varphi}
\end{aligned} \tag{8.3.13}
$$

利用三角函数的正交性，由（8.3.13）可得

$$
\mathrm{i}\pi\sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}}{\mu_0}}C_m\,J'_m(ka) - \mathrm{i}\pi\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}A_m\,H_m^{(2)\prime}(k_0a) = E_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\varphi\sin m\varphi\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0a\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi \tag{8.3.14}
$$

$$\mathrm{i}2\pi\sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}}{\mu_0}}D_m\, J'_m(ka) - \mathrm{i}2\pi\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}B_m\, H_m^{(2)}{}'(k_0a) = \varepsilon_m E_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\varphi\cos m\varphi\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0a\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

由积分计算知

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos\varphi\cos m\varphi\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0a\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(k_0a)}\int_{-\pi}^{\pi}\cos m\varphi\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0a\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi = \mathrm{i}2\pi\mathrm{i}^{-m}J'_m(k_0a)$$

故有

$$\sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}}{\mu_0}}D_m\, J'_m(ka) - \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}B_m H_m^{(2)}{}'(k_0a) = \varepsilon_m E_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\mathrm{i}^{-m}J'_m(k_0a) \tag{8.3.15}$$

把式（8.3.11）和（8.3.14）以及式（8.3.12）和（8.3.15）写成有关展开系数的矩阵方程就成为

$$\begin{bmatrix} J_m(ka) & -H_m^{(2)}(k_0a) \\ \sqrt{\tilde{\varepsilon}_\mathrm{r}}\,J'_m(ka) & -H_m^{(2)}{}'(k_0a)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_m \\ A_m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0\end{bmatrix} \tag{8.3.16}$$

$$\begin{bmatrix} J_m(ka) & -H_m^{(2)}(k_0a) \\ \sqrt{\tilde{\varepsilon}_\mathrm{r}}\,J'_m(ka) & -H_m^{(2)}{}'(k_0a)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_m \\ B_m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_m E_0\mathrm{i}^{-m}J_m(k_0a) \\ \varepsilon_m E_0\mathrm{i}^{-m}J'_m(k_0a)\end{bmatrix} \tag{8.3.17}$$

显然式（8.3.16）和（8.3.17）不能同时成立，除非 $C_m = A_m = 0$，而从（8.3.17）就可以解得

$$D_m = \varepsilon_m E_0\mathrm{i}^{-m}\frac{H_m^{(2)}(k_0a)\,J'_m(k_0a) - J_m(k_0a)H_m^{(2)}{}'(k_0a)}{\sqrt{\tilde{\varepsilon}_r}\,J'_m(ka)H_m^{(2)}(k_0a) - H_m^{(2)}{}'(k_0a)J_m(ka)} \tag{8.3.18}$$

$$B_m = -\varepsilon_m E_0\mathrm{i}^{-m}\frac{\sqrt{\tilde{\varepsilon}_r}\,J'_m(ka)J_m(k_0a) - J'_m(k_0a)\,J_m(ka)}{\sqrt{\tilde{\varepsilon}_r}\,J'_m(ka)H_m^{(2)}(k_0a) - H_m^{(2)}{}'(k_0a)J_m(ka)} \tag{8.3.19}$$

其中，$\tilde{\varepsilon}_r$ 为介质柱的相对复介电常数，按定义为

$$\tilde{\varepsilon}_r = \varepsilon_r - \mathrm{i}\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \tag{8.3.20}$$

把所得展开系数代回展开式中就可得到柱体内外的电磁场解。

8.3.2　理想导体圆柱对平面电磁波的散射[55]

如果把上面考虑的介质柱换成理想导体，则其散射场可以从上面的分析中得到。可以认为，当 $\sigma\to\infty$ 时，上面的有耗介质柱也就变成了理想导体。由式（8.3.20）不难看出

$$\lim_{\sigma\to\infty}\sqrt{\tilde{\varepsilon}_r}\to\infty$$

于是由式（8.3.18）和（8.3.19）可以得到

$$D_m \to 0$$

$$B_m \to -\varepsilon_m E_0\mathrm{i}^{-m}\frac{J_m(k_0a)}{H_m^{(2)}(k_0a)} \tag{8.3.21}$$

把这样的 B_m 代入式（8.3.21）就得到了理想导体圆柱的散射电磁场。

入射平面波也可以表示成非均匀柱面波的展开，亦即

$$E_0 e^{-ik_0\rho\cos\varphi} = \sum_{m=0}^{\infty}(E_m \sin m\varphi + F_m \cos m\varphi)J_m(k_0\rho)$$

利用三角函数正交性容易得到

$$E_m = 0$$

$$\varepsilon_m E_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos m\varphi e^{-ik_0\rho\cos\varphi}d\varphi = \varepsilon_m E_0 2\pi i^{-m}J_m(k_0\rho) = 2\pi F_m J_m(k_0\rho)$$

也就是

$$F_m = \varepsilon_m E_0 i^{-m}$$

因此

$$E_{\text{inc}} = \sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m E_0 i^{-m}J_m(k_0\rho)\cos m\varphi \tag{8.3.22}$$

于是，散射体外部总电场 $E_z(\rho,\varphi)$ 就可表示成

$$E_z = E_{\text{inc}} + E_z^s = E_0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m i^{-m}}{H_m^{(2)}(k_0a)}[H_m^{(2)}(k_0a)J_m(k_0\rho) - J_m(k_0a)H_m^{(2)}(k_0\rho)]\cos m\varphi \tag{8.3.23}$$

由此又可利用麦克斯韦方程求出

$$H_\varphi = -iE_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m i^{-m}}{H_m^{(2)}(k_0a)}[H_m^{(2)}(k_0a)\,J'_m(k_0\rho) - J_m(k_0a)H_m^{(2)}{}'(k_0\rho)]\cos m\varphi \tag{8.3.24}$$

因为散射体的表面电流 $\vec{J}_S$ 定义为

$$\vec{J}_S = \vec{n}\times\vec{H}|_{\rho=a} = \hat{\rho}\times[\hat{\rho}H_\rho + \hat{\varphi}H_\varphi]_{\rho=a} = \hat{z}H_\varphi|_{\rho=a}$$

所以有

$$\vec{J}_S(a,\phi) = -i\hat{z}E_0\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m i^{-m}}{H_m^{(2)}(k_0a)}[H_m^{(2)}(k_0a)\,J'_m(k_0a) - J_m(k_0a)H_m^{(2)}{}'(k_0a)]\cos m\varphi \tag{8.3.25}$$

再利用关系式

$$J_m(z)H_m^{(2)}{}'(z) - J'_m(z)H_m^{(2)}(z) = -\frac{2i}{\pi z}$$

可把式（8.3.26）简化为

$$\vec{J}_S(a,\varphi) = \hat{z}\frac{2E_0}{\pi ak_0}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_m i^{-m}}{H_m^{(2)}(k_0a)}\cos m\varphi \tag{8.3.26}$$

用类似的方法可以求解当入射电磁波对柱体为横向极化时的电磁散射问题，当然两种情况都要求入射波对柱体垂直入射。

8.4　理想导体柱对电磁近场的散射[38]

当入射场源与散射体的距离较近时，入射场不再能视为平面波，而是应该考虑入射场的实际复杂分布，而且把散射体视作入射场的一种局部边界，我们称这种散射为近场散射。本节利用一个比较简单的问题说明求解近场电磁散射问题所用方法的特点。

8.4.1　任意形状理想导体柱的电磁近场散射

考虑空气中一个理想导体柱，柱体纵向均匀，横截面形状任意但边界足够光滑。把坐标原点取在导体柱内，z 轴与导体柱纵向平行。设在 $\vec{\rho} = \vec{\rho}_0$ 处存在一线电流$\vec{J}_z$，其强度为 I_0，方向与 z 轴平行，即

$$\vec{J}_z = \hat{z} I_0 \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}_0) \tag{8.4.1}$$

显然，在以上条件下由源$\vec{J}_z$所产生的电磁场将与 z 无关，使之成为一个二维电磁场问题。在以下分析中我们假定，柱体的电磁散射场不影响场源。

由于所有场量都与 z 无关，即 $\dfrac{\partial}{\partial z} = 0$，故有$\nabla = \nabla_t$，于是由频域麦克斯韦方程可得出以下两组独立的方程。

$$\left.\begin{aligned} \nabla_t \times \vec{H}_t &= \hat{z}(J_z + \mathrm{i}\omega\varepsilon_0 E_z) \\ \nabla_t \times \hat{z}E_z &= -\mathrm{i}\omega\mu_0 \vec{H}_t \end{aligned}\right\} \tag{8.4.2}$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla_t \times \vec{E}_t &= -\hat{z}\mathrm{i}\omega\mu_0 H_z \\ \nabla_t \times \hat{z}H_z &= \mathrm{i}\omega\varepsilon_0 \vec{E}_t \end{aligned}\right\} \tag{8.4.3}$$

由于式（8.4.3）中不包含场源 $\vec{J}_z$，故它所表示的场不会被源 $\vec{J}_z$ 激发。因此，我们只需考虑由式（8.4.2）所表示的电磁场。

由式（8.4.2）可知

$$\begin{aligned} \nabla_t \times \nabla_t \times \hat{z}E_z &= \nabla_t(\nabla_t \cdot \hat{z}E_z) - \nabla_t^2(\hat{z}E_z) \\ &= -\mathrm{i}\omega\mu_0\hat{z}(J_z + \mathrm{i}\omega\varepsilon_0 E_z) \end{aligned}$$

又因

$$\nabla_t \cdot \hat{z}E_z = 0$$

故有

$$\nabla_t^2 E_z + k_0^2 E_z = \mathrm{i}\omega\mu_0 J_z \tag{8.4.4}$$

这是个非齐次标量亥姆霍兹微分算子方程。由此方程求得 E_z 之后就可由式（8.4.2）的后一方程求出$\vec{H}_t$。

由于 $\vec{J}_z$ 产生的电磁场会传播到无限远，因此 E_z 需满足无穷远条件

$$\lim_{\rho\to\infty} E_z = 0 \tag{8.4.5}$$

和在导体柱表面上的边界条件

$$E_z\Big|_S = 0 \tag{8.4.6}$$

其中，S 为导体表面。

为了求解非齐次亥姆霍兹微分算子方程（8.4.4），我们借助于满足方程

$$(\nabla_t^2 + k_0^2)G(\vec{\rho},\vec{\rho}\,') = -\delta(\vec{\rho}-\vec{\rho}\,') \tag{8.4.7}$$

的二维空间格林函数，它也应满足无限远条件

$$\lim_{\rho\to\infty} G(\vec{\rho},\vec{\rho}\,') = 0 \tag{8.4.8}$$

这样的格林函数已在 3.2.2 中给出，其形式为

$$G(\vec{\rho},\vec{\rho}\,') = \frac{1}{4\mathrm{i}}H_0^{(2)}(k_0|\vec{\rho}-\vec{\rho}\,'|) \tag{8.4.9}$$

设 φ_1 和 φ_2 为两个标量函数，并满足格林第二定理

$$\int_V(\varphi_1\nabla^2\varphi_2 - \varphi_2\nabla^2\varphi_1)\mathrm{d}V = \oint_S(\varphi_1\nabla\varphi_2 - \varphi_2\nabla\varphi_1)\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$$

其中，S 为 V 的外表面。把该公式降为二维，并设 $G=\varphi_1$，$E_z=\varphi_2$，则可以得到

$$\int_A G(\nabla_t^2 + k_0^2)E_z\mathrm{d}S = \int_A E_z(\nabla_t^2 + k_0^2)G\mathrm{d}S + \oint_L(G\nabla_t E_2 - E_2\nabla_t G)\cdot\vec{n}\mathrm{d}l \tag{8.4.10}$$

其中，A 为理想导电柱体横截面的外延平面，但不包括柱体横截面本身，而 L 则是柱体横截面边缘 l 与 A 的外边界之和。根据所给条件（8.4.5）、（8.4.6）和（8.4.8）我们知道式（8.4.10）中对 L 的积分在 A 的外边界部分将消失，而且还有

$$\oint_l E_z\nabla_t G\cdot\vec{n}\mathrm{d}l = 0$$

再考虑到式（8.4.4）和（8.4.7）即可由式（8.4.10）得出

$$E_z(\vec{\rho}\,') = -\mathrm{i}\omega\mu_0\int_A G(\vec{\rho},\vec{\rho}\,')J_z(\vec{\rho})\mathrm{d}S + \oint_l G(\vec{\rho},\vec{\rho}\,')\nabla_t E_z(\vec{\rho})\cdot\vec{n}\mathrm{d}l \tag{8.4.11}$$

因为

$$\nabla_t\times\hat{z}E_z = -\hat{z}\times\nabla_t E_z$$

故由式（8.4.2）的第二式得到

$$\hat{z}\times(\hat{z}\times\nabla_t E_z) = \mathrm{i}\omega\mu_0\hat{z}\times\vec{H}_t$$

但是

$$\hat{z}\times(\hat{z}\times\nabla_t E_z) = -\nabla_t E_z$$

故又有

$$\vec{n}\cdot\nabla_t E_z = \mathrm{i}\omega\mu_0\vec{n}\cdot(\vec{H}_t\times\hat{z}) = \mathrm{i}\omega\mu_0\hat{z}\cdot(\vec{n}\times\vec{H}_t) = \mathrm{i}\omega\mu_0 J_{sz} \tag{8.4.12}$$

其中，$J_{sz}=\hat{z}\cdot(\vec{n}\times\vec{H}_t)$ 为导体柱的表面等效电流。

把式（8.4.12）代入式（8.4.11）并交换 $\vec{\rho}$ 和 $\vec{\rho}\,'$，再考虑到 $G(\vec{\rho},\vec{\rho}\,')=G(\vec{\rho}\,',\vec{\rho})$，可把式（8.4.11）表示成

$$E_z(\vec{\rho}) = -\mathrm{i}\omega\mu_0\int_A G(\vec{\rho},\vec{\rho}')J_z(\vec{\rho}')\mathrm{d}S' + \mathrm{i}\omega\mu_0\oint_l G(\vec{\rho},\vec{\rho}')J_{sz}(\vec{\rho}')\mathrm{d}l' \tag{8.4.13}$$

进而把式（8.4.1）和（8.4.9）代入上式后则有

$$E_z(\vec{\rho}) = -\frac{\omega\mu_0 I_0}{4}H_0^{(2)}(k_0|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0|) + \frac{\omega\mu_0}{4}\oint_l H_0^{(2)}(k_0|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|)J_{sz}(\vec{\rho}')\mathrm{d}l' \tag{8.4.14}$$

该式表明，只要求得了散射体的等效表面电流，就可以按此式计算出空间任一点的电场。

为了计算 J_{sz}，我们把 $\vec{\rho}$ 移到散射体的表面上，因为有条件（8.4.6），这样我们就得到

$$I_0 H_0^{(2)}(k_0|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0|) = \oint_l H_0^{(2)}(k_0|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|)J_{sz}(\vec{\rho}')\mathrm{d}l', \quad \vec{\rho}\in l \tag{8.4.15}$$

这是一个以 J_{sz} 为未知量的第一类弗瑞德霍姆积分算子方程。显然要求得该方程的解析解在一般形状散射体的情况下几乎是不可能的，但是却为问题的数值解提供了方便。

8.4.2　圆形理想导体柱的近场散射[38]

如果上面分析的是半径为 a 的理想导体圆柱，l 就是以 a 为半径的圆，这时我们有

$$\mathrm{d}l' = a\mathrm{d}\varphi'$$

于是方程（8.4.14）和（8.4.15）分别成为

$$E_z(\vec{\rho}) = -\frac{\omega\mu_0 I_0}{4}H_0^{(2)}(k_0|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0|) + \frac{\omega\mu_0}{4}\int_0^{2\pi} H_0^{(2)}(k_0|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|)J_{sz}(\vec{\rho}')a\mathrm{d}\varphi' \tag{8.4.16}$$

$$I_0 H_0^{(2)}(k_0|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0|) = \int_0^{2\pi} H_0^{(2)}(k_0|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|)J_{sz}(\vec{\rho}')a\mathrm{d}\varphi' \tag{8.4.17}$$

虽然，问题已归结为求解积分算子方程（8.4.17）。为解此方程，我们利用展开式

$$H_0^{(2)}(k_0|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\varphi-\varphi')}\begin{cases}H_n^{(2)}(k_0\rho')J_n(k_0\rho), & \rho<\rho' \\ H_n^{(2)}(k_0\rho)J_n(k_0\rho'), & \rho>\rho'\end{cases}$$

可把式（8.4.17）表示成

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}[I_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\varphi_0}H_n^{(2)}(k_0\rho_0)J_n(k_0a)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\int_0^{2\pi}J_{sz}(a,\varphi')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\varphi'}a\mathrm{d}\varphi' H_n^{(2)}(k_0a)J_n(k_0a)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}$$

由两边每项对应相等即可得到

$$\int_0^{2\pi} J_{sz}(a,\varphi')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\varphi'}\mathrm{d}\varphi' = \frac{I_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\varphi_0}H_n^{(2)}(k_0\rho_0)}{aH_n^{(2)}(k_0a)} \tag{8.4.18}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} H_0^{(2)}(k_0|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|)J_{sz}(\vec{\rho}')a\mathrm{d}\varphi' \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}H_n^{(2)}(k_0\rho)J_n(k_0a)\int_0^{2\pi}J_{sz}(a,\varphi')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\varphi'}a\mathrm{d}\varphi' \\ &= I_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\varphi-\varphi')}\frac{J_0(k_0a)}{H_n^{(2)}(k_0a)}H_n^{(2)}(k\rho)H_n^{(2)}(k_0\rho_0)\end{aligned} \tag{8.4.19}$$

把这一结果代入式（8.4.16）我们就最后得到了 $E_z(\vec{\rho})$ 的解析表示式

$$\begin{aligned}E_z(\vec{\rho}) = -\frac{\omega\mu_0I_0}{4}\Big[&H_0^{(2)}(k_0|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0|) \\ &-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\varphi-\varphi_0)}\frac{J_n(k_0a)}{H_n^{(2)}(k_0a)}H_n^{(2)}(k_0\rho)H_n^{(2)}(k_0\rho_0)\Big]\end{aligned} \tag{8.4.20}$$

积分方程（8.4.17）能获得适当的表达，并能得到场的解析式。这是因为散射体表面能与坐标面重合，在一般情况下很难获得积分算子方程的严格解。

8.5　导体屏窄缝对电磁场的衍射[38]

电磁波散射和衍射问题在本质上没有差别，都是由于电磁场与物体作用引发二次源产生辐射的结果，只是关注的重点有所不同。

8.5.1　对近场的衍射

我们现在考虑的问题是，一个置于空气中无限薄无限大的理想导体屏（平面），其中有宽度为 a 的无限长窄缝。把导体平面与坐标的 $x-z$ 面重合，z 轴与窄缝平行，坐标原点在窄缝的中心。于是空间被导体平面分成两个区域，把 $y<0$ 的部分称为区域 1，而 $y>0$ 的部分称为区域 2。电磁场由一个存在于区域 1 中分布与 z 无关且指向为 z 的磁流源 M_z 产生。因此，电磁场源和边界构形均与 z 无关，故所产生的电磁场也都与 z 无关。

根据前面的多次分析，在这样的条件下不难由频域麦克斯韦方程推知，$H_x=H_y=E_z=0$，其他场量则满足方程

$$(\nabla_t^2 + k_0^2)H_z = \mathrm{i}\omega\varepsilon_0 M_z \tag{8.5.1}$$

$$E_x = \frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon_0}\frac{\partial H_z}{\partial y} \tag{8.5.2}$$

$$E_y = -\frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon_0}\frac{\partial H_z}{\partial x} \tag{8.5.3}$$

我们先分析区域 1 中的电磁场。为了区分，把其中的场量加上角标 1，和前面对散射问题的分析一样，仍然借助于标量格林函数 G_1，在直角坐标中它满足方程

$$(\nabla_t^2 + k_0^2) G_1(x,y;x',y') = -\delta(x-x')\delta(y-y') \tag{8.5.4}$$

并利用格林第二定理得到 G_1 和 H_{z1} 的积分关系

$$\begin{aligned}\int_{V_1}[(-\nabla_t^2 - k_0^2)H_{z1}]G_1 \mathrm{d}V &= \int_{V_1}[(-\nabla_t^2 - k^2)G_1]H_{z1}\mathrm{d}V \\ &= \int_{S_1}(H_{z1}\nabla_t G_1 - G_1 \nabla_t H_{z1})\cdot \vec{n}\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{8.5.5}$$

其中，V_1 为 $y<0$ 空间；S_1 为其表面。

H_{z1}满足以下条件。

$$\lim_{y\to-\infty} H_{z1} = 0 \tag{8.5.6}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} H_{z1} = 0,\quad y\in(-\infty,0) \tag{8.5.7}$$

$$\frac{\partial H_{z1}(x,0)}{\partial y} = 0,\quad x \notin \left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right) \tag{8.5.8}$$

对 G_1 我们设定满足以下条件。

$$\lim_{y\to-\infty} G_1(x,y;x',y') = 0 \tag{8.5.9}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} G_1(x,y;x',y') = 0,\quad y\in(-\infty,0) \tag{8.5.10}$$

$$\frac{\partial G_1(x,0;x',y')}{\partial y} = 0,\quad -\infty < x,\ z < \infty \tag{8.5.11}$$

也就是说，对于 G_1 而言导体平面不存在窄缝。

把以上条件考虑在内并因所有被积函数与 z 无关，就可由式（8.5.5）得到

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty}[(-\nabla_{xy}^2 - k_0^2)H_{z1}]G_1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{0}[(-\nabla_{xy}^2 - k_0^2)G_1]H_{z1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{-a/2}^{a/2} G_{z1}\frac{\partial H_{z1}}{\partial y}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{8.5.12}$$

再利用式（8.5.1）和（8.5.4）又可把式（8.5.12）变成

$$\begin{aligned}H_{z1}(x',y') &= -\mathrm{i}\omega\varepsilon_0\int_{\Omega} M_z(x,y)G_1(x,y;x',y')\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &\quad + \int_{-a/2}^{a/2} G_1(x,0;x',y')\frac{\partial H_{z1}(x,0)}{\partial y}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

交换（x'，y'）和（x，y），并考虑 G_1 的对称性，则我们有

$$\begin{aligned}H_{z1}(x,y) &= -\mathrm{i}\omega\varepsilon_0\int_{\Omega} M_z(x',y')G_1(x,y;x',y')\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \\ &\quad + \mathrm{i}\omega\varepsilon_0\int_{-a/2}^{a/2} G_1(x,y;x',0)E_{x1}(x',0)\mathrm{d}x'\end{aligned} \tag{8.5.13}$$

其中，Ω 为 M_z 的支撑集。在得到该式时用到了关系式（8.5.2）。

对于区域 2 中的 H_{z2}和 G_2 也有与式（8.5.5）完全类似的关系

$$\int_{V_2} [(-\nabla_t^2 - k_0^2) H_{z2}] G_2 \mathrm{d}V$$
$$= \int_{V_2} [(-\nabla_t^2 - k_0^2) G_2] H_{z2} \mathrm{d}V + \int_{S_2} (H_{z2} \nabla_t G_2 - G_2 \nabla_t H_{z2}) \cdot \vec{n} \mathrm{d}S \tag{8.5.14}$$

类似地 H_{z2} 应满足条件

$$\lim_{y \to \infty} H_{z2} = 0 \tag{8.5.15}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} H_{z2} = 0, \quad y \in (0, \infty) \tag{8.5.16}$$

$$\frac{\partial H_{z2}(x,0)}{\partial y} = 0, \quad x \notin \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) \tag{8.5.17}$$

而对 G_2 的要求是

$$\lim_{y \to \infty} G_2(x,y;x',y') = 0 \tag{8.5.18}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} G_2(x,y;x',y') = 0, \quad y \in (0, \infty) \tag{8.5.19}$$

$$\frac{\partial G_2(x,0;x',y')}{\partial y} = 0 \tag{8.5.20}$$

这样，我们也能得到

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(-\nabla_{xy}^2 - k_0^2) H_{z2}] G_2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(-\nabla_{xy}^2 - k_0^2) G_2] H_{z2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{-a/2}^{a/2} \left(G_2 \frac{\partial H_{z2}}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \tag{8.5.21}$$

因为 G_2 也应满足 G_1 所满足的与式（8.5.4）类似的方程，而 H_{z2} 则因区域 2 中不存在场源而满足方程

$$(\nabla_{xy}^2 + k^2) H_{z2} = 0 \tag{8.5.22}$$

这样就有

$$H_{z2}(x',y') = -\int_{-a/2}^{a/2} G_2(x,0,x',y') \frac{\partial H_{z2}(x,0)}{\partial y} \mathrm{d}x' \tag{8.5.23}$$

由此也就得到

$$H_{z2}(x,y) = -\mathrm{i}\omega\varepsilon_0 \int_{-a/2}^{a/2} G_2(x,y,x',0) E_{x2}(x',0) \mathrm{d}x' \tag{8.5.24}$$

由于在窄缝上两个区域的场必须是连续的，我们把窄缝中 x 方向的电场记作 $E_A(x)$，并有

$$E_{x1}(x,0) = E_{x2}(x,0) = E_A(x), \quad x \in \left(-\frac{a}{2}\ \frac{a}{2}\right) \tag{8.5.25}$$

现在假定 M_z 为一线源，位置在 $x' = \xi, y' = \eta$，即

$$M_z(x',y') = M_0 \delta(x' - \xi) \delta(y' - \eta) \tag{8.5.26}$$

基于以上表示，即可得到两个区域的磁场的积分形式

$$H_{z1}(x,y) = -\mathrm{i}\omega\varepsilon_0 M_0 G_1(x,y;\xi,\eta)$$
$$+ \mathrm{i}\omega\varepsilon_0 \int_{-a/2}^{a/2} G_1(x,y;x',0) E_A(x') \mathrm{d}x' \tag{8.5.27}$$

$$H_{z2}(x,y) = -\mathrm{i}\omega\varepsilon_0\int_{-a/2}^{a/2}G_2(x,y;x',0)E_A(x')\mathrm{d}x' \tag{8.5.28}$$

最后，利用连续性条件

$$H_{z1}(x,0) = H_{z2}(x,0),\quad x\in\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right) \tag{8.5.29}$$

就可由式（8.5.27）和（8.5.28）得到

$$M_0G_1(x,0;\xi,\eta) = \int_{-a/2}^{a/2}[G_1(x,0;x',0) + G_2(x,0;x',0)]E_A(x')\mathrm{d}x' \tag{8.5.30}$$

如果知道了 G_1 和 G_2，这就是个以 $E_A(x)$ 为未知量的积分算子方程。求得 $E_A(x)$后就可利用式（8.5.27）和（8.5.28）求得空间每一点的 H_z，进而又可利用式（8.5.2）和（8.5.3）求得任意点的电场。所以剩下的任务是解出 G_1 和 G_2。

首先，讨论 G_2 的求解问题。根据前面的讨论，G_2 应该满足方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_0^2\right)G_2 = -\delta(x-x')\delta(y-y') \tag{8.5.31}$$

且满足式（8.5.18）~（8.5.20）所列出的条件。为了利用所熟悉的解题方法，我们用傅里叶变换变为一维问题求解。

作傅里叶变换

$$G_2(k_x,y;x',y') = \int_{-\infty}^{\infty}G_2(x,y;x',y')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_xx}\mathrm{d}x$$

并作替换

$$G_2(k_x,y;x',y') = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_xx'}\hat{G}_2(k_x,y;x',y')$$

则可把方程（8.5.31）变为

$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} - k_y^2\right)\hat{G}_2 = \delta(y-y') \tag{8.5.32}$$

其中，$k_y = \sqrt{k_0^2 - k_x^2}$。还可根据 G_2 满足的条件得知

$$\lim_{y\to\infty}\hat{G}_2(k_x,y;x',y') = 0 \tag{8.5.33}$$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{G}_2(k_x,0;x',y')}{\mathrm{d}y} = 0 \tag{8.5.34}$$

根据这些条件可以得到方程（8.5.32）的解

$$\hat{G}_2(k_x,y;x',y') = \frac{1}{\mathrm{i}k_y}\begin{cases}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_yy'}\cos k_yy, & y<y'\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_yy}\cos k_yy', & y>y'\end{cases} \tag{8.5.35}$$

把三角函数用指数函数表示，上式又可以写成

$$\hat{G}_2(k_x,y;x',y') = \frac{1}{2\mathrm{i}k_y}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_y(y+y')} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_y|y-y'|}] \tag{8.5.36}$$

对上式求傅里叶逆变换又成为

$$G_2(x,y;x',y') = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ik_y(y+y')} + e^{-ik_y|y-y'|}}{k_y}e^{ik_x(x-x')}dk_x \tag{8.5.37}$$

利用汉克尔函数的积分表示

$$H_0^{(2)}(k_0\sqrt{x^2+y^2}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ik_y|y|}e^{ik_x x}}{k_y}dk_x$$

则可由式（8.5.37）得到

$$G_2(x,y;x',y') = \frac{1}{4i}\left\{H_0^{(2)}\left[k_0\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}\right] + H_0^{(2)}\left[k_0\sqrt{(x-x')^2+(y+y')^2}\right]\right\} \tag{8.5.38}$$

这相当于位于 $x=x'$，$y=y'$ 和 $x=x'$，$y=-y'$ 的两个互为镜象的线源的辐射场。

由于 G_1 和 G_2 的差别是把 y 换成 $-y$ 和把 y' 换成 $-y'$，而这种改变并不使式（8.5.38）有任何变化，这就说明

$$G_1 = G_2$$

到此就得到了问题的全部答案。

8.5.2　对平面电磁波的衍射

如果我们把场源移到离衍射缝很远的地方，入射场就可近似地看作平面波。这种情况下问题的解可以从以上问题的解答中得到。为了达到这一目的，我们首先把格林函数表示为

$$G_1(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{4i}\left\{H_0^{(2)}\left[k_0\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right] + H_0^{(2)}\left[k_0\sqrt{(x-\xi)^2+(\xi+\eta)^2}\right]\right\} \tag{8.5.39}$$

再把它表示在圆柱坐标系中，我们有

$$G_1(\rho,\varphi;\rho',\varphi') = \frac{1}{4i}\left\{H_0^{(2)}\left[k_0\sqrt{\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\varphi-\varphi')}\right] + H_0^{(2)}\left[k_0\sqrt{\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\varphi+\varphi')}\right]\right\} \tag{8.5.40}$$

当 ρ' 足够大时就意味着场源足够远，这时

$$[\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\mp\varphi')]^{1/2} \to \rho' - \rho\cos(\varphi\mp\varphi') \tag{8.5.41}$$

而汉克尔函数又可近似地表示为

$$H_0^{(2)}\{k_0[\rho'-\rho\cos(\varphi\mp\varphi')]\} \sim \sqrt{\frac{2i}{\pi k_0\rho'}}e^{-ik_0\rho'}e^{ik_0\rho\cos(\varphi\mp\varphi')} \tag{8.5.42}$$

把这一结果代入式（8.5.40）中即有

$$\begin{aligned} G_1(\rho,\varphi;\rho',\varphi') &\sim \frac{1}{4i}\sqrt{\frac{2i}{\pi k_0\rho'}}e^{-ik_0\rho'}\left[e^{ik_0\rho\cos(\varphi-\varphi')} + e^{ik_0\rho\cos(\varphi+\varphi')}\right] \\ &= \frac{1}{4i}\sqrt{\frac{2i}{\pi k_0\rho'}}e^{-ik_0\rho'}2e^{ik_0x\cos(\varphi-\varphi')}\cos(ky\sin\varphi') \end{aligned} \tag{8.5.43}$$

为了使后面的表示式简单，特选

$$M_0 = \left[\frac{-\omega\varepsilon_0}{4}\sqrt{\frac{2\mathrm{i}}{\pi k_0\rho'}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0\rho'}\right]^{-1} \tag{8.5.44}$$

利用以上结果，可由式（8.5.27）和（8.5.28）得到两个区域的磁场分别为

$$\begin{aligned} H_{z1}(x,y) &= 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0x\cos(k_0y\sin\varphi')} \\ &\quad + \frac{\omega\varepsilon_0}{2}\int_{-a/2}^{a/2}H_0^{(2)}\left[k_0\sqrt{(x-x')^2+y^2}\right]E_A(x')\,\mathrm{d}x' \end{aligned} \tag{8.5.45}$$

$$H_{z2}(x,y) = -\frac{\omega\varepsilon_0}{2}\int_{-a/2}^{a/2}H_0^{(2)}\left[k_0\sqrt{(x-x')^2+y^2}\right]E_A(x')\,\mathrm{d}x' \tag{8.5.46}$$

由于在窄缝上（$y=0$）两边磁场的切向分量连续，即可由上两式得到

$$-\frac{2}{\omega\varepsilon_0}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0x\cos\varphi'} = \int_{-a/2}^{a/2}H_0^{(2)}(k_0|x-x'|)E_A(x')\,\mathrm{d}x' \tag{8.5.47}$$

这样，我们又把问题归结为求解以 E_A 为未知量的积分算子方程。求得 $E_A(x)$ 后，就可由式（8.5.27）和（8.5.28）求出任意点的磁场。

第 9 章　时域电磁理论

由于历史的原因，传统的电磁场理论重点放在对稳态时谐电磁场的研究，其成果主要适用于单一频率或窄带电磁信号，其分析方法是隐去时间变量的频域方法，因此可称为频域电磁理论。随着对核爆炸电磁脉冲的关注以及宽带电磁信号重要性的提高，电磁场问题的直接时域分析变得越来越重要。我们把求解时域电磁场的成果称为时域电磁理论，本章讨论其基础。当代时域电磁学的发展主要在时域计算方面，这方面的内容放到下一章进行讨论。

9.1　非色散媒质中的瞬变电磁场

非色散各向同性媒质中的瞬变电磁场问题是时域电磁场理论研究成果最丰富的一部分，所发展的解析方法具有典型意义。由于瞬变电磁场问题的求解有很大难度，只有一些相对简单的情况才能求得解析解。为了深刻地认识瞬变电磁场的特有规律和特殊的求解方法，从最简单的情况入手是很自然的。

9.1.1　无界均匀媒质中任意时变平面电磁波

在无界均匀各向同性无耗媒质空间中，如果不考虑源的作用则时变电磁场的支配方程为时域麦克斯韦方程

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{E}(\vec{r},t)&=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}(\vec{r},t)\\\nabla\times\vec{H}(\vec{r},t)&=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t)\end{aligned}\tag{9.1.1}$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r},t)&=0\\\nabla\cdot\vec{H}(\vec{r},t)&=0\end{aligned}\tag{9.1.2}$$

由此又能得到电场和磁场分别满足的矢量齐次波动方程

$$\begin{aligned}\nabla^2\vec{E}(\vec{r},t)-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(\vec{r},t)&=0\\\nabla^2\vec{H}(\vec{r},t)-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H}(\vec{r},t)&=0\end{aligned}\tag{9.1.3}$$

这说明，时变电磁场是以波的形式存在并在空间运动。虽然电荷和电流是电磁场的源，但电磁场被激发出来以后，就可以独立地在空间传播，这种不依赖电流和电荷而存在的电磁波可称为自由电磁波。从数学方面讲，只满足方程（9.1.3）的电磁波称为无界空间电磁波的自然模式。

式（9.1.3）又称为达朗贝尔（d′Alembert）方程，对它可以求得通解。现在我们假设方程（9.1.3）的电磁波解的传播方向为$\vec{k}$，$\hat{k}$为该方向的单位矢量，沿该方向的距离用ζ表示。如果$\vec{r}$表示空间点的位矢，则它在$\hat{k}$方向的投影为

$$\zeta = \hat{k} \cdot \vec{r}$$

这样，待求波的电场$\vec{E}$就可以表示为

$$\vec{E} = \vec{E}(\zeta, t)$$

这时$\vec{E}$所满足的波动方程就变成一维空间变量的形式

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\vec{E}(\zeta, t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(\zeta, t) = 0 \tag{9.1.4}$$

其中，$v^2 = 1/\varepsilon\mu$。

作变量替换

$$\xi = t - \zeta/v, \quad \eta = t + \zeta/v$$

则方程（9.1.4）变作

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}\vec{E}(\zeta, \eta) = 0 \tag{9.1.5}$$

该方程的通解是

$$\vec{E}(\zeta, \eta) = \vec{E}_1(t - \zeta/v) + \vec{E}_2(t + \zeta/v) \tag{9.1.6}$$

其中，$\vec{E}_1$和$\vec{E}_2$为两个任意函数，虽然这里没有给定它们的具体形式，但由此可以了解平面电磁波的一些基本特性。

可以看出，$\xi = \text{const}$ 为$\vec{E}_1$的一个特征面，它对应

$$t - \zeta/v = \text{const}$$

满足该式的ζ称为等相面。由此推知

$$v = \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} \tag{9.1.7}$$

为$\vec{E}_1$的相速度

从另一方面看，当t变为$t + \Delta t$，$\vec{r}$变为$\vec{r} + \Delta\vec{r}$，为使ξ保持不变，即应满足

$$t - \vec{k} \cdot \vec{r}/v = t + \Delta t - \hat{k} \cdot (\vec{r} + \Delta\vec{r})/v$$

由此又得

$$v\Delta t = \hat{k} \cdot \Delta\vec{r} = \Delta\zeta$$

也就是说，属于同相面上的任一点都以同样的速度沿$\hat{k}$方向移动，这个速度就是相速度v。

同样的分析可知，$\vec{E}_2$代表了沿$\hat{k}$反方向以相速度v传播的平面波。

由于$\vec{H}$与$\vec{E}$满足同样的方程，故其解同样可以表示成

$$\vec{H} = \vec{H}_1(t - \zeta/v) + \vec{H}_2(t + \zeta/v) \tag{9.1.8}$$

对于沿$\hat{k}$方向传播的平面波，若用$\vec{F}$代表$\vec{E}$或$\vec{H}$，则显然有

$$\nabla \cdot \vec{F} = \hat{k}\frac{\partial}{\partial \zeta} \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\hat{k} \cdot \vec{F}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \hat{k}\frac{\partial}{\partial \zeta} \times \vec{F} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\hat{k} \times \vec{F}$$

于是由麦克斯韦方程得到

$$\frac{\partial}{\zeta}(\hat{k} \times \vec{E}) = -\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \tag{9.1.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}(\hat{k} \times \vec{H}) = \varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{9.1.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}(\hat{k} \cdot \vec{E}) = 0 \tag{9.1.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}(\hat{k} \cdot \vec{H}) = 0 \tag{9.1.12}$$

用 $\hat{k}$ 点乘式（9.1.9）和（9.1.10）两侧，由于有 $\hat{k} \cdot (\hat{k} \times \vec{F}) = 0$，故有

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{k} \cdot \vec{H}) = \frac{\partial}{\partial t}H_\zeta = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{k} \cdot \vec{E}) = \frac{\partial}{\partial t}E_\zeta = 0$$

这说明，电场和磁场沿波的传播方向的分量都与时间无关；而式（9.1.11）和（9.1.12）又直接说明，这两个分量又都与 ζ 无关。以上结果就意味着，电场和磁场沿传播方向的分量必须等于零，亦即以上的电磁场解是一种横波。

此外，由于 $\xi = t - \zeta/v$，故有

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} = -\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial \xi}$$

故由式（8.1.10）可得

$$-\frac{1}{v\partial \xi}(\hat{k} \times \vec{H}) - \varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial \xi} = 0$$

亦即

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{1}{v}(\hat{k} \times \vec{H}) + \varepsilon\vec{E}\right] = 0 \tag{9.1.13}$$

对上式求积分，积分常数因 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 的时变性而应取为零，故得到

$$\vec{E} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}(\hat{k} \times \vec{H}) \tag{9.1.14}$$

这说明，平面电磁波中的 $\vec{E}$、$\vec{H}$ 和 $\hat{k}$ 组成一个右手矢量正交三元素，而且电场和磁场的强度之比为 $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$，它被称为所在媒质的波阻抗。

如果媒质是导电的，则方程（9.1.1）中磁场的旋度方程应改为

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r},t) = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t) + \sigma\vec{E}(\vec{r},t)$$

这时相应的电场的波动方程则成为

$$\nabla^2\vec{E}(\vec{r},t) - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(\vec{r},t) - \sigma\mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t) = 0 \tag{9.1.15}$$

再由此可知，沿 $\hat{k}$ 方向传播的平面电磁波所满足的波动方程应为

$$\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\vec{E}(\zeta,t) - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(\zeta,t) - \sigma\mu\vec{E}(\zeta,t) = 0 \tag{9.1.16}$$

直接求该方程的解比较困难，常常是借助傅里叶变换（1.1.17）把它变到频域，结果为

$$\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\vec{E}(\zeta,\omega) + \gamma^2\vec{E}(\zeta,\omega) = 0 \tag{9.1.17}$$

其中

$$\gamma^2 = \omega^2\varepsilon\mu - \mathrm{i}\omega\mu\sigma \tag{9.1.18}$$

在这里我们用同样的符号表示时域和频域的场量，为了区别在必要时用变量把二者区分开来。

式（9.1.17）的解可一般地表示为

$$\vec{E}(\zeta,\omega) = A(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma(\omega)\zeta} + B(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma(\omega)\zeta} \tag{9.1.19}$$

如果把 $\gamma(\omega)$ 分出其实部和虚部，且令 $\gamma(\omega) = \beta(\omega) - \mathrm{i}\alpha(\omega))$，则有

$$\beta(\omega) = \frac{\omega}{v}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}+1\right)}$$

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega}{v}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}-1\right)}$$

于是又有

$$\vec{E}(\zeta,\omega) = A(\omega)\mathrm{e}^{-\alpha\zeta-\mathrm{i}\beta\zeta} + B(\omega)\mathrm{e}^{\alpha\zeta+\mathrm{i}\beta\zeta} \tag{9.1.20}$$

由于 $A(\omega)$ 和 $B(\omega)$ 无法确定，故不能通过逆变换求 $\vec{E}(\zeta,t)$ 的表达形式，但却可知道它是一种由传播因子 $-\alpha\zeta - \mathrm{i}\beta\zeta + \mathrm{i}\omega t$ 决定的指数函数，由这个因子就可以了解解的一些特性。例如，由 $\mathrm{e}^{-\alpha\zeta}$ 可知沿 $+\zeta$ 方向传播的波是指数衰减的，而且由等相面 $\beta\zeta - \omega t = \mathrm{const}$ 决定的相速度 $v = \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{\beta}$ 是 ω 的函数。这一结果说明，尽管 ε 和 μ 不是 ω 的函数，只要 $\sigma \neq 0$，媒质中电磁波的相速度仍是频率的函数。

9.1.2　均匀无耗各向同性媒质无界空间二维时域格林函数[34,67]

和频域情况一样，格林函数在求解任意源所产生的电磁场问题中起着重要作用。求解时域格林函数方程存在一定困难，这里重点介绍解决这类问题的卡尼亚－德·霍普（Cagniard-de Hoop）法，先从二维问题入手。

所谓二维时域格林函数问题，实际上是考虑无限长无限细强度为一个单位的直线电流，当其存在时间为 $\delta(t)$ 时在均匀无界媒质空间所产生的电磁场。设该

电流沿直角坐标系的 z 轴放置，位于 $x=0, y=0$ 处。该电流所产生的电场只有 z 向分量，把该电场用 $g(x,y,t)$ 表示，就可根据麦克斯韦方程导出它满足的时域微分算子方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)g(x,y,t)=-\delta(x)\delta(y)\delta(t) \tag{9.1.21}$$

其中，$v^2=1/\varepsilon\mu$，ε,μ 为所考虑媒质的电磁常数。

对上式施以傅里叶变换，并考虑到 $\delta(t)$ 的傅里叶变换为 1，从而得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k^2\right)g(x,y,\omega)=-\delta(x)\delta(y) \tag{9.1.22}$$

其中，$k^2=k_x^2+k_y^2=\omega^2/v^2$。为了再隐去一个变量 x，对式（9.1.22）再施行一次如下的变换

$$g(x,y,\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(k_x,y,\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x}\mathrm{d}k_x$$

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x}\mathrm{d}k_x$$

就又得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k^2-k_x^2\right)g(k_x,y,\omega)=-\delta(y) \tag{9.1.23}$$

这已经是一个均匀无界各向同性媒质空间中的一维格林函数方程，该方程与式（3.2.3）及其求解条件完全一致，故其解由式（3.2.12）给出，现在的形式为

$$g(k_x,y,\omega)=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k^2-k_x^2)^{1/2}|y|}}{2\mathrm{i}(k^2-k_x^2)^{1/2}} \tag{9.1.24}$$

进行一次傅里叶逆变换就可得到

$$g(x,y,\omega)=\frac{1}{4\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x-\mathrm{i}(k^2-k_x^2)^{1/2}|y|}}{(k^2-k_x^2)^{1/2}}\mathrm{d}k_x \tag{9.1.25}$$

但是，这一反变换并不能很容易求得，因为被积函数在 $k_x=\pm k$ 时存在支点。对于无耗媒质支点处于实轴上，这使得积分是不确定的。为了克服这一困难，通常的做法是假定媒质中存在小的损耗，使 $k_y=(k^2-k_x^2)$ 的虚部有一很小的负值，正像求解格林函数方程时已经做的那样，这可使得解（9.1.24）在无穷远处成为指数型无穷小，同时又可使式（9.1.25）中被积函数的支点的位置稍稍离开实轴。索末菲（Sommerfeld）采用的一种积分路径已在图 9－1 中示出，简称 SIP，它对无耗媒质是可行的。即使如此，我们还是要小心地排除支点的影响，以免发生错误。卡尼亚－德·霍普（Cagniard-de Hoop）方法是一种有效的解决办法。为采用此方法，令

$$k_x=\omega s_x,\quad k=\omega s_0$$

于是，式（9.1.25）变为

$$g(x,y,\omega) = \frac{1}{4\pi \mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(-s_x s + \sqrt{s_0^2 - s_x^2}|y|)}}{\sqrt{s_0^2 - s_x^2}}\mathrm{d}s_x \tag{9.1.26}$$

作变换

$$t = -s_x x + (s_0^z - s_x^z)^{y_2}|y| \tag{9.1.27}$$

又可把式（9.1.26）变成

$$g(x,y,\omega) = \frac{1}{4\pi \mathrm{i}}\int_C \left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{s_0^2 - s_x^2}}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{9.1.28}$$

很明显，该式类似于一种 Fourier 变换，主要差别是积分路径。现在的路径 C 是实 s_x 轴通过变换式（9.1.27）在复 t 平面上的映像。如果能把该映像变为 t 平面上的实轴，则式（9.1.28）中的括号部分就可以直接和 $g(x,y,t)$ 联系起来。

把 s_x 从式（9.1.27）中解出，并令

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \quad \frac{x}{\rho} = \cos\phi, \quad \frac{y}{\rho} = \sin\phi$$

我们有

$$s_x = -\frac{t}{\rho}\cos\phi \pm \left(s_0^2 - \frac{t^2}{\rho^2}\right)^{1/2}\sin\phi \tag{9.1.29}$$

由此可知，每一个 t 值有两个 s_x 值与之对应，只有在 $t = s_0\rho$ 时才只有一个值 $s_x = s_0\cos\phi$ 与之对应。当 $t = 0$ 时 $s_x = \pm s_0\sin\phi$；当 $t = s_0 x$ 时，$s_x = s_0$ 和 $s_0\cos2\phi$，这些特定点分别在 t 平面和 s_x 平面上的对应关系已在图 9－1 中示出。

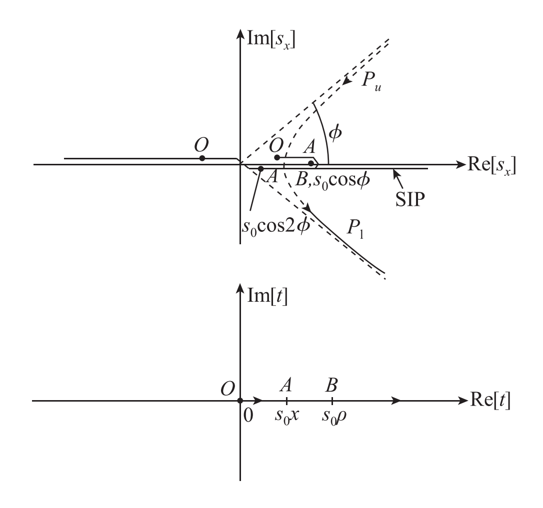


图 9－1　复 s_x 平面与 t 平面上的积分路径及对应关系

到此我们已经知道，在 $t = 0 \sim s_0\rho$ 这一段所对应的 s_x 都是实值，即都在 s_x 平面的实轴上。那么在 $t > s_0\rho$ 以后的对应关系又是怎样的呢？为了弄清这一问题，我们找出 s_x 的实部和虚部在 $t > s_0\rho$ 以后所满足的方程。令 $s_x = s_x' + \mathrm{i}s_x''$，其中 $s_x' = \mathrm{Re}[s_x], s_x'' = \mathrm{Im}[s_x]$。不难由式（9.1.29）得出

$$s_x' = -\frac{t}{\rho}\cos\phi,$$

$$s_x''^2 = s_x'^2\tan\phi - s_0^2\sin^2\phi$$

由此我们知道 s_x' 和 s_x'' 满足以下方程

$$\frac{s_x'^2}{s_0^2\cos^2\phi} - \frac{s_x''^2}{s_0^2\sin^2\phi} = 1 \tag{9.1.30}$$

这是一个双曲线方程，它所表示的曲线如图 9－1 所示。由 s_x'' 与 t 的关系可知，当方程（9.1.29）的右侧中的 ± 号取正号时由 P_u 表示，取负号时由 P_l 表示。而且，当 $t > s_0\rho$ 以后 s_x 分为两支，随着 t 的增加，一支沿 P_u 向上，一支沿 P_l 向下。

在式（9.1.26）中假定积分是按索末菲路径进行，由于被积函数只在 $s_x = s_0$ 处有奇异性，则根据柯西（Cauchy）定理可按图 9－1 上所示的路径变换到 $P_u + P_l$ 上。于是积分（9.1.26）成为

$$g(x,y,\omega) = \frac{1}{4\pi\mathrm{i}}\int_{P_u+P_l}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(-s_x x+\sqrt{s_0^2-s_x^2}\,|y|)}}{\sqrt{s_0^2 - s_x^2}}\mathrm{d}s_x \tag{9.1.31}$$

再把这一积分变换到 t 平面上，参考 t 与 s_x 的对应关系（9.1.29）和图 9－1 所示的路径方向，由式（9.1.31）和（9.1.28）可以得到

$$g(x,y,\omega) = \frac{1}{4\pi\mathrm{i}}\int_{s_0\rho}^{\infty}\left[\left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{s_0^2 - s_x^2}}\right)_l - \left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{s_0^2 - s_x^2}}\right)_u\right]_l \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{9.1.32}$$

其中，l 和 u 分别表示 P_l 和 P_u 上的映像。

进而，我们由式（9.1.29）还可得

$$(s_0^2 - s_x^2)^{1/2} = \frac{t}{\rho}\sin\phi \mp \mathrm{i}\left(\frac{t^2}{\rho^2} - s_0^2\right)^{1/2}\cos\phi \tag{9.1.33}$$

$$\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t} = \pm\,\mathrm{i}\,\frac{\sqrt{s_0^2 - s_x^2}}{\sqrt{t^2 - s_0^2\rho^2}} \tag{9.1.34}$$

由于在上面两式中的正负号分别代表了 P_u 和 P_l，故可由此看出存在以下关系

$$(s_0^2 - s_x^2)^{1/2} = [(s_0^2 - s_x^2)^{1/2}]^*,\quad \left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\right)_u = \left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\right)_l^* \tag{9.1.35}$$

据此可把式（9.1.32）改写成

$$g(x,y,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{s_0\rho}^{\infty}\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{s_0^2 - s_x^2}}\right)_l \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{9.1.36}$$

如果被积函数在 $t < s_0\rho$ 时为零，则上式的积分下限可扩展到 $-\infty$。这样，式（9.1.36）就是一个傅里叶变换，由此知

$$g(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{s_0^2 - s_x^2}}\right)_l u(t - s_0\rho) \tag{9.1.37}$$

其中，u 为单位阶跃函数。

再利用公式（9.1.34）就可把方程（9.1.21）的解写成

$$g(\rho,t)=\frac{1}{2\pi(t^2-s_0^2\rho^2)^{1/2}}u(t-s_0\rho) \tag{9.1.38}$$

这就是二维时域格林函数，它代表由 $\delta(x)$ 表示的无限长线源上单位冲激脉冲在无界均匀无耗各向同性媒质空间中所产生的电磁波，其波头在 $t=\rho/v=s_0\rho$ 时出现，亦即波头以速度 v 向前传播。由式（9.1.38）可以看出，虽然源的作用仅在 $t=0$ 的时刻，但对于空间的任一观察点所见的电磁波，在波头过后也不会立即消失，而是有一个无限长的拖尾。这是因为激发源在空间的一个方向上延伸到无穷远，使得任何一个观察点不断地收到线源上由近到远各点发送出的信号。

9.1.3　均匀无耗各向同性无界媒质空间中三维时域格林函数[34,67]

我们已求得三维空间标量频域格林函数（3.2.32），对该结果求傅里叶逆变换即可得到时域格林函数。在这里我们用另一种方法来求解，一方面可以说明卡尼亚－德·霍普方法的有效性，同时对提高分析能力也是有益的。

所考虑的三维标量格林函数满足如下的微分算子方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)g(x,y,z,t)=-\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t) \tag{9.1.39}$$

该方程描述在三维均无耗各向同性媒质空间位于笛卡尔坐标原点的点源单位冲激脉冲的作用。

经傅里叶变换可获得频域格林函数 $g(x,y,z,\omega)$ 所满足的方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2\right)g(x,y,z,\omega)=-\delta(x)\delta(y)\delta(z) \tag{9.1.40}$$

类似地再利用对空间变量的傅里叶变换关系

$$g(x,y,z,\omega)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}g(k_x,k_y,k_z,\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_xx+k_yy+k_zz)}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z \tag{9.1.41}$$

由式（9.1.40）即可得到

$$g(k_x,k_y,k_z,\omega)=\frac{1}{k^2-k_x^2-k_y^2-k_z^2} \tag{9.1.42}$$

利用这一关系，就可由式（9.1.41）把频域格林函数表示为

$$g(x,y,z,\omega)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_xx+k_yy+k_zz)}}{k^2-k_x^2-k_y^2-k_z^2}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z \tag{9.1.43}$$

但是，这个积分现在还不是完全确定的。就对 k_z 的积分而言，由于被积函数在 $k_z=\pm\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}$ 有两个极点，而对无耗媒质这两个极点位于实轴上，正是积分路径经过的地方，使得积分不能确定。为克服这一困难也常采用前面所用的方法，如采用索末菲积分路径。

继续考察积分（9.1.43）可知，对 $z<0$，当 $\mathrm{Im}[k_z]\to+\infty$ 时，被积函数按指数规律衰减。因此，根据约当（Jordan）引理，在上半平面无限大半圆路径 C

上对 k_z 的积分将消失。于是可把半圆 C 与实轴组成一个包围 k_z 平面上半平面的闭合回路，其中包含一个被积函数的极点 $k_z' = (k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2}$ 。根据柯西定理，式（9.1.43）中对 k_z 的积分等于被积函数在该极点处留数的 $2\pi i$ 倍。即

$$\mathrm{Res}\left[\frac{e^{-ik_z z}}{k^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2}\right] = (k_z \to k_z')\frac{e^{-ik_z z}}{(k_z + k_z')(k_z - k_z')}\bigg|_{k_z = k_z'} = \frac{1}{2k_3'}e^{-ik_z' z}$$

故有

$$g(x,y,z,\omega) = \frac{i}{2(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ik_x x - ik_y y - ik'_z z}}{k_z'}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y, \quad z > 0 \tag{9.1.44}$$

对 $z < 0$ ，可考虑下半平面的情形，也可得到类似的结果。这样，综合起来就可得到适合所有 z 的积分形式

$$g(x,y,z,\omega) = \frac{i}{2(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i(k_x x + k_y y + k_z |z|)}}{k_z}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \tag{9.1.45}$$

其中，$k_z = (k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2}$。

为了得到 $g(x,y,z,\omega)$ 的逆变换，可仍采用卡尼亚－德・霍普方法。为此先进行一次坐标旋转，让观察点 (x,y) 处于新坐标系 (x',y') 的 x' 轴上。如图 9－2 所示。

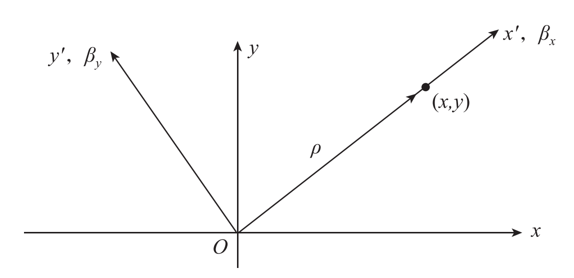


图 9－2　坐标旋转变换

令

$$\begin{aligned} k_x &= \beta_x\cos\phi - \beta_y\sin\phi \\ k_y &= \beta_x\sin\phi + \beta_y\cos\phi \end{aligned} \tag{9.1.46}$$

则可把式（9.1.45）表示成

$$g(\rho,z,\omega) = \frac{i}{8\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i(\beta_x\rho + \beta_z|z|)}}{\beta_z}\mathrm{d}\beta_x\mathrm{d}\beta_y \tag{9.1.47}$$

其中，$\beta_z = (k^2 - \beta_x^2 - \beta_y^2)^{1/2}$ 。再令

$$\beta_x = \omega s_x, \quad \beta_y = \omega s_y, \quad s_0 = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$$

则又有

$$g(\rho,z,\omega) = \frac{i\omega}{8\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega(s_x\rho + s_z|z|)}}{s_z}\mathrm{d}s_x\mathrm{d}s_y \tag{9.1.48}$$

其中，$s_z=(s_0^2-s_x^2-s_y^2)^{1/2}$。考察该式对 s_y 的积分，可以发现被积函数满足约当引理的条件，故可在无穷远处补充积分路径，把 s_y 平面的实轴与虚轴构成同一个闭合回路的一部分，再利用柯西定理，把沿实轴的积分变为沿虚轴的积分，然后再做变量替换 $s_y=-iq$，又把对 s_y 沿虚轴的积分变为对 q 沿实轴的积分，从而我们有以下的结果

$$g(\rho,z,\omega)=\frac{\omega}{8\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(s_x\rho+s_z|z|)}}{s_z}\mathrm{d}s_x\mathrm{d}q \tag{9.1.49}$$

其中，$s_z=(s_0^2+q^2-s_x^2)^{1/2}$。到此我们发现，上式与二维情况下的式（9.1.26）在形式上类似，故也可以按类似的方法处理。令

$$t=s_x\rho+(s_0^2+q^2-s_x^2)^{1/2}|z| \tag{9.1.50}$$

并由此解得

$$s_x=\frac{t}{r}\cos\phi\pm\left(s_0^2+q^2-\frac{t^2}{r}\right)^{1/2}\sin\phi \tag{9.1.51}$$

$$\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}=\pm i\frac{(s_0^2+q^2-s_x^2)^{1/2}}{[t^2-(s_0^2+q^2)r^2]^{1/2}} \tag{9.1.52}$$

其中，$r=(\rho^2+z^2)^{1/2}$。再经过类似于处理二维问题的过程，我们可以得到

$$g(r,\omega)=-\frac{\mathrm{i}\omega}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{(s_0^2+q^2)^{1/2}r}^{\infty}\frac{e^{-\mathrm{i}\omega t}}{[t^2-(s_0^2+q^2)r^2]^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}t\mathrm{d}q \tag{9.1.53}$$

下面需要调换上式的积分顺序，为此需要了解对 t 积分的范围。对 t 的积分起点是 $(s_0^2+q^2)^{1/2}r$ 在 $t-q$ 平面上该起点的轨迹满足方程

$$\frac{t^2}{s_0^2r^2}-\frac{q^2}{s_0^2}=1$$

由此可知，t 的起点轨迹是一条双曲线，其最低点为 s_0r。调换积分顺序后，为了保证积分区域不变，对于每一固定的 t 值，对 q 的积分要从双曲线的一支到另一支，其值为

$$q=\pm\left(\frac{t^2}{r^2}-s_0^2\right)^{1/2}$$

于是我们得到

$$g(r,\omega)=\int_{s_0r}^{\infty}\int_{-\left(\frac{t^2}{r^2}-s_0^2\right)^{1/2}}^{\left(\frac{t^2}{r^2}-s_0^2\right)^{1/2}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{r\sqrt{\left(\frac{t^2}{r^2}-s_0^2\right)-q^2}}\mathrm{d}q\mathrm{d}t \tag{9.1.54}$$

考虑到

$$\int_{-a}^{a}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\pi$$

由式（9.1.54）可以得到

$$g(r,\omega)=-\frac{\mathrm{i}\omega}{4\pi r}\int_{s_0r}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{9.1.55}$$

该式又可以写作

$$-\frac{g(r,\omega)}{\mathrm{i}\omega}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi r}u(t-s_0 r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{9.1.56}$$

根据傅里叶变换的性质，我们立即得到

$$\begin{aligned} g(r,\omega) &= \frac{u(t-s_0 r)'}{4\pi r} \\ &= \frac{\delta(t-r/v)}{4\pi r} \end{aligned} \tag{9.1.57}$$

这是个以速度 v 向外传播的球面冲击波。与线源产生的电磁波的明显差异是，这里不存在无限长拖尾。显然，这一点很容易理解。

9.1.4　有耗均匀无界媒质空间中的二维时域格林函数[34,67]

当媒质具有导电性时，电磁波的传播规律与在无耗媒质中会有明显的差别，除了损耗引起的衰减外，还会引起色散。现在讨论均匀有耗各向同性无界媒质中的二维时域格林函数。

在媒质存在损耗时，麦克斯韦方程组中的两个旋度方程成为

$$\nabla\times\vec{E}(\vec{r},t)=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}(\vec{r},t)$$

$$\nabla\times\vec{H}(\vec{r},t)=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t)+\sigma\vec{E}(\vec{r},t)+\vec{J}_i(\vec{r},t)$$

其中，$\vec{J}_i(\vec{r},t)$ 为外加电流。如果电流 $\vec{J}_i$ 为一无限长线源且与直角坐标系的 z 轴重合，则它所激发的电磁场中的电场只有 E_z 分量，而且电磁场均与 z 无关。这时的麦克斯韦方程成为

$$\nabla_t\times\hat{z}E_z(x,y,t)=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}_t(x,y,t)$$

$$\nabla_t\times\vec{H}_t(x,y,t)=-\hat{z}\left[\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}E_z(x,y,t)+\sigma E_z(x,y,t)+J_i(x,y,t)\right]$$

其中，$\nabla_t=\hat{x}\dfrac{\partial}{\partial t}+\hat{y}\dfrac{\partial}{\partial y}$；$\vec{H}_t$ 为磁场的横向分量。从以上两式中消去 $\vec{H}_t$ 就可得到 E_z 所满足的方程

$$\nabla_t^2E_z(x,y,t)-\frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_z(x,y,t)-\mu\sigma\frac{\partial}{\partial t}E_z(x,y,t)=\mu\frac{\partial J_i}{\partial t} \tag{9.1.58}$$

其中，$\nabla_t^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$。这是一个带衰减项的二维时域算子所构成的非齐次微分方程。若用格林函数法求解这类方程，首先需要求出满足下列方程的二维时域格林函数 $g(x,y,t)$

$$\left(\nabla_t^2-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{1}{v^2\tau}\frac{\partial}{\partial t}\right)g(x,y,t)=-\delta(x)\delta(y)\delta(t) \tag{9.1.59}$$

其中，$\tau=\varepsilon/\sigma$。为了对该方程进行简化，作变换

$$g(x,y,t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2\tau}} \tilde{g}(x,y,t)$$

可把方程（9.1.59）变为

$$\left(\nabla_t^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{4v^2\tau^2}\right)\tilde{g}(x,y,t) = -\delta(x)\delta(y)\delta(t) \qquad (9.1.60)$$

在得到上式时，用到了 $\mathrm{e}^{\frac{t}{2\tau}}\delta(t) = (e^{\frac{t}{2\tau}})_{t=0}\delta(t) = \delta(t)$ 。再令 $z = \mathrm{i}vt, k^2 = \dfrac{1}{4v^2\tau^2}$ ，则又可得到

$$\left(\nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)\tilde{g}(x,y,z) = -\delta(x)\delta(y)\delta(z) \qquad (9.1.61)$$

这是一个典型的非齐次亥姆霍兹方程，它所对应的齐次方程的解是众所周知的。若令 $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = (\rho^2 - v^2t^2)^{1/2}$ ，则方程（9.1.61）的齐次形式的解为

$$\begin{aligned}\tilde{g}(x,y,t) &= (A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr} + B\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr})/r \\ &= \left[A\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2v\tau}\sqrt{\rho^2-v^2t^2}} + B^{\frac{\mathrm{i}}{2v\tau}\sqrt{\rho^2-v^2t^2}}\right]/\sqrt{\rho^2 - v^2t^2}\end{aligned} \qquad (9.1.62)$$

因为这里我们解的实际上是时域方程，它的解必须是实数，所以解只能取式（9.1.62）的实部或虚部。若取其虚部，为满足因果关系在 $\rho > vt$ 时令其等于零，便可得到 $A=B$，且应为纯实数。于是可将方程（9.1.60）齐次形式的实数解表示为

$$\tilde{g}(\rho,t) = \begin{cases} 0, & vt < \rho, \\ 2A\dfrac{\cosh\left(\dfrac{1}{2v\tau}\sqrt{v^2t^2 - \rho^2}\right)}{\sqrt{v^2t^2 - \rho^2}}, & vt > \rho \end{cases}$$

或写为

$$\tilde{g}(\rho,t) = 2Au(vt - \rho)\frac{\cosh\left(\dfrac{1}{2v\tau}\sqrt{v^2t^2 - \rho^2}\right)}{\sqrt{v^2t^2 - \rho^2}} \qquad (9.1.63)$$

其中，u 为单位阶跃函数。

到此为止，还有系数 A 尚待确定。为此考虑 $\tau \to \infty$ 的特殊情况，这时，式（9.1.63）成为

$$\tilde{g}(\rho,t) = \frac{2Au(vt - \rho)}{\sqrt{v^2t^2 - \rho^2}} \qquad (9.1.64)$$

方程（9.1.60）在极坐标中变成以下形式

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\tilde{g}(\rho,t) = -\frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho}\delta(t) \qquad (9.1.65)$$

把式（9.1.64）代入上式，使其满足非齐次方程，并通过比较方程两边的奇异性确定 $A = v/4\pi$ ，从而最后得到待求的二维时域格林函数。最后把 $\tilde{g}$ 变回到 g ，即可得到

$$g(x,y,t) = vu(vt - \rho)\mathrm{e}^{\frac{t}{2\tau}}\frac{\cosh\left(\dfrac{1}{2v\tau}\sqrt{v^2t^2 - \rho^2}\right)}{2\pi\sqrt{v^2t^2 - \rho^2}} \qquad (9.1.66)$$

把这一结果与无耗情况的解（9.1.57）比较可知，$\sigma \neq 0$ 导致波的传输特性产生很大变化。容易看出，当 $\sigma \to 0$ 时式（9.1.66）还原为式（9.1.38），这可作为解的正确性的一种验证。

9.1.5　有耗均匀无界媒质空间中的三维时域格林函数[34,67]

在有耗均匀各向同性无界媒质中三维时域格林函数满足的方程为

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{v^2\tau}\frac{\partial}{\partial t}\right)g(x,y,z,t) = -\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t) \tag{9.1.67}$$

其中的参数与二维时相同，也采用变换

$$g(x,y,z,t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2\tau}}\tilde{g}(x,y,z,t)$$

式（9.1.67）即变为

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{4v^2\tau^2}\right)\tilde{g}(x,y,z,t) = -\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(t) \tag{9.1.68}$$

为降低计算维度，先做一次傅里叶变换

$$\tilde{g}(x,y,z,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y,k_z,t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}\mathrm{d}k_z \tag{9.1.69}$$

得到方程

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{4v^2\tau^2} - k_z^2\right)g(x,y,k_z,t) = -\delta(x)\delta(y)\delta(t) \tag{9.1.70}$$

这已经是一个二维问题的方程，把它与方程（9.1.60）比较，可得到（9.1.70）齐次形式的一个特解

$$g(x,y,k_z,t) = \frac{A}{\sqrt{\rho^2 - v^2t^2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{4v^2\tau^2}-k_z^2}(\rho^2-v^2t^2)} \tag{9.1.71}$$

再把 $g(x,y,k_z,t)$ 变回到三维空间，便得

$$\begin{aligned}\tilde{g}(x,y,z,t) &= \frac{A}{2\pi\sqrt{\rho^2 - v^2t^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z+\mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{4v^2\tau^2}-k_z^2}(\rho^2-v^2t^2)}\mathrm{d}k_z \\ &= \frac{A}{2\pi\mathrm{i}vt}\frac{\partial}{\partial vt}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z+\mathrm{i}\sqrt{\left(\frac{1}{4v^2\tau^2}-k_z^2\right)(\rho^2-v^2t^2)}}}{\sqrt{\frac{1}{4v^2\tau^2}-k_z{}^2}}\mathrm{d}k_z\end{aligned} \tag{9.1.72}$$

为了理解该式中被积函数的意义，我们回到式（9.1.22）的求解问题，其解的一种形式是（9.1.25）。另一方面，作为频域电磁场理论，还经常使用方程（9.1.22）的另一种特解形式，即

$$g(\rho,\omega) = \frac{1}{4\mathrm{i}}H_0^{(2)}(k\rho)$$

根据方程解的唯一性，这两种解必须相等。由此可得到一个恒等式

$$H_0^{(2)}(k\rho) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x-\mathrm{i}(k^2-k_x^2)^{1/2}|y|}}{(k^2-k_x^2)^{1/2}}\mathrm{d}k_x \tag{9.1.73}$$

把该等式用于式（9.1.72）即可得到

$$\tilde{g}(x,y,z,t) = -\frac{A}{2\mathrm{i}vt}\frac{\partial}{\partial vt}H_0^{(2)}\left(\frac{1}{2v\tau}\sqrt{r^2 - v^2t^2}\right) \tag{9.1.74}$$

由微分方程理论可知，方程（9.1.68）的齐次形式的解应该由两个线性独立解的线性组合而成，而上面求解过程显示，式（9.1.74）仅是方程（9.1.68）的齐次解之一。由柱函数的性质可以判断，另一个线性独立的齐次解可由将式（9.1.74）中的汉克尔函数换成贝塞尔函数而得到。在这种考虑下，方程（9.1.68）的通解可取如下的形式

$$\tilde{g}(x,y,z,t) = \frac{1}{vt}\frac{\partial}{\partial vt}\left[CH_0^{(2)}\left(\frac{1}{2v\tau}\sqrt{r^2 - v^2t^2}\right) + DJ_0\left(\frac{1}{2v\tau}\sqrt{r^2 - v^2t^2}\right)\right] \tag{9.1.75}$$

和二维情况一样，由于式（9.1.68）是时域方程，其解应该为实数，故式（9.1.75）的实部和虚部都应该是方程（9.1.68）的解。取式（9.1.75）的虚部，并考虑因果关系要求在 $vt < r$ 时为零，即可知其中 $C = 0$，D 为纯实数。于是，方程（9.1.68）的实数解可表示为

$$\tilde{g}(x,y,z,t) = \frac{1}{vt}\frac{\partial}{\partial vt}\begin{cases}0, & vt < r,\\ DI_0\left(\frac{1}{2v\tau}\sqrt{v^2t^2 - r^2}\right), & vt > r\end{cases} \tag{9.1.76}$$

其中，I_0 为变型贝塞尔函数，上式又可以写成

$$\tilde{g}(x,y,z,t) = \frac{D}{vt}\frac{\partial}{\partial vt}u(vt - r)I_0\left(\frac{1}{2v\tau}\sqrt{v^2t^2 - r^2}\right) \tag{9.1.77}$$

为了确定待定系数 D，可将上式代入方程（9.1.68）比较两边的奇异性而得到 $D = \frac{v}{4\pi}$。这样，最后得到有耗媒质中的三维时域格林函数为

$$g(x,y,z,t) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{2\tau}}}{4\pi t}\frac{\partial}{\partial vt}u(vt - r)I_0\left(\frac{1}{2v\tau}\sqrt{v^2t^2 - r^2}\right) \tag{9.1.78}$$

9.1.6　半空间上方无限长平行线源的瞬态响应[34,67]

考虑由无穷大平面分开的两个均匀无耗各向同性媒质空间，分别用 ε_1，μ_1 和 ε_2，μ_2 表示各自媒质的特性，坐标选择如图 9－3 所示。z 轴与区域分界面平行，一无限长线电流源沿 z 轴放置，强度为 $I(t)$，随时间变化规律不限。这样的源在这样的条件下所产生的电场只有 z 方向分量，用 E_z 表示，这样的电磁场对 y 轴而言为 TE 模。现在求解该线源所产生的电磁场在区域 1 中的响应。区域 1 中的电场用 E_{1z} 表示，当不存在分界面且只有 ε_1，μ_1 媒质时源所产生的电场就是区域 1 中的入射电场，用 E_{1z}^i 表示。源电流密度为

$$\vec{J}_s = \hat{z}I(t)\delta(x)\delta(y)$$

根据以前所做的分析，E_{1z}^i 所满足的算子方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \varepsilon_1\mu_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E_{1z}^i(x,y,t) = \mu\frac{\partial I(t)}{\partial t}\delta(x)\delta(y) \tag{9.1.79}$$

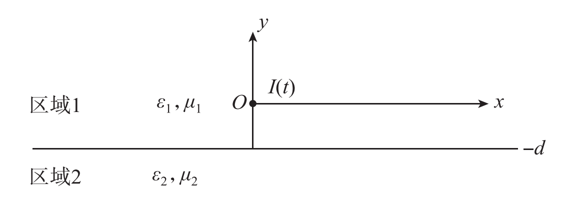


图 9－3　半空间上方的线源

在频域它所对应的方程便是

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_1^2\right)E_{1z}^i(x,y,\omega)=i\omega\mu_1 I(\omega)\delta(x)\delta(y) \tag{9.1.80}$$

其中，$k_1^2=\omega^2\varepsilon_1\mu_1$。把方程（9.1.80）与（9.1.22）比较可知，两式的差别仅在于电流的强度上，故方程（9.1.80）的解可表示成（9.1.25）的形式

$$E_{1z}^i(x,y,\omega)=\frac{\omega\mu_1 I(\omega)}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik_x x-ik_1|y|}}{k_{1y}}dk_x \tag{9.1.81}$$

其中，$k_{1y}=(k_1^2-k_x^2)^{1/2}$。

上式表明，在频域入射场 E_{1z}^i 已表示成平面波的叠加，故在求反射场时可利用平面波的反射规律。若在区域 1 中的反射电场用 $E_{1z}^R(x,y,\omega)$ 表示，则利用式（9.1.81）我们有

$$E_{1z}^R(x,y,\omega)=\frac{\omega\mu_1 I(\omega)}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R_{12}^{TE}e^{ik_x x-ik_y(y+2d)}}{k_{1y}}dk_x \tag{9.1.82}$$

其 R_{12}^{TE} 表示 TE 波由区域 1 入射到区域 2 的电场反射系数。在文献［34］中已给出

$$R_{12}^{TE}=\frac{\mu_2 k_{1y}-\mu_1 k_{2y}}{\mu_2 k_{1y}+\mu_1 k_{2y}}$$

其 $k_{iy}=(k_i^2-k_x^2)^{1/2}$，$k_i=\omega\sqrt{\varepsilon_i\mu_i}$，$i=1$，2。

为了求得 E_{1z}^R，我们仍采用卡尼亚－德·霍普方法，为此令

$$k_x=\omega s_x,\quad k_i=\omega s_i\quad (i=1,2)$$

从而有

$$s_i=\sqrt{\varepsilon_i\mu_i}=1/v_i,\quad S_{iy}=(s_i^2-s_x^z)^{1/2}$$

而式（9.1.82）变为

$$E_{1z}^R(x,y,\omega)=\frac{\omega\mu_1 I(\omega)}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}-\frac{R_{12}^{TE}}{s_{1y}}e^{-i\omega(-s_x x+s_{1y}(y+2d))}ds_x \tag{9.1.83}$$

且其中的 R_{12}^{TE} 具有形式

$$R_{12}^{TE}=\frac{\mu_2 s_{1y}-\mu_1 s_{2y}}{\mu_2 s_{1y}+\mu_1 s_{2y}}$$

它已是个与频率无关的量。和无界空间问题不同的是，式（9.1.83）的被积函数存在以下支点

$$s_x=\pm s_1,\quad s_x=\pm s_2$$

这使问题变得更复杂。和以前的做法类似，也作变换

$$t = -s_x x + s_{1y}(y + 2d) \tag{9.1.84}$$

从中解出 s_x 即有

$$s_x = -\frac{t}{\rho_I}\cos\phi_I \pm \mathrm{i}\left(\frac{t^2}{\rho_I^2} - s_1^2\right)^{1/2}\sin\phi_I \tag{9.1.85}$$

其中，$\rho_I = [x^2 + (y+2d)^2]^{1/2}$ 为源的镜像点到观察点的距离，而 $x = \rho_1\cos\phi_1$。比较式（9.1.85）与（9.1.29）可以断言，在 s_x 平面上式（9.1.85）代表双曲线，如图 9－4 所示。

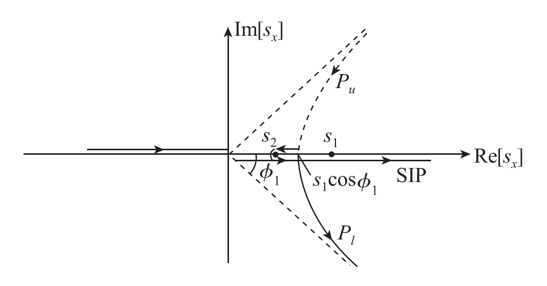


图 9－4　复 s_x 平面上的积分路径

若 $s_2 < s_1$ 且 $s_2 < s_1\cos\phi_I$，则积分路径由 SIP 变到双曲线的过程中将跨过支点 s_2，从而产生与无界空间中不同的结果，这时的路径 P_l 和 P_u 不能只从 $s_1\cos\phi_I$ 开始，而是要从 s_2 开始。s_2 点所对应的 t 为

$$t = -s_2 x + \sqrt{s_1^2 - s_2^2}(y + 2d) = \tau \tag{9.1.86}$$

如此可得到与式（9.1.32）类似的结果

$$E_{1z}^R(x,y,\omega) = -\frac{\omega\mu_1 I(\omega)}{4\pi}\int_\tau^\infty\left[\left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{R_{12}^{\mathrm{TE}}}{s_{1y}}\right)_l - \left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{R_{12}^{\mathrm{TE}}}{s_{1y}}\right)_u\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{9.1.87}$$

与式（9.1.34）类似，现在我们也可以得到

$$\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t} = \pm i\frac{s_{1y}}{(t^2 - s_1^2\rho_I^2)^{1/2}} \tag{9.1.88}$$

由此可以看出，当 $t < s_1\rho_I$ 或 $s_x < s_1\cos\phi_I$ 时，$\frac{1}{s_{1y}}\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}$ 应为纯实数。在这一段上 $s_x < s_1$，s_{1y} 也取实值。对 s_{2y} 而言，$(s_{2y})_u$ 与 $(s_{2y})_l$ 是在两个不同的黎曼（Riemann）面上，但它们是纯虚数并互为反号，故 R_{12}^{TE} 在 s_x 的实轴的上下沿互为共轭。因此，我们有

$$\left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{R_{12}^{\mathrm{TE}}}{s_{1y}}\right)_l - \left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{R_{12}^{\mathrm{TE}}}{s_{1y}}\right)_u = \frac{2\mathrm{i}}{(s_1^2\rho_I^2 - t^2)^{1/2}}\mathrm{Im}[R_{12}^{\mathrm{TE}}]_l,\quad t < s_1\rho_I \tag{9.1.89}$$

但当 $t > s_1\rho_I$ 时，$\frac{1}{s_{1y}}\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}$ 却为纯虚数。此外，因 $(s_{1y})_u = (s_{1y})_l$，我们有 $s_2^2 < s_x$，故 s_{2y} 为虚数，仍保持 R_{1z}^{TE} 在 P_u 和 P_l 上互为共轭，因此

$$\left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{R_{12}^{\mathrm{TE}}}{s_{1y}}\right)_l - \left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{R_{12}^{\mathrm{TE}}}{s_{1y}}\right)_u = \frac{-2\mathrm{i}}{(t^2 - s_1^2\rho_I^2)^{1/2}}\mathrm{Re}[R_{12}^{\mathrm{TE}}]_l, \quad t > s_1\rho_I \tag{9.1.90}$$

由于 s_x 通过式（9.1.85）与 t 相关联，R_{12}^{TE} 已是 t 的函数，若令

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\mu_1}{2\pi}\frac{\mathrm{I_m}[R_{12}^{\mathrm{TE}}]_l}{(s_1^2\rho_I^2 - t^2)^{1/2}}[u(t-\tau) - u(t - s_1\rho_I)] \\ &\quad + \frac{\mu_1}{2\pi}\frac{\mathrm{Re}[R_{12}^{\mathrm{TE}}]_l}{(t^2 - s_1^2\rho_I^2)^{1/2}}u(t - s_1\rho_I) \end{aligned} \tag{9.1.91}$$

则式（9.1.87）可以表示成

$$\begin{aligned} E_{1z}^R(x,y,\omega) &= \mathrm{i}\omega I(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{i}\omega I(\omega) f(\omega) \end{aligned} \tag{9.1.92}$$

根据傅里叶变换的性质，由此即可得到

$$E_{1z}^R(x,y,t) = -\frac{\partial}{\partial t}I(t) * f(t) \tag{9.1.93}$$

由式（9.1.91）可以看出，区域 1 的反射波由两部分组成，其第一部分称为横波或首波，第二部分称为直接反射波。该解是在 $s_2 < s_1$ 的条件下获得的。如果该条件不满足，则首波不会出现，这是由于 $s_2 < s_1$ 使得波在区域 2 中比在区域 1 中传播得要快，从而使得沿交界面折射路径传播的首波比直接反射波更早到达观察点。分析式（9.1.91）的第一项可知，它只在 $t < s_1\rho_I$ 的情况下才存在，而当 $t > s_1\rho_I$ 时只有代表直接反射波的第二项存在。

9.1.7　半空间上方竖直电偶极子的瞬态响应[34,67]

式（3.3.8）给出了电流源 $\vec{J}(\vec{r})$ 在无界均匀各向同性媒质空间中所产生的电场 $\vec{E}(\vec{r},\omega)$ 为

$$\vec{E}(\vec{r},\omega) = -\mathrm{i}\omega\mu\int_V \overline{\overline{G}}(\vec{r},\vec{r}') \cdot \vec{J}(\vec{r}')\mathrm{d}V'$$

其中

$$\overline{\overline{G}}(\vec{r},\vec{r}') = \left[\overline{\overline{I}} + \frac{\nabla\nabla}{k^2}\right]G(\vec{r},\vec{r}')$$

而 $G(\vec{r},\vec{r}')$ 已由式（3.2.34）给出。

现在我们考虑一个取向为 $\hat{z}$ 的电偶极子 $\vec{J} = \hat{z}I(\omega)l\delta(\vec{r})$，则它所产生的电场可表示为

$$\vec{E}(\vec{r},\omega) = -\mathrm{i}\omega\mu\left(\overline{\overline{I}} + \frac{\nabla\nabla}{k^2}\right)\cdot\hat{z}I(\omega)l\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{4\pi r} \tag{9.1.94}$$

利用麦克斯韦方程 $\nabla\times\vec{E}(\vec{r},\omega) = -\mathrm{i}\omega\mu\vec{H}(\vec{r},\omega)$ 我们可以由上式求得该偶极子在无界空间所产生的磁场

$$\vec{H}(\vec{r},\omega) = \nabla\times\hat{z}I(\omega)l\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{4\pi r}$$

由此可以看出 $H_z(\vec{r},\omega)=0$，所以指向 z 方向的电偶极子产生的电磁场对 z 而言是横磁型。

式（9.1.94）在直角坐标系中成为

$$\vec{E}(\vec{r},\omega)=-\mathrm{i}\omega\mu\left[\hat{z}+\frac{1}{k^2}\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}+\hat{y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z^2}\right)\right]I(\omega)l\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{4\pi r}$$

由此得知 E_z 分量为

$$E_z(\vec{r},\omega)=-\frac{i\omega\mu I(\omega)l}{4\pi k^2}\left(k^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r} \tag{9.1.95}$$

对于无界空间的格林函数除了式（3.2.34）外，还有谱表示式（9.1.44）。根据解的惟一性可知，这两种表达式应该相等，故我们有

$$\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r}=\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_xx+k_yy+k_z|z|)}}{k_z}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_z \tag{9.1.96}$$

此式在文献中被称为外尔（Weyl）恒等式。该式相当于把球面波展开为所有方向平面波的叠加。

外尔恒等式也可以变换为另一种形式。如果采用如下表示

$$\vec{k}_\rho=\hat{x}k_\rho\cos\alpha+\hat{y}k_\rho\sin\alpha$$

$$\vec{\rho}=\hat{x}\rho\cos\alpha+\hat{y}\rho\sin\alpha$$

则有

$$\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y=k_\rho\mathrm{d}k_\rho\mathrm{d}\alpha$$

$$k_xx+k_yy=\vec{k}_\rho\cdot\vec{\rho}=k_\rho\rho\cos(\alpha-\varphi)$$

这些关系由图 9－5 示出。

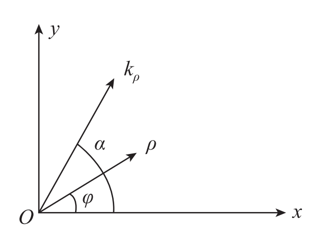


图 9－5　$x-y$ 平面上的矢量 $\vec{k}_\rho$ 和 $\vec{\rho}$

其中，$k_\rho=(k_x^2+k_y^2)^{1/2}$，$k_z=(k^2-k_\rho^2)^{1/2}$。把以上关系代入式（9.1.96）可得

$$\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r}=\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\frac{k_\rho}{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\rho\cos(\alpha-\varphi)+\mathrm{i}k_z|z|}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}k_\rho \tag{9.1.97}$$

再利用恒等式

$$J_0(k_\rho\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_\rho\cos(\alpha-\varphi)}\mathrm{d}\alpha$$

我们又可得到

$$\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr}}{r} = \mathrm{i}\int_0^{\infty} \frac{k_\rho}{k_z} J_0(k_\rho \rho)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_z|z|}\,\mathrm{d}k_\rho \tag{9.1.98}$$

该式称为索末菲恒等式。利用这一关系就可把式（9.1.95）改写成

$$E_z(\vec{r},\omega) = \frac{I(\omega)l}{4\pi\omega\varepsilon}\int_0^{\infty} \frac{k_\rho^3}{k_z} J_0(k_\rho \rho)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_z|z|}\,\mathrm{d}k_\rho \tag{9.1.99}$$

由于磁场的横向分量 $\vec{H}_t(\vec{r},\omega)$ 可以表示为

$$\vec{H}_t(\vec{r},\omega) = -\frac{i\omega\varepsilon}{k_\rho^2}\hat{z} \times \nabla_t E_z(\vec{r},\omega)$$

$\vec{H}_t$是全部磁场，在柱坐标中为 H_φ，于是有

$$H_\varphi(\vec{r},\omega) = \frac{\mathrm{i}I(\omega)l}{4\pi}\int_0^{\infty} \frac{k_\rho^2}{k_z} J_1(k_\rho \rho)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_z|z|}\,\mathrm{d}k_\rho \tag{9.1.100}$$

该式又可表示为

$$H_\varphi(\vec{r},\omega) = -\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\mathrm{i}I(\omega)l}{4\pi}\int_0^{\infty} \frac{k_\rho}{k_z} J_0(k_\rho \rho)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_z|z|}\,\mathrm{d}k_\rho \tag{9.1.101}$$

现在考虑类似于图 9－4 所示的问题，但把 y 轴换成 z 轴，且在 $x = y = 0$ 处放置取向 z 的电偶极子 $\vec{J} = \hat{z}I(t)l$。根据上面的讨论可知，该源在区域 1 中的入射电场由式（9.1.99）所示，在其上加上由其引起的反射场后就可得到区域 1 中的总的 E_{1z}，且可表示为

$$E_{1z}(\vec{r},\omega) = \frac{I(\omega)l}{4\pi\omega\varepsilon_1}\int_0^{\infty} \frac{k_\rho^3}{k_{1z}} J_0(k_\rho \rho)\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z|z|} + R_{12}^{\mathrm{TM}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z}(z+2d)}\right]\mathrm{d}k_\rho \tag{9.1.102}$$

其中

$$R_{1z}^{\mathrm{TM}} = \frac{\varepsilon_2 k_{1z} - \varepsilon_1 k_{2z}}{\varepsilon_2 k_{1z} + \varepsilon_1 k_{2z}}$$

对磁场而言，在区域 1 中的入射场由式（9.1.101）所示，加上反射场后区域 1 中的总磁场应为

$$H_{1\varphi}(\vec{r},\omega) = -\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{\mathrm{i}I(\omega)l}{4\pi}\int_0^{\infty} \frac{k_\rho}{k_{1z}} J_0(k_\rho \rho)\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z}|z|} + R_{12}^{\mathrm{TM}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z}(z+2\mathrm{d})}\right]\mathrm{d}k_\rho \tag{9.1.103}$$

由于有电场和磁场之间的联系，我们只需求出 $H_{1\varphi}$（$\vec{r}$，ω），为此主要需求得式（9.1.103）中的积分。我们令

$$P(\omega) = \frac{\mathrm{i}I(\omega)l}{4\pi}\int_0^{\infty} \frac{k_\rho}{k_{1z}} J_0(k_\rho \rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z}|z|}\left[1 + R_{12}^{\mathrm{TM}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z}2d}\right]\mathrm{d}k_\rho \tag{9.1.104}$$

为应用卡尼亚－德·霍普方法解决这一问题，我们应用外尔恒等式再把上式变回到直角坐标系中的表示

$$P(\omega) = \frac{\mathrm{i}I(\omega)l}{8\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x x + \mathrm{i}k_y y}}{k_{1z}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z}|z|} + R_{12}^{\mathrm{TM}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_{1z}(z+2d)}\right]\mathrm{d}k_x\,\mathrm{d}k_y \tag{9.1.105}$$

若把上式的第一项积分记做 $P_D(\omega)$ 并与式（9.1.45）相比较，再考虑式

(9.1.57)，我们有

$$P_D(t) = \frac{l}{4\pi r} I(t)\delta(t - r/v_1) = \frac{I(t - r/v_1)l}{4\pi r} \tag{9.1.106}$$

其中，$v_1 = 1/\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$。

若用 $P_R(\omega)$ 表示式（9.1.105）的第二项积分，并进行坐标变换

$$k_x = \beta_x\cos\varphi - \beta_y\sin\varphi$$
$$k_y = \beta_x\sin\varphi + \beta_y\cos\varphi$$

就能得到

$$P_R(\omega) = \frac{\mathrm{i}I(\omega)l}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_x\rho}}{k_{1z}} R_{12}^{\mathrm{TM}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_z(z+2d)} \mathrm{d}\beta_x \mathrm{d}\beta_y \tag{9.1.107}$$

其中

$$R_{12}^{\mathrm{TM}} = \frac{\varepsilon_2\beta_{1z} - \varepsilon_1\beta_{2z}}{\varepsilon_2\beta_{1z} + \varepsilon_1\beta_{2z}}$$

$$\beta_{iz} = (k_i^z - \beta_x^2 - \beta_y^2)^{1/2}, i = 1,2$$

再令 $\beta_x = \omega s_x, \beta_y = \omega s_y$，就又得到

$$P_R(\omega) = \frac{\mathrm{i}\omega I(\omega)l}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega[-s_x\rho - s_{1z}(z+2d)]}}{s_{1z}} R_{12}^{\mathrm{TM}} \mathrm{d}s_x \mathrm{d}s_y \tag{9.1.108}$$

此时 $s_{iz} = (s_i^2 - s_x^2 - s_y^2)^{1/2}, s_i = (\varepsilon_i\mu_i)^{1/2}, i = 1,2$，而

$$R_{12}^{\mathrm{TM}} = \frac{\varepsilon_2 s_{1z} - \varepsilon_1 s_{2z}}{\varepsilon_2 s_{1z} + \varepsilon_1 s_{2z}}$$

和对式（9.1.48）的处理一样，先把对 s_y 的积分变换到虚轴，然后再令 $s_y = -\mathrm{i}q$ 就得到

$$P_R(\omega) = \frac{\mathrm{i}\omega I(\omega)l}{8\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{R_{12}^{\mathrm{TM}}}{s_{1z}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega[-s_x\rho - s_{1z}(z+2d)]} \mathrm{d}s_x \mathrm{d}q \tag{9.1.109}$$

其中，$s_{1z} = (s_1^2 + q^2 - s_x^2)^{1/2}$。再作类似的变换

$$t = -s_x\rho - s_{1z}(z + 2d)$$

则有

$$s_x = -\frac{t}{r_I}\sin\theta_I \pm \mathrm{i}\left(\frac{t^2}{r_I^2} - s_1^2 - q^2\right)^{1/2}\cos\theta_I$$

其中，$r_I = [\rho^2 + (z + 2d)^2]^{1/2}$，$\sin\theta_I = \rho/r_I$，$\cos\theta_I = (z + 2d)/r_I$。

由式（9.1.109）可以看出，被积函数有以下支点

$$s_x = \pm(s_1^2 + q^2)^{1/2} = \pm\alpha_1, \quad s_x = \pm(s_2^2 + q^2)^{1/2} = \pm\alpha_2$$

如果 $s_2 < s_1$，则和以前一样，当把积分路径 SIP 变到双曲线 P 时，也要跨过支点 α_2，如图 9－6 所示。

当 $s_x = s_2$ 时，$t = s_2\rho + \sqrt{s_1^2 + q^2 - s_2^2}(z + 2d) = \tau$，则在上述变换下式（9.1.109）成为

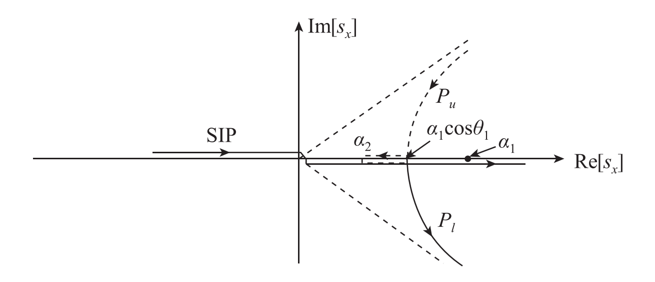


图 9－6　复 s_x 平面上的积分路径

$$P_R(\omega)=\frac{\omega I(\omega)l}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\tau}^{\infty}\left[\left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{R_{12}^{\mathrm{TM}}}{s_{1z}}\right)_l-\left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{R_{12}^{\mathrm{TM}}}{s_{1z}}\right)_u\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\mathrm{d}q \quad (9.1.110)$$

根据和以前对类似问题的分析可知

$$(s_x)_u=(s_x)_l^*,\quad (s_{1z})_u=(s_{1z})_l^*$$

又因总有 $s_2^2+q^2=\alpha_2^2<s_x^2$，$s_{2z}$总为虚数，于是 $(s_{2z})_u=(s_{2z})_l^*$，其结果是

$$\left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{R_{12}^{\mathrm{TM}}}{s_{1z}}\right)_u=\left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{R_{12}^{\mathrm{TM}}}{s_{1z}}\right)_l^*$$

这样，式（9.1.110）就可写做

$$P_R(\omega)=\frac{-\mathrm{i}I(\omega)\omega l}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\tau}^{\infty}\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{R_{12}^{\mathrm{TM}}}{s_{1z}}\right)_l\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\mathrm{d}q \quad (9.1.111)$$

为了交换上式的积分顺序，先找出 t 与 q 之间的关系。由 s_x 的起点为 α_2 可知，t 与 q 的关系为

$$t=(s_2^2+q^2)^{1/2}\rho+(s_1^2-s_2^2)^{1/2}(z+2d)$$

令 $b=(s_1^2-s_2^2)^{1/2}(z+2d)$，则由上式可解得

$$q=\pm\frac{1}{\rho}[(t-b)^2-s_2^2\rho^2]^{1/2} \quad (9.1.112)$$

该式表示一条对 t 轴对称的曲线，$q=0$ 时 t 值最小，故 t 取值 $s_2\rho+b$ 时为对 t 积分的下限，若令

$$t_0=s_2\rho+b,\quad q_0(t)=\frac{1}{\rho}[(t-b)^2-s_2^2\rho^2]^{1/2}$$

则积分式（9.1.111）可表示成

$$P_R(\omega)=-\frac{\mathrm{i}\omega I(\omega)l}{4\pi^2}\int_{t_0}^{\infty}\int_{-q_0(t)}^{q_0(x)}\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{R_{12}^{\mathrm{TM}}}{s_{1z}}\right)_l\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}q\mathrm{d}t \quad (9.1.113)$$

再令

$$f(t)=\frac{l}{4\pi^2}\int_{-q_0(t)}^{q_0(t)}\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}s_x}{\mathrm{d}t}\frac{R_{12}^{\mathrm{TM}}}{s_{1z}}\right)_l u(t-t_o)\mathrm{d}q \quad (9.1.114)$$

则有

$$\begin{aligned}P_R(\omega)&=-\mathrm{i}\omega I(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\\&=-\mathrm{i}\omega I(\omega)f(\omega)\end{aligned} \quad (9.1.115)$$

对上式求傅里叶逆变换即成为

$$P_R(t) = \frac{\partial}{\partial t} I(t) * f(t) \tag{9.1.116}$$

最后，综合 $P_D(t)$ 和 $P_R(t)$ 两部分就可得到所求之解 $H_\phi(\vec{r},t)$ 。

9.2　色散媒质中瞬变电磁场传播的索末菲理论[4,24]

色散媒质的介电常数或其磁导率与频率有关，因此在其中传播的电磁波的速度随频率变化，使得非时谐电磁波的波形在传播过程中发生畸变，出现复杂的传播过程。也正因为这样，使得在时域求解适用于色散媒质的麦克斯韦方程变得更加困难。人类对这一问题的认识经历了一个不断深入的过程，尤其是对电磁波在色散媒质中的传播速度（如群速或能速）是否能超过真空中的光速 c 至今还存在争议。在 20 世纪早期，索末菲和布里渊（Brillouin）就相继对这个问题进行了比较严格的理论研究，至今还没有人对他们的理论提出过修正或补充。因此，他们的工作在当代仍有重要意义。下面主要讨论他们的研究成果。

9.2.1　问题的描述和表示方法

在频域电磁理论中已有关于电磁波传播的相速和群速的概念，但它们都是针对稳态波动过程定义的，它们与能携带信息的信号的传播速度并无直接联系。稳态波动过程不能传递信息，必须研究电磁场的瞬变过程才能获得这方面的知识。研究电磁信号传播过程的最好的办法是，考虑原来根本不存在电磁波的媒质中突然接入电磁波，从其后电磁波的变化过程的研究中可获得所需要的知识。

索末菲所研究的问题是，在时间 $t=0$ 时在色散介质表面突然出现一个按正弦规律变化的平面电磁波，讨论在距离接入表面一定深度电磁波建立的瞬变过程。这种突然被接入的电磁波是一种电磁信号，它包含有一定宽度的频谱，其传播特性对研究瞬变电磁现象有一定的代表性。

根据上面对问题的描述，可把信号 f 表示为

$$f(z=0,t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \sin\omega t, & t>0 \end{cases} \tag{9.2.1}$$

其中，$z=0$ 代表一空间无限大平面，$z>0$ 的空间介质特性为已知。

式（9.2.1）所表示的函数不满足傅里叶变换的条件，但却存在拉普拉斯（Laplace）变换。由于 $f(0,t)$ 在 $t<0$ 时为零，故其拉氏变换成为

$$F(0,p) = \int_0^\infty f(0,t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \tag{9.2.2}$$

其中，$p=\alpha+i\omega$ ，这相当于在复频域上进行变换。

我们用 $f(z,t)$ 表示在媒质内部 z 处的电磁波，它的拉氏变换记作

$$F(z,p) = \int_0^\infty f(z,t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \tag{9.2.3}$$

在实频域中对任一频率为 ω 的谐波在不同位置上有如下关系

$$f(z,\omega) = f(0,\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(\omega)z} \tag{9.2.4}$$

应用于复频域相应的关系就是

$$F(z,p) = F(0,p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(p)z} \tag{9.2.5}$$

在实频域中 $k(\omega) = \frac{\omega}{c}n(\omega)$，其中 n 为折射率。在复频域中则成为 $k(p) = -\frac{\mathrm{i}p}{c}n(p)$，所以又有

$$F(z,p) = F(0,p)\mathrm{e}^{-\frac{p}{c}n(p)z} \tag{9.2.6}$$

求其逆变换即可得

$$\begin{aligned} f(z,t) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty} F(0,p)\mathrm{e}^{-\frac{p}{c}n(p)z}e^{pt}\mathrm{d}p \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty} F(0,p)e^{p[t-\frac{z}{c}n(p)]}\mathrm{d}p \end{aligned} \tag{9.2.7}$$

其中，γ 为常量。令

$$g(0,t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{\mathrm{i}\omega_0 t}, & t > 0 \end{cases} \tag{9.2.8}$$

则

$$f(0,t) = \mathrm{Im}[g(0,t)] \tag{9.2.9}$$

由于

$$G(0,p) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \frac{1}{p - \mathrm{i}\omega_0}$$

若令

$$g(z,t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty} \frac{1}{p - \mathrm{i}\omega_0}\mathrm{e}^{p[t-\frac{z}{c}n(p)]}\mathrm{d}p \tag{9.2.10}$$

则有

$$f(z,t) = \mathrm{Im}[g(z,t)] \tag{9.2.11}$$

这样，问题就归结为如何求得 $g(z,t)$，也就是根据实际媒质特性求得积分(9.2.10)。

为了进一步求解，需要有关介质特性参数与频率的关系。要求得介电常数与频率的关系，需要考虑电磁波与介质中带电粒子的相互作用。完整的色散理论需要考虑物质的分子结构，将分子看成服从量子力学规律的动力学系统。然而，经典色散理论也能给出很有意义的结果。

经典理论把介质中的带电粒子视做一个简谐振子，其动力学方程可表示为

$$m\frac{\mathrm{d}^2 r(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2m\rho\frac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t} + kr(t) = -qE(t) \tag{9.2.12}$$

其中，m 为电子的有效质量；r 为位移；ρ 为衰减因子；k 则为恢复系数；$E(t)$ 为作用在其上的电磁波的电场。式（9.2.12）的频域形式为

$$\omega^2 r(\omega) - \mathrm{i}2\omega\rho r(\omega) - \omega_r^2\gamma(\omega) = qE(\omega) \tag{9.2.13}$$

其中，$\omega_r = (k/m)^{1/2}$，为振子的固有频率。由此立刻可以求出

$$r(\omega) = \frac{-\frac{q}{m}E(\omega)}{\omega_r^2 + \mathrm{i}2\omega\rho - \omega^2}$$

进而可求得极化强度

$$P = -Nqr(\omega) = \frac{\frac{Nq^2}{m}E(\omega)}{\omega_r^2 + \mathrm{i}2\omega\rho - \omega^2} = \chi_e(\omega)E(\omega)$$

由此即可得知相对介电常数应为

$$\varepsilon_{\mathrm{r}}(\omega) = 1 + \chi_e(\omega) = 1 + \frac{a^2}{\omega_r^2 + \mathrm{i}2\omega\rho - \omega^2} \tag{9.2.14}$$

其中，$a^2 = Nq^2/m\varepsilon_0$，从而我们有

$$n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}(\omega)} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{\omega_r^2 + \mathrm{i}2\omega\rho - \omega^2}} \tag{9.2.15}$$

在复频域中则有

$$n(p) = \sqrt{1 + \frac{a^2}{\omega_r^2 + 2\rho p + p^2}} = \sqrt{\frac{p^2 + 2\rho p + \omega_r^2 + a^2}{p^2 + 2\rho p + \omega_r^2}} \tag{9.2.16}$$

若令

$$H(p) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{p - \mathrm{i}\omega_0}\mathrm{e}^{p\left[t - \frac{z}{c}n(p)\right]} \tag{9.2.17}$$

其中，$n(p)$ 为式（9.2.16）所示，则（9.2.10）可记作

$$g(z,t) = \int_{\gamma-\mathrm{i}\infty}^{\gamma+\mathrm{i}\infty} H(p)\,\mathrm{d}p \tag{9.2.18}$$

下面的任务就是如何求得 $g(z,t)$。

9.2.2　瞬变电磁场在色散介质中传播的基本特性

为了解决式（9.2.18）的积分问题，先要分析清楚其被积函数（9.2.17）的性质。由式（9.2.16）所给出的 $n(p)$ 的表达式可以看出，$H(p)$ 是个多值函数，因此存在支点，而且还有极点。显然，在 $p = i\omega_0$ 是 $H(p)$ 的极点，而其支点则分为两组。

a 组：当 $p^2 + 2\rho p + \omega_r^2 = 0$ 时，$n(p) = \infty$，这时的 p 值为支点。支点所在位置是

$$p = -\rho \pm \mathrm{i}\sqrt{\omega_r^2 - \rho^2} = -\rho \pm \mathrm{i}\omega_a$$

其中，$\omega_a = \sqrt{\omega_r^2 - \rho^2}$。两个支点记做

$$a_1 = -\rho + \mathrm{i}\omega_a,\quad a_2 = -\rho - \mathrm{i}\omega_a \tag{9.2.19}$$

b 组：当 $p^2 + 2\rho p + \omega_r^2 + a^2 = 0$ 时，$n(p) = 0$，这时的 P 值为另外两个支点，这两个支点所在位置是

$$p = -\rho \pm \mathrm{i}\sqrt{\omega_r^2 + a^2 - \rho^2} = -\rho \pm \mathrm{i}\omega_b$$

其中，$\omega_b = \sqrt{\omega_r^2 + a^2 - \rho^2}$。这两个支点分别记做

$$b_1 = -\rho + \mathrm{i}\omega_b,\quad b_2 = -\rho - \mathrm{i}\omega_b \tag{9.2.20}$$

在图 9－7 中给出了以上支点和极点所在位置。由于在 p 平面的右半平面没有被积函数的奇点，故式（9.2.18）的积分路径可选为在右半平面内与虚轴平行

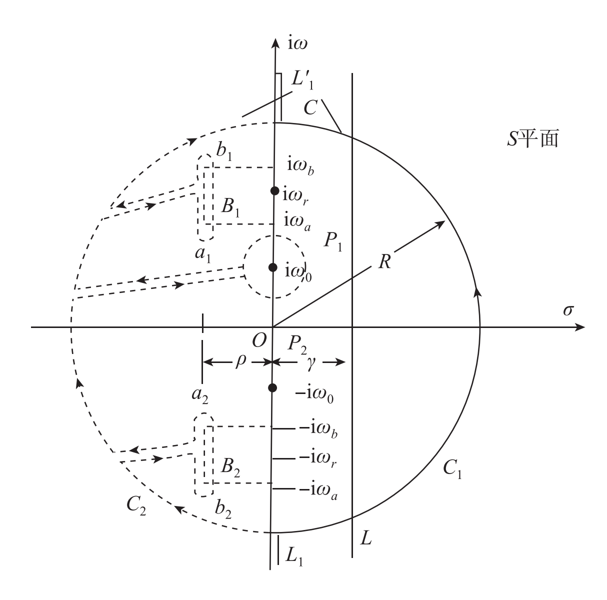


图 9－7　$H(p)$ 的奇点分布和积分路径的选择

的一条直线 L。由图可以看出，当 $L \to \infty$ 时，L 和 C_1 构成闭合回路。由柯西定理可知，可把积分路径 L 换成 $R \to \infty$ 时的 C_1，于是便有

$$g(z,t) = \int_{C_1} H(p)\,\mathrm{d}p \tag{9.2.21}$$

下面分几种情况对这一积分进行讨论。

(1) $t < \dfrac{z}{c}$，即 $\tau = t - \dfrac{z}{c} < 0$。

由于在 C_1 上 $p \to \infty$ 且 $\mathrm{Re}(p) > 0$，这时 $n(\infty) = 1$，故在 C_1 上有

$$H(p) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\frac{1}{p - \mathrm{i}\omega_0}\mathrm{e}^{pt} \to 0$$

由此可知

$$g(z,t) = \int_{C_1} H(p)\,\mathrm{d}p = 0,\quad t < \frac{z}{c} \tag{9.2.22}$$

对实信号 $f(z,t)$ 当然也有

$$f(z,t) = \mathrm{Im}[g(z,t)] = 0,\quad t < \frac{z}{c} \tag{9.2.23}$$

这表明，在 $t < \dfrac{z}{c}$ 时，在距源的接入面 z 处没有任何电磁波信号出现。也就

是说，电磁信号不会以大于光速 c 的速度传播。

(2) $t > \frac{z}{c}$, 即 $\tau > 0$。

现在考察当 $R \to \infty$ 时在 p 平面左侧半圆 C_2 上 $H(p)$ 的表现。这时 $\mathrm{Re}(p) < 0$，但 $\tau > 0$，故仍有 $\mathrm{Re}(p\tau) < 0$，所以在 C_2 上仍有 $|H(p)| \to 0$，于是

$$\int_{C_2} H(p)\,\mathrm{d}p = 0, \quad t > \frac{z}{c} \tag{9.2.24}$$

如果让 C_1 表示右半平面的整个半圆，则式（9.2.22）仍然成立。再考虑式（9.2.24）的结果，可以有

$$g(z,t) = \left(\int_{C_1} - \int_{C_2}\right) H(p)\,\mathrm{d}p = \oint_C H(p)\,\mathrm{d}p, \quad t > \frac{z}{c} \tag{9.2.25}$$

其中，$C = C_1 - C_2$。显然，现在的 C 包含了被积函数的所有支点和极点。如果补充图 9－7 上所标出的绕过各支点和极点的路径，且考虑支点和极点的贡献，则由于新的闭合路径内已不包含任何奇点，则根据柯西定理我们有

$$\left(\int_{C_1} - \int_{C_2} - \oint_P - \oint_{B_1+B_2}\right) H(p)\,\mathrm{d}p = 0 \tag{9.2.26}$$

这里没有包括由 C_2 到 P，B_1 和 B_2 的往返路径，是因为在来去的两次积分中相互抵消。

考虑到（9.2.25），由式（9.2.26）便可知

$$g(z,t) = \oint_P H(p)\,\mathrm{d}p + \oint_{B_1+B_2} H(p)\,\mathrm{d}p \tag{9.2.27}$$

令

$$g_1(z,t) = \oint_P H(p)\,\mathrm{d}p, \quad g_2(z,t) = \oint_{B_1+B_2} H(p)\,\mathrm{d}p$$

它们分别代表整个电磁信号的两个分量。

$g_1(z,t)$ 表示为绕一阶极点的积分，该积分利用留数定理很容易求出，即

$$\begin{aligned}
g_1(z,t) &= \oint_P H(p)\,\mathrm{d}p = 2\pi \mathrm{i}\left[H(p)(p - i\omega_0)\right]_{p=\mathrm{i}\omega_0} \\
&= 2\pi \mathrm{i}\left\{\frac{\mathrm{e}^{p\left(t - \frac{z}{c}n(p)\right)}}{2\pi \mathrm{i}(p - i\omega_0)}(p - \mathrm{i}\omega_0)\right\}_{p=\mathrm{i}\omega_0} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\left[t - \frac{z}{c}n(\mathrm{i}\omega_0)\right]} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t - \mathrm{i}k(\mathrm{i}\omega_0)z}
\end{aligned} \tag{9.2.28}$$

由式（9.2.15）可知，$k(\mathrm{i}\omega_0)$ 为复数，设 $k(\mathrm{i}\omega_0) = \beta - \mathrm{i}\alpha$，则由（9.2.28）得

$$g_1(z,t) = \mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0 t - \beta z)} \tag{9.2.29}$$

恢复到实电磁信号则是

$$f(z,t) = \mathrm{e}^{-\alpha z}\sin(\omega_0 t - \beta z) \tag{9.2.30}$$

与入射波 $f(0, t)$ 相比，这一电磁信号的频率相同，只是其幅度已从 1 衰减为 $\mathrm{e}^{-\alpha z}$，相位移动了 βz。这是一个稳态波，于是 $g_2(z, t)$ 必包含 $f(z, t)$ 的瞬态

部分。

(3) $t = \frac{z}{c}$,即 $\tau = 0$。

由于

$$F(0,p) = \int_0^{\infty} \sin\omega_0 t \mathrm{e}^{-pt} \mathrm{d}t = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$$

则根据式(9.2.6)可知

$$F(z,p) = \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} \mathrm{e}^{-\frac{p}{c} n(p) z}$$

于是有

$$f(z,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - \mathrm{i}\infty}^{\gamma + \mathrm{i}\infty} \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} \mathrm{e}^{p\left(t - \frac{z}{c} n(p)\right)} \mathrm{d}p \tag{9.2.31}$$

和以前一样,可把上式的积分路径改为 C_1 ,在 C_1 上 $p \to \infty$,$n(\infty) = 1$,故有

$$f(z,t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{C1} \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} \mathrm{e}^{p\left(t - \frac{z}{c}\right)} \mathrm{d}p$$

$$= \int_{C1} S(p) \mathrm{d}p \tag{9.2.32}$$

其中

$$S(p) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2} \mathrm{e}^{p\left(t - \frac{z}{c}\right)} \tag{9.2.33}$$

显然,当 $t = \frac{z}{c}$ 时, $\mathrm{e}^{p\left(t - \frac{z}{c}\right)} = 1$ 。因此,在 C_1 上 $S(p)$ 以 $1/p^2$ 的速度趋于零,从而使得

$$f(z,t) = \int_{C_1} S(p) \mathrm{d}p = 0, \quad t = \frac{z}{c} \tag{9.2.34}$$

同样的道理,当 $t = \frac{z}{c}$ 时,在 C_2 上也有

$$f(z,t) = \int_{C_2} S(p) \mathrm{d}p = 0, \quad t = \frac{z}{c} \tag{9.2.35}$$

把以上两式合起来即成为

$$\int_C S(p) \mathrm{d}p = f(z,t) = 0, \quad t = \frac{z}{c} \tag{9.2.36}$$

根据图 9-7 上的路径又有

$$\left(\oint_C - \oint_p - \oint_{B_1 + B_2}\right) S(p) \mathrm{d}p = 0$$

也就是说

$$\oint_C S(p) \mathrm{d}p = \oint_p S(p) \mathrm{d}p + \oint_{B_1 + B_2} S(p) \mathrm{d}p$$

上式中右侧第一项为稳态部分$f_1(z,\ t)$，第二项则为瞬态部分$f_2(z,\ t)$。根据式（9.2.36）我们有

$$f(z,t) = f_1(z,t) + f_2(z,t) = 0, \quad t = \frac{z}{c} \tag{9.2.37}$$

这一结果表明，如果波头以光速传播，则 $t = z/c$ 正是波头到达 z 处的时刻，这时稳态部分与瞬态部分刚好相互抵消，使总的电磁信号保持零值。或者说，在任何位置电磁信号总是从零开始逐渐建立起来。

9.2.3　预现波的粗略分析

上面已预示到在 $t = \dfrac{z}{c}$ 时刻波头到达 z 处，这时包含有电磁波的复杂的瞬变过程。现在对这一过程进行粗略分析，详细分析在下一节进行。

为简单起见，我们先不考虑媒质的损耗（$\rho = 0$），主要分析当 τ 略大于零的一段时间无耗媒质中电磁波的建立过程。

由于 $\tau > 0$，故式（9.2.25）仍然成立，当采用实信号表示时，就有如下的结果。

$$f(z,t) = \frac{\omega_0}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{\mathrm{e}^{p\left[t-\frac{z}{c}n(p)\right]}}{p^2+\omega_0^2}\mathrm{d}p \tag{9.2.38}$$

为了方便简化处理，把上式中的指数改写为另一种形式，即

$$\begin{aligned} p\left[t - \frac{z}{c}n(p)\right] &= p\left[\left(\tau + \frac{z}{c}\right) - \frac{z}{c}n(p)\right] \\ &= p\left\{\tau - \frac{z}{c}[n(p) - 1]\right\} \\ &= p\left[\tau - \frac{z}{c}N(p)\right] \end{aligned} \tag{9.2.39}$$

其中，$N(p) = n(p) - 1$。由于已设 $\rho = 0$，故有

$$N(p) = \sqrt{1 + \frac{a^2}{p^2+\omega_r^2}} - 1 \tag{9.2.40}$$

因为在圆周 C 上 $p \to \infty$，故可对上式中的根式进行级数展开，其形式为

$$\sqrt{1 + \frac{a^2}{p^2+\omega_r^2}} = \left[1 + \frac{1}{2}\frac{a^2}{p^2+\omega_r^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{a^2}{p^2+\omega_r^2}\right)^2 + \cdots\right]$$

由于 ω_r^2 与 p^2 相比可以忽略，故在一阶近似的条件下 $N(P)$ 可近似为

$$N(p) \approx \frac{a^2}{2p^2} \tag{9.2.41}$$

把这一结果代回到式（9.2.39）可得

$$\begin{aligned} p\left[t - \frac{z}{c}n(p)\right] &= p\tau - \frac{pz}{c}N(p) \\ &\approx p\tau - \frac{a^2 z}{2cp} \end{aligned}$$

$$= p\tau - \frac{\xi}{p} \tag{9.2.42}$$

其中，$\xi = \dfrac{a^2 z}{2c}$。

把以上近似代回到式（9.2.38），并用 p^2 代替 $p^2 + \omega_0^2$，即有式（9.2.38）的近似表示

$$f(z,t) = \frac{\omega_0}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{\mathrm{e}^{p\tau - \frac{\xi}{p}}}{p^2} \mathrm{d}p \tag{9.2.43}$$

对上式再做进一步变换

$$p\tau - \frac{\xi}{p} = \sqrt{\tau\xi}\left(p\sqrt{\frac{\tau}{\xi}} - \frac{1}{p}\sqrt{\frac{\xi}{\tau}}\right)$$

令

$$p\sqrt{\frac{\tau}{\xi}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{9.2.44}$$

则有

$$p\tau - \frac{\xi}{p} = \sqrt{\tau\xi}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) = 2i\sqrt{\tau\xi}\sin\theta$$

在以上表示下我们还有

$$\mathrm{d}p = \sqrt{\frac{\xi}{\tau}}\,\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}p}{p^2} = \sqrt{\frac{\tau}{\xi}}\,\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$$

把以上结果代入式（9.2.43）便成为

$$f(z,t) = \frac{\omega_0}{2\pi}\sqrt{\frac{\tau}{\xi}}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\sqrt{\tau\xi}\sin\theta - \theta)}\mathrm{d}\theta \tag{9.2.45}$$

由式（9.2.44）可知

$$|p| = \sqrt{\frac{\xi}{\tau}}$$

在积分路径 C 上 $|p| \to \infty$，故式（9.2.44）的假定要求 $\tau \to 0$。也就是说，式（9.2.45）只在 τ 为很小正值的情况下才适用。

利用恒等式

$$J_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\sin\theta - \theta)}\mathrm{d}\theta$$

可把式（9.2.45）表示为

$$\begin{aligned} f(z,t) &= \omega_0\sqrt{\frac{\tau}{\xi}}J_1(2\sqrt{\tau\xi}) \\ &= \frac{\omega_0}{a}\sqrt{\frac{2c\tau}{z}}J_1\left(a\sqrt{\frac{2\tau z}{c}}\right) \end{aligned} \tag{9.2.46}$$

其中，$J_1(x)$ 为一阶贝塞尔函数。

由这一结果及前面的结论可知，在 $t=z/c$ 以前 z 处没有任何电磁响应，保持初始的零状态。只要 $\tau>0$，z 处就有电磁波出现。在 τ 很小时开始出现的电磁波由式（9.2.46）近似表示。如果把最先出现的电磁波叫做波头，则显然波头是以真空中的光速在媒质中传播。

由式（9.2.46）可知，开始出现在 z 处的电磁波幅度很小。又由贝塞尔函数的性质可推知，z 处的电磁场随时间作周期振荡性变化，在起始段其振荡周期远小于输入源的稳态周期 $2\pi/\omega_0$。由于$\sqrt{\tau}$出现在贝塞尔函数的前面和宗量之中，使得电磁振荡的幅度和周期都随着 τ 的增加而增大。所以，式（9.2.46）所表示的 z 处的电磁运动是在稳态建立之前的过渡状态，文献中称其为预现波（Forerunners 或 Precursors）。

9.3　色散媒质中瞬变电磁场传播的布里渊理论[4]

上面所介绍的索末菲理论给出了色散媒质中瞬变电磁场传播的一些关键性结论。为了更详细地了解其中所发生的瞬变过程，必须更精确更完整地求出有关积分。布里渊利用最速下降法解决了有关积分的近似求解问题，巧妙又详尽地论证了电磁信号在色散媒质中传播的详细过程。全面介绍布里渊解决问题的详细过程需要很长的篇幅，我们只能给出基本思路和主要结论。

9.3.1　最速下降法的应用

在索末菲关于瞬态电磁场在色散介质中传播的理论中已指出，解决问题的关键在于求解积分（9.2.18），该积分可以写作

$$g(z,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{p\left[t-\frac{z}{c}n(p)\right]}}{p-i\omega_0}dp \tag{9.3.1}$$

为了更详细地了解电磁信号建立的瞬态过程，需要对式（9.3.1）做比上面所做的更精细详尽的分析。布里渊用最速下降法巧妙地进行了这项工作并取得了重要成果。下面简略介绍他的工作要点。

为了用最速下降法求积分（9.3.1）的渐近解，特作如下表示

$$\begin{aligned}p\left[t-\frac{z}{c}n(p)\right]&=\frac{z}{c}p\left[\frac{ct}{z}-n(p)\right]\\&=\frac{z}{c}p[Q-n(p)]\\&=\lambda q(p)\end{aligned} \tag{9.3.2}$$

其中，$Q=\dfrac{ct}{z},\lambda=\dfrac{z}{c}$，$q(p)=p[Q-n(p)]$。再令

$$f(p)=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{p-i\omega_0}$$

则式（9.3.1）可表示为

$$g(z,t)=\int_C f(p)\mathrm{e}^{\lambda q(p)}\mathrm{d}p \tag{9.3.3}$$

其中，C 代表式（9.3.1）中的积分路径。显然，这种积分形式已适合用最速下降法求其近似解。

若 $p=p_s$ 使 $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}=0$，则可作变换

$$-S^2=q(p)-q(p_s) \tag{9.3.4}$$

把 p 平面映射到 s 平面，在这一变换下 $p=p_s$ 点映射到 $s=0$ 点。把 p 平面上的路径 C 映射到 s 平面的 C'，且有

$$\mathrm{e}^{\lambda q(p)}=\mathrm{e}^{-\lambda s^2+\lambda q(p_s)} \tag{9.3.5}$$

设 $q(p)=U(p)+\mathrm{i}V(p)$，则

$$\mathrm{e}^{\lambda q(p)}=\mathrm{e}^{-\lambda s^2+\lambda U(p_s)+\mathrm{i}\lambda V(p_s)} \tag{9.3.6}$$

由于 λ 为正数，则由上式可以看出，在 s 平面的实轴上当 $s=0$ 时 $\mathrm{e}^{\lambda q(p)}$ 取最大值。如果 s 平面的实轴对应 p 平面上的路径 P，则在路径 P 上 $p=p_s$ 时 $\mathrm{e}^{\lambda q(p)}$ 取最大值。进而可以看出，在 s 平面的实轴上偏离 $s=0$ 时 $\mathrm{e}^{\lambda q(p)}$ 的值呈指数型迅速下降；相反，在 s 平面的虚轴上则呈指数上升。所以，$s=0$ 点以及相对应的 p_s 点称为 $\mathrm{e}^{\lambda q(p)}$ 的鞍点。从另一角度看，在 s 平面的实轴上 $\mathrm{e}^{\lambda q(p)}$ 的相位由 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda V(p_s)}$ 决定，它与 s 无关，所以实轴又是 $\mathrm{e}^{\lambda q(p)}$ 的等相位线。由对应关系可知，路径 P 是 $\mathrm{e}^{\lambda q(p)}$ 的最速下降线，也是等相位线。

经式（9.3.4）的变换后，积分（9.3.3）成为

$$g(z,t)=\mathrm{e}^{\lambda q(p_s)}\int_{C'}\mathrm{e}^{-\lambda s^2}F(s)\mathrm{d}s \tag{9.3.7}$$

其中

$$F(s)=f(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}$$

由于在 $|s|\to\infty$ 时被积函数趋于零，故可根据约当引理补充无穷远处的积分，把 C' 与实轴组成闭合回路，可把 C' 上的积分换作沿实轴进行。当然，如果闭合回路中包含有被积函数的奇点，还要考虑奇点的贡献。在 s 平面把 C' 变换到实轴的同时，在 p 平面也把在 C' 上的积分换到了最速下降路径 P 上的积分。由于最速下降路径的积分主要贡献是鞍点附近，故可只在鞍点附近进行积分，并以此作为原积分的近似结果。

9.3.2　鞍点的位置

既然在鞍点附近沿最速下降路径积分可以近似地表征式（9.3.1）的积分解，找出被积函数的鞍点就成为首要任务。下面分两种情况进行讨论。

（1）原点附近的鞍点。

在 p 平面的原点附近满足条件 $p\to 0$，这样可以把 $n(p)$ 展开为 p 的幂级数。

为此，先把 $n(p)$ 表示为

$$n(p) = \sqrt{1 + \frac{a^2}{p^2 + 2\rho p + \omega_r^2}} = \sqrt{\frac{\omega_c^2 + \alpha}{\omega_r^2 + \alpha}} \tag{9.3.8}$$

其中

$$\omega_c^2 = \omega_r^2 + a^2$$

$$\alpha = p^2 + 2\rho p$$

当 $p = 0$ 时总有 $\alpha \ll \omega_r^2, \omega_c^2$，故可做如下近似

$$\begin{aligned}\frac{\omega_c^2 + \alpha}{\omega_r^2 + \alpha} &= \frac{\omega_c^2}{\omega_r^2}\left(1 + \frac{\alpha}{\omega_c^2}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{\omega_r^2}\right)^{-1} \\ &= \frac{\omega_c^2}{\omega_r^2}\left(1 + \frac{\alpha}{\omega_c^2}\right)\left(1 - \frac{\alpha}{\omega_c^2} + \cdots\right) \\ &\approx \frac{\omega_c^2}{\omega_r^2}\left[1 - \frac{\alpha(\omega_c^2 - \omega_r^2)}{\omega_c^2\omega_r^2}\right] \\ &= \frac{\omega_c^2}{\omega_r^2}\left(1 - \frac{\alpha a^2}{\omega_c^2\omega_r^2}\right)\end{aligned}$$

把这一结果代回到式（9.3.8）中，且再作进一步近似，即又可得

$$\begin{aligned}n(p) &\approx \frac{\omega_c}{\omega_r}\left(1 - \frac{\alpha a^2}{2\omega_c^2\omega_r^2}\right) \\ &= \frac{\omega_c}{\omega_r}\left[1 - \frac{1}{2}(p^2 + 2\rho p)\frac{a^2}{\omega_c^2\omega_r^2}\right] \\ &= \frac{\omega_c}{\omega_r} - Ap(p + 2\rho)\end{aligned} \tag{9.3.9}$$

其中，$A = \dfrac{a^2}{2\omega_c\omega_r^3}$。

在以上近似下，$q(p)$ 成为

$$\begin{aligned}q(p) &= p[Q - n(p)] \\ &= p\left[\left(Q - \frac{\omega_c}{\omega_r}\right) + Ap(p + 2\rho)\right] \\ &= p[\eta + Ap(p + 2\rho)]\end{aligned} \tag{9.3.10}$$

其中

$$\eta = Q - \frac{\omega_c}{\omega_r} = \frac{ct}{z} - \frac{\omega_c}{\omega_r} \tag{9.3.11}$$

按定义，鞍点满足 $(\mathrm{d}q/\mathrm{d}p) = 0$，也就是满足

$$\eta + Ap(p + 2\rho) + p(2Ap + 2A\rho) = 0$$

亦即

$$\eta + Ap(3p + 4\rho) = 0 \tag{9.3.12}$$

由此解出两个鞍点为

$$p_{s1} = -\frac{2}{3}\rho + \frac{1}{3}\sqrt{4\rho^2 - \frac{3\eta}{A}} \tag{9.3.13}$$

$$p_{s2} = -\frac{2}{3}\rho - \frac{1}{3}\sqrt{4\rho^2 - \frac{3\eta}{A}} \tag{9.3.14}$$

下面分三种情况讨论这些鞍点所在的具体位置。

情况1：$\eta < \frac{4}{3}A\rho^2$。

在这种情况下 p_{s1} 和 p_{s2} 均为实数，故它们位于实轴上，且对称于点 $\left(-\frac{2}{3}\rho, 0\right)$。

除了需要知道鞍点的位置，还要知道在鞍点附近最速下降路径的走向，为此需要知道 $\mathrm{d}^2q(p)/\mathrm{d}p^2$ 在鞍点处的辐角。由式（9.3.12）可求得

$$\frac{\mathrm{d}^2q(p)}{\mathrm{d}p^2} = \pm A\sqrt{4\rho^2 - \frac{3\eta}{A}} = h\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{9.3.15}$$

由此可知，对 p_{s1} 而言 $\theta = 0$，对 p_{s2} 而言 $\theta = \pi$。若令

$$p - p_s = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

其中，p 为靠近鞍点的最速下降路径上的点。可以证明

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \tag{9.3.16}$$

于是在 p_{s1} 处 $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$，在 p_{s2} 处 $\varphi = 0, -\pi$。

情况2：$\eta > \frac{4}{3}A\rho^2$。

由式（9.3.13）和（9.3.14）可知，在这种情况下有

$$p_{s1} = -\frac{2}{3}\rho + \mathrm{i}\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3\eta}{A} - 4\rho^2} = -\frac{2}{3}\rho + \mathrm{i}\omega_s \tag{9.3.17}$$

$$p_{s2} = -\frac{2}{3}\rho - \mathrm{i}\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3\eta}{A} - 4\rho^2} = -\frac{2}{3}\rho - \mathrm{i}\omega_s \tag{9.3.18}$$

其中

$$\omega_s = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3\eta}{A} - 4\rho^2}$$

可见，这时的两个鞍点位于直线 $\sigma = -\frac{2}{3}\rho$ 上，且相对实轴对称。

依照上面的定义，可求得在鞍点处最速下降路径的走向为：在 p_{s1} 附近 $\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$；在 p_{s2} 附近 $\varphi = \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$。

情况 3：$\eta = \frac{4}{3}A\rho^2$。

显然，在这种情况下两个鞍点重合在一起，在这一点最速下降路径的走向为 $\varphi = \pm \frac{\pi}{3}$，$\pi$。

因为 $\eta = \frac{ct}{z} - \frac{\omega_c}{\omega_r}$，故鞍点的位置与 z 和 t 有关。如果固定 z 则 η 随 t 的增加而增大。这样一来，鞍点在 p 平面上的位置将随 t 而改变。

由上面讨论的三种情况中 t 的变化顺序可知，两个鞍点最初是在实轴上，随着时间的增加它们逐渐相互靠近。当处于第三种情况时，即在

$$t = \frac{z}{c}\left(\frac{4}{3}A\rho^2 + \frac{\omega_c}{\omega_r}\right) \tag{9.3.19}$$

时，它们汇合为一个二阶鞍点，然后转为沿着与虚轴平行的直线向相反方向互相分离。

（2）远离原点的鞍点。

在远离原点的情况下 p 的值应很大，故可认为在式（9.3.8）中 ω_r^2 与 p^2 相比可以忽略，而且有 $a^2 \ll |p|^2$，从而可得 $n(p)$ 的近似表示

$$\begin{aligned} n^2(p) &\approx \left(1 + \frac{a^2}{p^2 + 2\rho p}\right)^{1/2} \\ &\approx 1 + \frac{1}{2}\frac{a^2}{p^2 + 2\rho p} \end{aligned} \tag{9.3.20}$$

于是

$$q(p) \approx p\left(Q - 1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{p + 2\rho p}\right)$$

令

$$\delta = Q - 1 = \frac{c}{z}\left(t - \frac{z}{c}\right) = \frac{c\tau}{z} \tag{9.3.21}$$

则

$$q(p) = p\delta - \frac{1}{2}\frac{a^2}{p^2 + 2\rho} \tag{9.3.22}$$

由此式可以求得远离原点的鞍点为

$$p_{s1} = -2\rho + \mathrm{i}\frac{a}{\sqrt{2\delta}} = -2\rho + \mathrm{i}\omega_s \tag{9.3.23}$$

$$p_{s2} = -2\rho - \mathrm{i}\frac{a}{\sqrt{2\delta}} = -2\rho - \mathrm{i}\omega_s \tag{9.3.24}$$

其中，$\omega_s = \frac{a}{\sqrt{2\delta}}$。

这两个鞍点位于直线 $\sigma = -2\rho$ 上并对称于实轴，通过它们的最速下降路径的

走向是：对 p_{s1} 为 $\varphi = \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$；对 p_{s2} 为 $\varphi = \frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$。

由式（9.3.23）和（9.3.24）可以看出，当 $\delta = 0\left(t = \frac{z}{c}\right)$ 时两个鞍点分别位于直线 $\sigma = -2\rho$ 两端的无穷远处。随着 δ（或 t）的增加，它们沿着直线 $\sigma = -2\rho$ 由两端向实轴方向运动。但当 δ 足够大时上述近似表示的条件不再成立，鞍点将逐渐偏离直线。可以证明，它们将逐渐趋向附近的支线。

到此我们已了解了靠近原点和远离原点时鞍点的位置以及它们随时间变动的大致方向，同时也指明了最速下降路径通过鞍点时的走向。求积分的近似解并不需要严格地了解最速下降路径的具体走向，但却需要判断在积分路径的变换过程中是否需要考虑被积函数奇点的贡献。鞍点随时间而变动位置，最速下降路径也随之而变。仔细分析这种变动过程是件很繁琐的工作，这里不再详细论述。

如前所述，对积分的主要贡献是在鞍点附近的最速下降路径，下面就依此讨论式（9.3.1）的近似积分的具体结果。

9.3.3　第一预现波

索末菲理论中已粗略地讨论了预现波的一些基本特性，下面利用最速下降法对这一问题再进行更细致的讨论。在距接入波的媒质面为 z 的地方，到时间 $t = z/c$ 的时刻才开始有波头到达，也就是预现波开始出现。由上面的讨论已知，在 $\tau = t - z/c$ 略大于零时两个鞍点远离原点，分别由式（9.3.23）和（9.3.24）表示。在这一时段积分（9.3.1）可近似地在两个鞍点所在的一段最速下降路径上求得。

在式（9.3.22）中用 $\delta = a^2/2\omega_s^2$ 替换 δ 可表示为

$$q(p) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{p}{\omega_s^2} - \frac{1}{p + 2\rho}\right)$$

当 $p = p_s$ 时成为

$$\begin{aligned} q(p_s) &= \frac{a^2}{2}\left(\frac{-2\rho \pm \mathrm{i}\omega_s}{\omega_s^2} \pm \mathrm{i}\frac{1}{\omega_s}\right) \\ &= a^2\left(-\frac{\rho}{\omega_s^2} \pm \mathrm{i}\frac{1}{\omega_s}\right) \\ &= U_s \pm \mathrm{i}V_s \end{aligned} \tag{9.3.25}$$

其中，$U_s = -a^2\rho/\omega_s^2$，$V_s = a^2/\omega_s$。在上式中 $q(p_{s1})$ 对应（+）号，而 $q(p_{s2})$ 则对应（−）号。

现在先求式（9.3.1）在 p_{s1} 附近的积分并用 $g_1(z,t)$ 表示。在 p_{s1} 把 $q(p)$ 展开为幂级数，可近似为

$$q(p) = q(p_{s1}) + \frac{1}{2}q''p_{s1})(p - p_{s1})^2$$

$$= q(p_{s1}) + \frac{1}{2}he^{i\theta} \cdot r^2 e^{i2\varphi} \tag{9.3.26}$$

计算可知

$$q''(p_{s1}) = -\mathrm{i}\frac{a^2}{\omega_s^3}$$

故有

$$h = \frac{a^2}{\omega^3}, \quad \theta = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

因此

$$q(p) = U_s + \mathrm{i}V_s - \frac{1}{2}\frac{a^2}{\omega_s^3}r^2 \tag{9.3.27}$$

若在 p_{s1} 沿最速下降路径的两边各取很小一段 r_0 作为积分区间，则近似地有[4]

$$g_1(z,t) = -\frac{1}{\pi}\frac{e^{(z/c)(U_s+\mathrm{i}V_s)}}{-2\rho + \mathrm{i}(\omega_s - \omega_0)}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\int_0^{r_0} e^{-\frac{z}{2c}(a^2/\omega_s^3)r^2}\mathrm{d}r \tag{9.3.28}$$

r_0 的选择要使上式中的被积函数趋于零，为此要求 r_0 远小于 ω_s，ω_s 大于 ω_r，但又不能大得太多，否则 δ 非常接近零而使 $\omega_s \to \infty$ 。

在以上条件下，积分（9.3.28）的上限由于被积函数趋于零而可延伸至 ∞，从而可利用关系

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{z}{2c}hr^2}\mathrm{d}r = \sqrt{\frac{\pi c}{2zh}}$$

而得到

$$g_1(z,t) = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{c\omega_s^3}{2\pi}}\frac{e^{(z/c)(U_s+\mathrm{i}V_s)}}{-2\rho - \mathrm{i}(\omega_s + \omega_0)}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \tag{9.3.29}$$

用同样的方法可求得 p_{sz} 处对积分的贡献 $g_2(z,t)$，总起来就有 $g(z,t) = g_1(z,t) + g_2(z,t)$ 。考虑到 $\rho \ll \omega_0$，把 $g(z,t)$ 变换为实函数可得

$$f(z,t) = \frac{\omega_0}{a}\sqrt{\frac{2c}{\pi\omega_s z}}e^{-(za^2\rho)/(c\omega_s^2)}\sin\left(\frac{z}{c}\frac{a^2}{\omega_s} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{9.3.30}$$

又因

$$\omega_s = \frac{a}{\sqrt{2\sigma}} = a\sqrt{\frac{z}{2c\tau}}$$

式（9.3.30）又可写成

$$f(z,t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{\pi a^3}}\left(\frac{2c}{z}\right)^{3/4}\tau^{1/4}e^{-2\rho\tau}\sin\left(a\sqrt{\frac{2z\tau}{c}} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{9.3.31}$$

该式所代表的波动从 $\tau = t - \dfrac{z}{c}$ 开始，因为在 $\tau < 0$ 时正弦项的宗量为虚数，$f(z,t)$ 不存在。这一结果再次表明式（9.3.31）所代表的波动以真空中的光速传播，开始时它的频率很高，但随后稳定地降低。其振幅在开始时为零而后增大，再按 $\tau^{1/4}e^{-2\rho\tau}$ 规律随 τ 的增大而减小。通过估算不难发现，第一预现波的振幅是

很小的。

需要指出的是，在 $\rho = 0$ 的条件下当 τ 足够大时，可将式（9.2.46）中的贝塞尔函数用渐近式替代，其结果与式（9.3.31）在 $\rho = 0$ 时一样，这也从另一角度说明式（9.3.31）成立的条件是 τ 不能太小，这也正是导出它的过程中预设的前提。

9.3.4　第二预现波

当 τ 不很小时，原点附近的鞍点将起主要作用，这时的解称为第二预现波。从前面的分析已知，在 $\eta = \frac{ct}{z} - \frac{\omega_c}{\omega_r} < \frac{4}{3}A\rho^2$，即 $t < \frac{z}{c}\left(\frac{4}{3}A\rho^2 + \frac{\omega_c}{\omega_r}\right)$ 时有两个鞍点位于实轴上。对最速下降的分析表明，这时它只通过右边的鞍点 p_{s1}，鞍点的位置由式（9.3.13）表示。令

$$\sigma_s = p_{s1} = -\frac{2}{3}\rho + \frac{1}{3}\sqrt{4\rho^2 - \frac{3\eta}{A}}$$

按照分析第一预现波的类似步骤可以得

$$q(p) = q(p_{s1}) - \frac{1}{2}hr^2 \tag{9.3.32}$$

其中，$h = A(6\sigma_s + 4\rho)$；$q(p_{s1}) = q(\sigma_s) = U_s$。和以前一样，只取 p_{s1} 两侧很小的一段积分路径 r_0 即可，于是

$$g(z,t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sigma_s - \mathrm{i}\omega_0}\mathrm{e}^{\frac{z}{c}U_s}\int_0^{r_0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(z/c)hr^2}\mathrm{d}r \tag{9.3.33}$$

同样的理由，当被积函数足够小时积分限可延至 ∞，由此得到

$$\begin{aligned} g(z,t) &= \frac{1}{\sigma_s - \mathrm{i}\omega_0}\mathrm{e}^{\frac{z}{c}U_s}\sqrt{\frac{c}{2\pi zh}} \\ &= \frac{\sigma_s + \mathrm{i}\omega_0}{\sigma_s^2 + \omega_0^2}\mathrm{e}^{\frac{z}{c}U_s}\sqrt{\frac{c}{2\pi zh}} \end{aligned} \tag{9.3.34}$$

取其虚部即得

$$\begin{aligned} f(z,t) &= \frac{\omega_0}{\sigma_s^2 + \omega_0^2}\mathrm{e}^{\frac{z}{c}U_s}\sqrt{\frac{c}{2\pi zh}} \\ &= \frac{\omega_0}{2(\sigma_s^2 + \omega_0^2)}\sqrt{\frac{2c}{\pi zh}}\mathrm{e}^{\frac{z}{c}U_s} \end{aligned} \tag{9.3.35}$$

通过数量级的分析可知，在起始时 $f(z,t)$ 接近于零，然后增大，而在 $\eta = 0$ 时，即在

$$t = \frac{z}{c}\frac{\omega_c}{\omega_r}$$

时达到

$$f(z,t)\big|_{\eta=0} = \frac{1}{2\omega_0}\sqrt{\frac{c}{2\pi\rho zA}} \tag{9.3.36}$$

这表明，这时的 $f(z,t)$ 是个非振荡函数，且其值一直很小，保持在 $f(\eta = 0)$ 的量级。

当 $\eta > \frac{4}{3}A\rho^2$，即 $t > \frac{z}{c}\left(\frac{4}{3}A\rho^2 + \frac{\omega_c}{\omega_r}\right)$ 时有两个由式（9.3.13）和（9.3.14）表示的鞍点，它们都被最速下降的路径穿过。因此，它们所在路径段上的积分都要计算。我们把这两段积分分别记做 $g_1(z,t)$ 和 $g_2(z,t)$，计算结果为

$$g_1(z,t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{3\pi A\omega_s z}}\frac{\mathrm{e}^{\frac{z}{c}(U_s + \mathrm{i}V_s)}}{-\frac{2}{3}\rho + \mathrm{i}(\omega_s + \omega_0)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \tag{9.3.37}$$

$$g_2(z,t) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{3\pi A\omega_s z}}\frac{\mathrm{e}^{\frac{z}{c}(U_s - \mathrm{i}V_s)}}{-\frac{2}{3}\rho - \mathrm{i}(\omega_s - \omega_0)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \tag{9.3.38}$$

其中

$$U_s = \frac{2}{3}\rho\left(-\eta + \frac{8}{9}A\rho^2\right)$$

$$V_s = \omega_s\left[\eta - A\left(\frac{4}{3}\rho^2 + \omega_s^2\right)\right]$$

由此进一步又可得到

$$f(z,t) = \frac{\omega_0\sqrt{\frac{c}{3\pi\omega_0 Az}}\mathrm{e}^{\frac{z}{c}U_s}}{\left(\omega_0^2 + \omega_s^2 + \frac{4}{9}\rho^2\right)^2 - 4\omega_0^2\omega_s^2}$$

$$\cdot\left[\frac{4}{3}\rho\omega_s\cos\left(\frac{z}{c}V_s + \frac{\pi}{4}\right) + \left(\omega_0^2 - \omega_s^2 + \frac{4}{9}\rho^2\right)\sin\left(\frac{z}{c}V_s + \frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{9.3.39}$$

显然，这是一个振荡过程，对该式进行详细分析后可知，直到接近 $t = (z\omega_c)/(c\omega_r)$ 之前还没有明显的响应；当 $t \approx (z\omega_c)/(c\omega_r)$ 时才有很小的响应。然后，当 $t > (z\omega_c)/(c\omega_r)$ 时出现小幅振荡，其频率由零开始不断增高。当其频率接近 ω_0 时，其振幅迅速增大。

9.3.5　电磁信号的速度

前面所考虑的鞍点处的积分起主要作用的前提是，所用的最速下降路径还不靠近被积函数的奇点，因为一旦靠近或通过，则奇点的贡献将起支配作用。事实上，随着时间的推移，最速下降路径也在不断移动，它会在某个时刻接近并扫过奇点，这时围绕奇点的积分是必须计算的，而且它就代表了主体信号的传播。

在现在的问题中被积函数的极点是首先需要考虑的。由于极点处积分是不存在的，需要让积分路径在极点处变形。我们用以极点为圆心、半径为无限小的圆弧来代表，而且随积分路径扫过极点的过程，圆弧逐渐增加，最后变成一个圆。

由于圆弧的半径为无限小，可认为被积函数中的指数项在整个圆弧上为常数，并用极点处的值代替。于是在式（9.3.1）中有

$$p\left(t-\frac{z}{c}n(p)\right)=\mathrm{i}\omega_0 t-\mathrm{i}\omega_0\frac{z}{c}n(\mathrm{i}\omega_0)$$
$$=\mathrm{i}[\omega_0 t-k(\mathrm{i}\omega_0)z] \tag{9.3.40}$$

令

$$k(\mathrm{i}\omega_0)=\beta(\omega_0)-\mathrm{i}\alpha(\omega_0),$$
$$p-\mathrm{i}\omega_0=s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$$

则

$$\mathrm{d}p=\mathrm{i}s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\mathrm{d}\psi$$

于是，积分（9.3.1）可近似地表示为

$$g(z,t)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0 t-\beta z)}\mathrm{e}^{-\alpha z}\int_0^{\psi_0}\mathrm{d}\psi \tag{9.3.41}$$

其中，ψ_0 为积分圆弧所对应的角度。由上式得到

$$g(z,t)=\frac{\psi_0}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_0 t-\beta z)}\mathrm{e}^{-\alpha z}$$

进而便有

$$f(z,t)=\frac{\psi_0}{2\pi}\mathrm{e}^{-\alpha z}\sin(\omega_0 t-\beta z) \tag{9.3.42}$$

显然，当最速下降路径离极点比较远时，还不需要考虑极点的影响，因为这时 $\psi_0=0$。当积分路径正好穿过极点时 $\psi_0=\pi$，则 $\psi/2\pi=1/2$；当积分路径完全扫过极点时 $\psi_0=2\pi$，这时 $\psi_0/2\pi=1$。所以，最终 $f(z,t)$ 成长为辐度为 $\mathrm{e}^{-\alpha z}$、频率为 ω_0 的稳定波动。可见，它在积分路径扫过极点的这段时间其振幅经历了一个迅速增长的过程。当路径正好扫过极点的一刻其幅度已达到稳定时的一半。由于预现波与这时的主波（9.3.42）相比幅度非常小，故稳定前由式（9.3.42）所表示的 $f(z,t)$ 代表了信号，而当它稳定后就不再携带信息了。所以，可以人为地认为 $\psi_0/2\pi=1/2$ 时代表信号到达 z 处的时刻，并由此讨论信号的速度。按此定义，信号到达 z 处的时刻正是最速下降路径穿过极点的那一时刻。

由以前的分析已知，这个时段的鞍点沿着与虚轴平行并非常靠近虚轴的直线运动。由于鞍点与虚轴非常靠近，故最速下降路径与虚轴的交点和鞍点附近的一条速降线与虚轴的切点相近，于是就可近似地用此切点代替通过鞍点的最速下降路径与虚轴的交点。如果这一交点就是极点，则上述切点的行为就是所要研究的。

把 $q(p)$ 再对应到频域，可得

$$q(\mathrm{i}\omega)=\mathrm{i}\omega Q-\mathrm{i}ck(\mathrm{i}\omega)$$
$$=\mathrm{i}\omega\left(\frac{ct}{z}\right)-\mathrm{i}c(\beta-\mathrm{i}\alpha)$$

$$= - c\alpha - \mathrm{i}c\left(\beta - \frac{\omega t}{z}\right)$$
$$= U + \mathrm{i}V \tag{9.3.43}$$

其中

$$U = - c\alpha \tag{9.3.44}$$
$$V = - c\left(\beta - \frac{\omega t}{z}\right)$$

根据前面的讨论知道，速降线亦是等相线，它满足 $V = \text{const}$，它与虚轴的切点满足（$\partial V/\partial\omega$）= 0 。由式（9.3.44）可知

$$\frac{\partial V}{\partial \omega} = - c\left(\frac{\partial \beta}{\partial \omega} - \frac{t}{z}\right) = 0 \tag{9.3.45}$$

根据定义（$\partial\omega/\partial\beta$）= v_g 代表切点所对于电磁信号的群速，或（9.3.45）可表示为

$$t = \frac{z}{v_g} \tag{9.3.46}$$

这表明，按上述关于信号到达的定义，电磁信号以群速 v_g 传播。但需要指出的是，在以上的讨论中都满足 ω_0 远离 ω_r 的条件，否则就要考虑支点的影响。也就是说，以上结论仅适用于正常色散情况。如果把以上关于信号速度的定义延用到反常色散区，则可证明它将不再与群速等同。

关于电磁波在色散媒质中传播的相速、群速以及信号速度与频率的关系，布里渊的分析结果由图 9－8 给出。相速 v_p 只与稳定波动相关，它既可小于也可大于真空中的光速 c 。群速 v_g 只在色散媒质中不同于相速。在正常色散时，群速小于相速，但在反常色散时，群速可大于相速。在吸收带附近群速甚至可变为无限

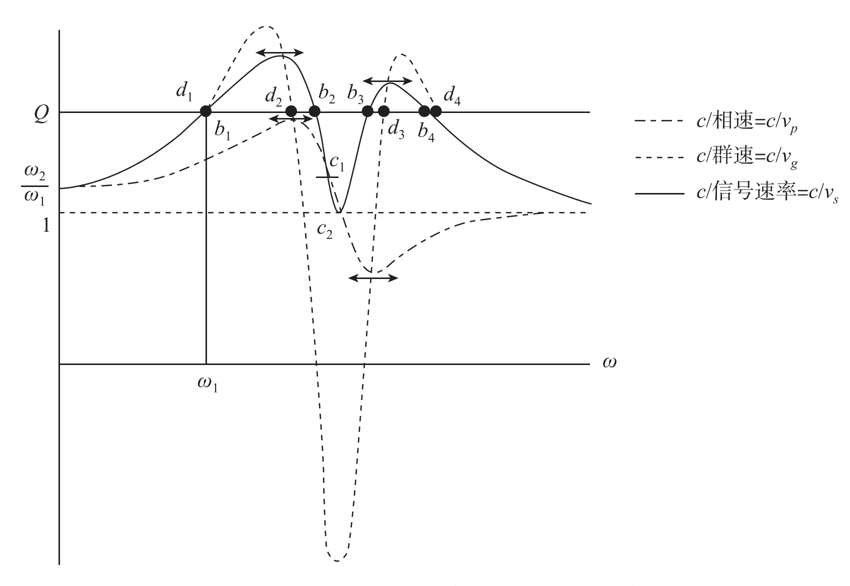


图 9－8　相速 v_p 、群速 v_g 和信号速度 v_s 与频率的关系

大，也可变为负值。在正常色散区域信号速度与群速一致；在反常色散区信号速度则永远小于、最多等于真空中的光速。以上结论是否正确要靠实验方法来验证。

现在我们最后总结一下电磁信号在色散媒质中传播时所经历的复杂的瞬变过程。在任一距离上第一预现波以真空中的光速 c 最先到达，它的振荡频率在开始时极高，然后逐渐降低，直到其频率等于媒质中电子的特征频率为止。它的振幅开始时不断增加，然后又因阻尼作用而减小。

第二预现波幅度开始阶段也很小，直到 $t = (z\omega_c)/(c\omega_r) = (z/c)(\sqrt{\omega_r^2 + a^2}/\omega_r)$ 时才达到一定的量级，故可认为这是它到达的时刻。它的频率开始时很低，然后升高，它的振幅也是开始时升高然后减小。这两种预现波在时间上会有部分重叠。电磁响应的主体部分以信号速度到达，它的频率与接入的电磁信号相同，代表了电磁信号的最终建立。在以后的一段时间内，预现波仍然与之重叠，波形仍有一定畸变。以上整个过程由图 9－9 给以形象的说明。

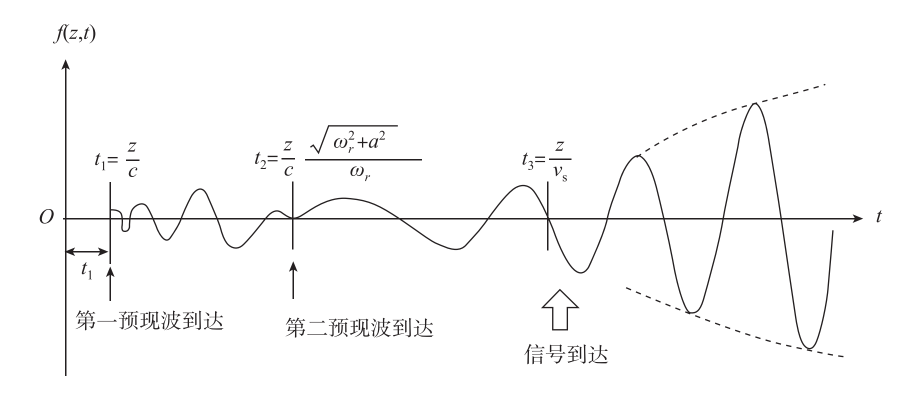


图 9－9　电磁信号随时间变化的示意图

由图可以看出，电磁信号的建立从 t_1 开始，经历了一个复杂的瞬变过程，最后建立起稳定的电磁振荡。定义 t_3 为信号到达的时刻完全是人为的，它的合理性在于它标志着电磁振荡已经达到了足够的强度。这样的定义与检测方法相关。如果检测灵敏度达到无限，可以记录到第一预现波的波头，并以波头的到达为信号到达的标志，则它就以真空中的光速传播。

9.4　传输系统中的瞬变电磁场

当传输系统中传输瞬变或宽频带电磁波时，如果传输系统是色散的，则电磁信号的形态将在传输过程中产生畸变。了解电磁信号在传输过程中的畸变特性在技术上是非常重要的。本节将以柱形金属波导为例对这一问题进行简要分析。

9.4.1　空心波导中电磁脉冲信号的传输

根据时不变电磁线性系统理论可知，如果有一时域电磁信号 $e(t)$ 作用于该系统，系统的响应信号为 $y(t)$，则该系统的频域传递函数 $h(\omega)$ 定义为

$$h(\omega) = \frac{y(\omega)}{e(\omega)} \tag{9.4.1}$$

其中，$y(\omega)$ 和 $e(\omega)$ 分别为 $y(t)$ 和 $e(t)$ 的傅里叶变换，而且，用时域传递函数又可以把 $y(t)$ 和 $e(t)$ 以下面的形式联系起来

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(t-\tau)e(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{9.4.2}$$

如果输入信号为 $\delta(t)$，则因为 $\delta(\omega)=1$，故这时就有

$$y(t) = h(t)$$

如果用 $e(p)$ 和 $y(p)$ 分别表示 $e(t)$ 和 $y(t)$ 的拉普拉斯变换，则 $h(t)$ 的拉普拉斯变换定义为

$$h(p) = \frac{y(p)}{e(p)} \tag{9.4.3}$$

由此又可把 $y(t)$ 表示为

$$y(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\alpha-\mathrm{i}\infty}^{\alpha+\mathrm{i}\infty} h(p)e(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p \tag{9.4.4}$$

现在把金属空心波导视作时不变电磁线性系统。由波导理论可知，即使不考虑损耗，空心金属波导中以任何模式传播的电磁波都是色散的。下面分析脉冲电磁波在无耗空心金属波导中传输的特点。假定波导是均匀无限长的，其内为真空。我们取长度为 l 的一段作为研究的线性系统，起始点为 $z=0$，终点为 $z=l$。假定在所考虑的频率范围内电磁波以同一种模式传输，则该系统的频域传递函数可表示为

$$h(\omega) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta(\omega)l} \tag{9.4.5}$$

其中

$$\beta(\omega) = \sqrt{k_0^2 - k_c^2}$$

由于 $k_0=\omega/c$，$k_c=\omega_c/c$，故又有

$$\beta(\omega) = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} \tag{9.4.6}$$

这样一来，由此又可以获得 $h(\omega)$ 在拉普拉斯复频域的表示形式

$$h(p) = e^{-\frac{l}{c}\sqrt{p^2+\omega_c^2}} \tag{9.4.7}$$

假定在 $z=0$ 处有信号 $\delta(t)$ 作用，则在以上条件下就可由 $h(p)$ 的拉普拉斯逆变换求得 $z=l$ 处的信号 $h(t)$。直接求 $h(p)$ 的拉普拉斯逆变换并不容易，但我们可以利用以下关系

$$\omega_c\frac{l}{c}\int_0^{\infty}\frac{J_1\left(\omega_c\sqrt{t^2-(l/c)^2}\right)}{\sqrt{t^2-(l/c)^2}}u\left(t-\frac{l}{c}\right)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

$$= e^{-\frac{l}{c}p} - e^{-\frac{l}{c}\sqrt{p^2+\omega_c^2}} \tag{9.4.8}$$

$$\int_0^{\infty} \delta(t-b)e^{-pt}dt = e^{-bp}, \quad b > 0 \tag{9.4.9}$$

现在对式（9.4.8）两边求拉普拉斯逆变换，则根据式（9.4.7）和（9.4.9）可以得到

$$h(t) = \delta\left(t - \frac{l}{c}\right) - \omega_c \frac{l}{c} \frac{J_1(\omega_c\sqrt{t^2-(l/c)^2})}{\sqrt{t^2-(l/c)^2}} u\left(t - \frac{l}{c}\right) \tag{9.4.10}$$

其中，J_1 为一阶贝塞尔函数。

这一结果明显地告诉我们，在 $t < l/c$ 时 $h(t) = 0$，也就是说，电磁信号在空心波导中以同一模式传输时其速度不可能超过光速 c，在 $t = l/c$ 时一个电磁冲激脉冲到达 l 处。但由于第二项的存在，使得初始冲激具有有限强度，接下来呈现的是主要由贝塞尔函数决定的辐度和频率连续下降的振荡。

由于贝塞尔函数具有以下渐近特性

$$J_1(t) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad x \to \infty$$

即当 x 比较大时趋近于幅度连续减小的正弦振荡。若把变量表示成时间的线性函数 $x = \omega t + \varphi$，则 ω 就是它的即时振荡频率，而且 $\omega = dx/dt$。由于在式（9.4.10）中相当于 $x = \omega_c[t^2 - (l/c)^2]^{1/2}$，由此得到即时频率为

$$\omega = \frac{\omega_c t}{\sqrt{t^2 - (l/c)^2}} \tag{9.4.11}$$

由此可见，即时频率随着时间的增加而降低。在 t 比 l/c 大得不是很多时，亦即在波头到达 l 处较早的时段，即时频率极高，随着时间的增加 ω 趋于 ω_c，而 ω_c 则是携带该信号的模式在所在波导中的截止频率。

由式（9.4.6）可以求得电磁波在金属空心波导中传输的群速度 v_g，即

$$v_g = \left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)^{-1} = \frac{c\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{\omega} \tag{9.4.12}$$

利用这一结果可以求得中心频率为 ω 的波包到达 l 的时间

$$t = \frac{l}{v_g} = \frac{l\omega}{c\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} \tag{9.4.13}$$

这说明，中心频率不同的波包到达 l 的时间不同，当 $\omega \to \infty$ 时，$t \to \frac{l}{c}$，也就是说，中心频率 $\omega \gg \omega_c$ 的波包以接近 c 的速度在波导中传输。反之，随着 $\omega \to \omega_c$，t 将逐渐增大。

总观以上各点可知，由于 $\delta(t)$ 有无限宽的频谱，频谱高端的部分以接近 c 的速度到达 l 处，这就是最早到达的波头，而频谱的低端要经过很长的时间才能到达 l 处，这就是 $h(t)$ 中的长长的拖尾。

需要再次强调的是，得出以上结果的前提条件是波包的所有频率分量都是以

同一电磁波导模式传输，否则就不能认为 ω_c 是常数，而是因模式不同而改变。如果 $z=0$ 处输入的是其他形式的电磁信号，原则上需要经过反演式（9.4.4）或由式（9.4.2）求得 $z=l$ 处的响应。

9.4.2　矩形波导中线源所激发的瞬变电磁场

以上讨论了一般空心金属波导中时域电磁信号的传输特性，其中不涉及电磁场的具体形态。现在我们讨论更具体的问题，以矩形金属波导为例讨论其中的电流源所激发的电磁场，尤其是当电流随时间任意变化时电磁场的特性。把这一问题分成两步，首先求出频域解，然后再变换到时域。

为简单起见，我们考虑在内部为空气的矩形波导中存在与窄边平行均匀线电流的情况，线电流的位置在 $x=x'$，$z=z'$ 处。显然，这种电流在波导中激发的电磁场应该与 y 无关，也就是所激发的电磁模式中 $n=0$。从式（5.2.16）和（5.2.17）的形式可知，这时被激发的只有 TE(H) 模，并且是 TE_{m0} 模。在这种模式中电场只有 E_y 分量。因为只有电流源存在，故可根据式（1.1.63）由于 $\nabla\cdot\vec{E}=0$ 而得到

$$\nabla^2\vec{E}_y(\vec{r},\omega)+k_0^2\vec{E}_y(\vec{r},\omega)=-\mathrm{i}\omega\mu_0\vec{J}(\vec{r},\omega) \tag{9.4.14}$$

考虑到线电流的位置和 E_y 与 y 无关，则可把上式在直角坐标中表示为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_0^2\right)E_y(x,z,x',z',\omega)=-\mathrm{i}\omega\mu_0J(\omega)\delta(x-x')\delta(z-z') \tag{9.4.15}$$

其中，$J(\omega)$ 为线电流 $J(t)$ 的傅里叶变换。我们把 E_y 视作 x'和 z'的函数，可使所得解对线电流的各种位置都适用。如果把 E_y 用三角函数 $\sin\frac{m\pi}{a}x$ 展开，即

$$E_y(x,z,x',z',\omega)=\sum_{m=1}^{\infty}C_m(z,x',z',\omega)\sin\frac{m\pi}{a}x \tag{9.4.16}$$

$$C_m(z,x',z',\omega)=\frac{2}{a}\int_0^a E_y(x,z,x',z',\omega)\sin\frac{m\pi}{a}x\mathrm{d}x \tag{9.4.17}$$

则可利用三角函数的正交性把方程（9.4.15）降低一维，而变为求解 C_m 满足的方程。

首先用 $\sin\frac{m\pi}{a}x$ 乘方程（9.4.15）的两侧，然后在 0 到 a 之间对 x 求积分。考虑到 E_y 在 $x=0$，$x=a$ 处为零和

$$\int_0^a\frac{\partial^2}{\partial x^2}E_y\sin\frac{m\pi}{a}x\mathrm{d}x=-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\int_0^a E_y\sin\frac{m\pi}{a}x\mathrm{d}x$$

就可由式（9.4.15）得到

$$\left[k_0^2-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\int_0^a E_y\sin\frac{m\pi}{a}x\mathrm{d}x$$
$$=-\mathrm{i}\omega\mu_0J(\omega)\sin\frac{m\pi}{a}x'\delta(z-z') \tag{9.4.18}$$

若令

$$\beta_m = \left[k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \right]^{1/2} \tag{9.4.19}$$

并利用式（9.4.17）可由式（9.4.18）得到 C_m 满足的方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \beta_m^2 \right) C_m = -\frac{2\mathrm{i}\omega\mu_0}{a} J(\omega) \sin \frac{m\pi}{a} x' \delta(z - z') \tag{9.4.20}$$

当 $z \neq z'$ 时，该方程的解是熟知的，即有

$$C_m = a_m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_m z}, \quad z < z' \tag{9.4.21}$$

$$C_m = b_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_m z}, \quad z > z'$$

在 $z = z'$ 处 C_m 应该是连续的，即有

$$a_m \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_m z'} = b_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_m z'} \tag{9.4.22}$$

对式（9.4.20）在 $z' - \Delta$ 到 $z' + \Delta$ 区间积分，并令 Δ 趋于零，即又得到

$$\left. \frac{\partial C_m}{\mathrm{d}z} \right|_{z'_-}^{z'_+} = -\frac{2\mathrm{i}\omega\mu_0}{a} J(\omega) \sin \frac{m\pi}{a} x' \tag{9.4.23}$$

把式（9.4.21）代入上式即知

$$a_m = -\frac{\omega\mu_0}{a\beta_m} J(\omega) \sin \frac{m\pi}{a} x' \tag{9.4.24}$$

$$b_m = a_m \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\beta_m z'}$$

于是可把 C_m 表示为

$$C_m = -\frac{\omega\mu_0}{a\beta_m} J(\omega) \sin \frac{m\pi}{a} x' \begin{cases} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_m (z'-z)}, & z < z' \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta_m (z'-z)}, & z > z' \end{cases} \tag{9.4.25}$$

最后就可把方程（9.4.15）的解 E_y 表示成

$$E_y(x, z, x', z', \omega) = -\frac{\omega\mu_0}{a} J(\omega) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_m} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{a} x' \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_m |z-z'|} \tag{9.4.26}$$

上面已求得了矩形波导中均匀 y 向线源所激发电磁场的频域解，原则上讲只要给定了电流源 $J(t)$ 的傅里叶变换，就可以通过逆变换而求得时域电流源的时域场解。但在实际上逆变换的求得不是一件容易的事情，只有一些特殊情况才能做到[3]。

如果假定线电流随时间的变化为 $\delta(t - t')$，则 $J(\omega)$ 为已知。在这种情况下可求得 E_y 为

$$E_y(\vec{r}, t) = -\frac{c^2}{a} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{a} \right) \sin\left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin\left(\frac{m\pi}{a} x' \right) (t - t')$$

$$\cdot \frac{J_1 \left\{ \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right) c^2 (t - t')^2 - (z - z')^2 \right]^{1/2} \right\}}{\left[c^2 (t - t')^2 - (z - z')^2 \right]^{1/2}}, \quad t' < t < t' + \frac{|z - z'|}{c}$$

求得此结果的详细过程可参考文献［3］。

9.5　辐射系统的瞬变电磁场

现代信息技术的发展，要求天线具有良好的辐射宽频带电磁脉冲的能力，这对天线系统的研究是一种具有挑战性的要求。为了分析天线系统的宽频带特性，需要求得相关电磁场问题的时域解。至今只有对有限的简单系统才能做到这一点，对较复杂的系统只能用数值方法进行研究。

9.5.1　电偶极子辐射的瞬变电磁场

考虑在真空中相距 $2l$ 的正负两个点电荷构成的一个电偶极子，其电量为 q，在坐标系中的位置示于图 9－10。从 $t=-l/v$ 开始，$+q$ 电荷突然以速度 v 匀速向 $-q$ 电荷运动；在 $t=l/v$ 时刻到达 $-q$ 电荷所在位置而突然停止。这种情况相当于在一段时间内出现一个突然产生又突然停止的电流元，该电流的电流密度矢量可表示为

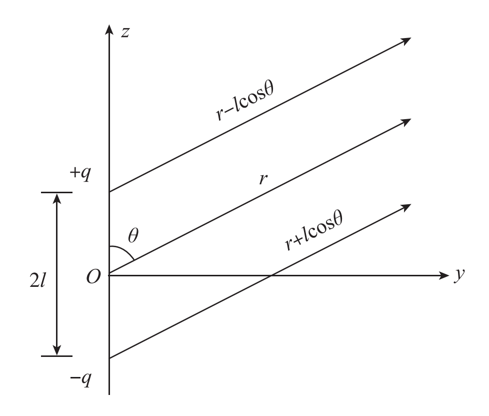


图 9－10　电偶极子

$$\vec{J}(\vec{r},t)=\begin{cases}-\hat{z}q\delta(x)\delta(y)\delta\left(t+\dfrac{z}{v}\right), & |t|<\dfrac{l}{v}\\ 0, & |t|>\dfrac{l}{v}\end{cases}\tag{9.5.1}$$

这是因为 $\vec{J}=\rho\vec{v}$，$\rho=q\delta(x)\delta(y)\delta(z+vt)$，而且

$$\delta(z+vt)=\delta\left[v\left(t+\frac{z}{v}\right)\right]=\frac{1}{v}\delta\left(t+\frac{z}{v}\right)$$

把式（9.5.1）转化到频域就成为

$$\vec{J}(\vec{r},\omega)=\begin{cases}-\hat{z}q\delta(x)\delta(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z/v}, & |z|<l\\ 0, & |z|>l\end{cases}\tag{9.5.2}$$

相应的电流强度则为

$$I(z,\omega) = \int J(\hat{r},\omega)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} -q\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z/v}, & |z| < l \\ 0, & |z| > l \end{cases} \tag{9.5.3}$$

在远区，即 $r \gg l$ 时，电流源的辐射场可视为球面波，在球坐标系 (r,θ,ϕ) 中仅有 E_θ 和 E_ϕ 分量，而且 $E_\theta = \eta H_\phi$，$\eta = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2}$。对于 z 轴上的一个微电流源 $I(z')\mathrm{d}z'$，它对电场的贡献在 (r,θ,ϕ) 处为

$$\mathrm{d}E_\theta(\vec{r},\omega) = \mathrm{i}\omega\mu_0 q\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 r}}{4\pi r}\sin\theta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0\cos\theta z'}I(z',\omega)\mathrm{d}z' \tag{9.5.4}$$

于是总的电场为

$$\begin{aligned} E_\theta(\vec{r},\omega) &= \mathrm{i}\omega\mu_0 q\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 r}}{4\pi r}\sin\theta\int_{-l}^{l}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{c}(\cos\theta+\xi)z'}\mathrm{d}z' \\ &= \eta q\frac{\sin\theta}{4\pi r}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 r}}{\cos\theta+\xi}\left[\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\frac{\omega}{c}(\cos\theta+\xi)l} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{c}(\cos\theta+\xi)l}\right] \end{aligned} \tag{9.5.5}$$

其中，$\xi = c/v$。

再对式（9.5.5）进行傅里叶逆变换，就可得到远区场时域的表达形式

$$E_\theta(\vec{r},t) = -\frac{\eta q}{4\pi r}\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\xi}\left[\delta\left(t+\frac{l}{v}-\frac{r-l\cos\theta}{c}\right)-\delta\left(t-\frac{l}{v}-\frac{r+l\cos\theta}{c}\right)\right] \tag{9.5.6}$$

由这一结果可知，所述电偶极子的时域辐射场由两个符号相反的冲激脉冲组成，其中的一个在时刻 $t = -l/v$ 发出，到达 (r,θ) 处的延迟时间为 $(r-l\cos\theta)/c$。从时间和距离上看，这一脉冲正是电荷在开始运动的一刻于 $z = l$ 处发出的。同样的分析可知，第二个脉冲是 $z = -l$ 处突然停止的时刻 $t = l/v$ 时发出的。这说明，辐射是在电荷作加速运动时产生的，而在作匀速运动时不会发生电磁辐射。其次还可看出，由于延迟的时间与 θ 有关，故合成的时域波形与 θ 角有关。由于辐射场的幅度也与 θ 有关，故辐射是有方向性的，但方向性与 ϕ 无关。

9.5.2　磁偶极子辐射的瞬变电磁场

设在真空中有一半径为 a 的电流环，当 a 比所涉及的电磁波波长小很多时，可视为一磁偶极子。取一直角坐标系，其原点置于圆环的中心，z 轴与圆环面垂直，如图 9－11 所示。

如果圆环上的瞬态电流是宽度为 2τ 的矩形脉冲，如下式表示

$$I(t) = I_0[u(t+\tau) - u(t-\tau)] \tag{9.5.7}$$

那么这一磁偶极子的辐射场应该是怎样的。这一问题的解决方法仍然是，先求得频域解然后求其傅里叶逆变换。

不难理解，由电流分布的角对称性可知，该种偶极子的辐射场应该与 ϕ 无关，故场点只需取在 yOz 平面上。对这类场点而言，对 y 轴对称的两个微电流元的 y 分量对场的贡献将相互对消，而其 x 分量的贡献相同。若取 $\mathrm{d}l = a\mathrm{d}\phi'$，则任一电流微元 $I\mathrm{d}l$ 的 x 分量均为 $-I\mathrm{d}l\sin\phi'$。在频域该电流元的矢量位可由式

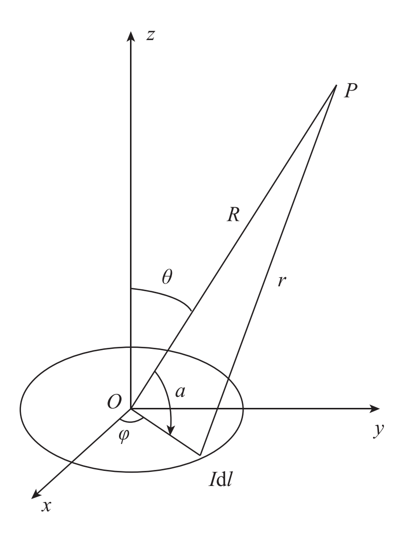


图 9－11　磁偶极子

(3.3.2) 得到

$$\mathrm{d}A_z = -\mu_0 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 r}}{4\pi r} Ia\sin\phi'\mathrm{d}\phi'$$

若只考虑远区场则可把 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 r}$ 中的 r 近似地表示为 $r \approx R - a\cos\alpha$，再考虑到 $\cos\alpha = \sin\theta\sin\phi'$，则整个电流环对矢量位的贡献为

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi R}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 R}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_0 a\sin\theta'\sin\phi'}\sin\phi'\mathrm{d}\phi' \tag{9.5.8}$$

利用关系 $\sin\phi' = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi'} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi'})$ 和贝塞尔函数的积分表示

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x\sin\phi - n\phi)}\mathrm{d}\phi'$$

以及 $J_{-1}(x) = -J_1(x)$，便可得到

$$A_\phi = -\frac{\mu_0 Ia}{\mathrm{i}2R}J_1(k_0 a\sin\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 R} \tag{9.5.9}$$

远区电磁场仅有分量 E_ϕ 和 H_θ，且有 $E_\phi = -\eta H_\theta$，故只需求出 H_θ。由于

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{A}$$

可在球坐标系中得到

$$\begin{aligned} H_\theta &= \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RA_\phi) \\ &= -\frac{Iak_0}{2R}J_1(k_0 a\sin\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 R} \end{aligned} \tag{9.5.10}$$

利用关系

$$\int_{-\infty}^{\infty}u(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{i}\omega} + \pi\delta(\omega)$$

可求得

$$I(\omega) = 2I_0 \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}$$

故有

$$H_\theta(\omega) = \frac{I_0 a}{Rc}\sin(\omega\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0R}J_1\left(\omega\frac{a}{c}\sin\theta\right) \tag{9.5.11}$$

为了求得该式的傅里叶逆变换，需要解决贝塞尔函数的逆变换问题，为此可考虑能借助的关系，如

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{b^2 - t^2}}, & |t| \leqslant b \\ 0, & |t| > b \end{cases}$$

如果利用的其傅里叶变换为

$$f(\omega) = \int_{-b}^{b} \frac{1}{\sqrt{b^2 - t^2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

令 $t = -b\sin\varphi$，则有

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega b\sin\varphi}\mathrm{d}\varphi \\ &= \pi J_0(b\omega) \end{aligned}$$

如果设

$$g(\omega) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}J_0(b\omega)$$

再利用关系

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}f(\omega)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = \mathrm{i}tf(t)$$

则可得

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{i}t}{\pi\sqrt{b^2 - t^2}}, & |t| \leqslant b \\ 0, & |t| > b \end{cases}$$

又因为

$$J_1\left(\omega\frac{a}{c}\sin\theta\right) = -\frac{c}{a\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[J_0\left(\omega\frac{a}{c}\sin\theta\right)\right], \quad (0 < \theta < \pi)$$

则我们有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} J_1\left(\omega\frac{a}{c}\sin\theta\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = \begin{cases} -\dfrac{\mathrm{i}tc}{\pi a\sin\theta}\dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{a}{c}\sin\theta\right)^2 - t^2}}, & |t| \leqslant \dfrac{a}{c}\sin\theta \\ 0, & |t| > \dfrac{a}{c}\sin\theta \end{cases} \tag{9.5.12}$$

考虑关系 $\sin\omega\tau = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau})$ 和

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\alpha}f(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega = f(t-\alpha)$$

并利用式（9.5.12）就能得到式（9.5.11）的傅里叶逆变换

$$H_\theta(r,\theta,t) = -\frac{I_0}{2\pi R\sin\theta}[H_\theta^+(t') - H_\theta^-(t')],\quad 0 < \theta < \pi \tag{9.5.13}$$

其中

$$H_e^{\pm}(t') = \begin{cases} \dfrac{t' \pm \tau}{\sqrt{\left(\dfrac{a}{c}\sin\theta\right)^2 - (t' \pm \tau)^2}}, & |t' \pm \tau| \leqslant \dfrac{a}{c}\sin\theta \\ 0, & |t' \pm \tau| > \dfrac{a}{c}\sin\theta \end{cases} \tag{9.5.14}$$

且 $t' = t - R/c$ 。

由以上结果可以看出，在 $t' = \pm\tau \pm \frac{a}{c}\sin\theta$ 时可观察到辐射的奇异性。由 $t - \left(\frac{R}{c} \pm \frac{a}{c}\sin\theta\right) = \pm\tau$ 可以推断，奇异性是由 $t = \pm\tau$ 时电流的突变所引起，而且其贡献来自由观察点与 z 轴所决定的平面和电流环相交的两处电流元。

9.5.3　对称线天线辐射的瞬变电磁场

对称线天线是最接近实用天线的一种简单理想模型，其辐射特性决定于天线上的电流分布和随时间的变化形式。现在分析电流随时间任意变化时天线的时域辐射特性，但限定电流的基本形态为行波，且设置在真空中。

所考虑的天线结构及坐标表示由图 9－12 给出，天线的激励源设在对称中心，它使天线上产生如下线电流分布

$$I(z,t) = I_0(t - |z|/c) \tag{9.5.15}$$

显然，这种行波分布在 $t \leqslant l/c$ 而 $l < L$ 的时间段内是能实现的，我们就限定在这个时间段内考察天线的时域辐射场。

解决这类问题的方法仍是先求得频域解，然后变换到时域，为此先求得电流 I（z，t）的傅里叶变换

$$I(z,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}I(z,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = I_0(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0|z|} \tag{9.5.16}$$

其中

$$I_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}I(z,t)|_{z=0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty}I_0(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

该电流在观察点 p（ρ，z）处的矢量位为

$$\vec{A}(\vec{r},\omega) = \hat{z}A_z(\vec{r},\omega) = \hat{z}\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-l}^{l}\frac{I(z',\omega)}{R}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0R}\mathrm{d}z'$$

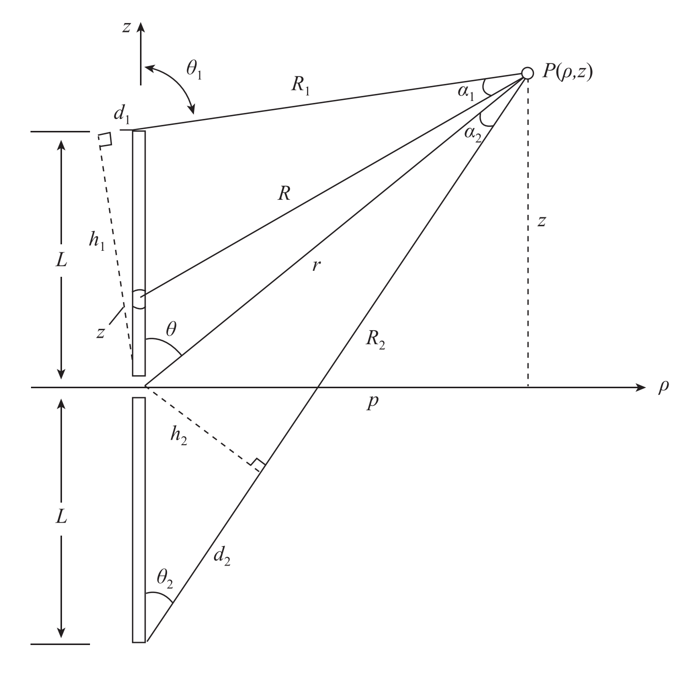


图 9－12　对称线天线及坐标表示

$$= \hat{z}\frac{\mu_0}{4\pi}I_0(\omega)\left[\int_{-l}^{0}\frac{e^{-ik_0(R-z')}}{R}dz' + \int_0^l \frac{e^{-ik_0(R+z')}}{R}dz'\right] \tag{9.5.17}$$

其中，$R=[l^2+(z-z')^2]^{1/2}$。根据电流分布的特点可知，天线所激发的磁场在圆柱坐标系中只有 φ 方向的分量，而且

$$H_\varphi = \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{A})_\varphi = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial\rho}A_z(\omega)$$

把式（9.5.17）代入上式可得

$$\begin{aligned}
H_\varphi(\vec{r},\omega) &= -\frac{I_0(\omega)}{4\pi}\rho\left\{\int_{-l}^{0}\frac{e^{-ik_0(R-z')}}{R}\left[\frac{ik}{R^2}-\frac{1}{R^3}\right]dz' + \int_0^l e^{-ik_0(R+z')}\left[\frac{ik_0}{R^2}-\frac{1}{R^3}\right]dz'\right\} \\
&= \frac{I_0(\omega)}{4\pi}\rho\left\{\int_{-l}^{0}\frac{d}{dz'}\left[\frac{e^{-ik_0(R-z')}}{R(R+z-z')}\right]dz' - \int_0^l\frac{d}{dz'}\left[\frac{e^{-ik_0(R+z')}}{R(R-z+z')}\right]dz'\right\} \\
&= \frac{I_0(\omega)}{4\pi\rho}\left[\frac{r-z}{r}e^{-ik_0r} - \frac{R_2-(z+l)}{R_2}e^{-ik_0(R_2+l)}\right] \\
&\quad - \frac{I_0(\omega)}{4\pi\rho}\left[\frac{R_1-(z-l)}{R_1}e^{-ik_0(R_1+l)} - \frac{r+z}{r}e^{-ik_0r}\right] \\
&= \frac{I_0(\omega)}{4\pi\rho}[2e^{-ik_0r} - (1+\cos\theta_1)e^{-ik_0(R_1+l)} - (1-\cos\theta_2)e^{-ik_0(R_2+l)}]
\end{aligned} \tag{9.5.18}$$

其中

$$R_1 = [\rho^2+(z-l)^2]^{1/2},\quad R_2 = [\rho^2+(z+l)^2]^{1/2}$$

$$\cos\theta_1 = (z - l)/R_1, \quad \cos\theta_2 = (z + l)/R_2$$

利用无源区域的麦克斯韦方程$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}, \omega) = \mathrm{i}\omega\varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, \omega)$，可求得在圆柱坐标系中的电场分量为

$$E_\rho(\vec{r},\omega) = -\frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon_0}\frac{\partial H_\varphi(\vec{r},\omega)}{\partial z}, \quad E_z(\vec{r},\omega) = \frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho H_\varphi(\vec{r},\omega))$$

于是，可由式（9.5.18）求得

$$E_\rho(\vec{r},\omega) = \frac{\eta_0 I_0(\omega)}{4\pi\rho}\left[2\cos\theta_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 r} - (1 + \cos\theta_1)\cos\theta_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(R_1+l)} - (1 - \cos\theta_2)\cos\theta_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(R_2+l)}\right]$$
$$- \frac{I_0(\omega)}{\mathrm{i}\omega\varepsilon_0 4\pi}\left[\frac{\sin\theta_1}{R_1^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(R_1+l)} - \frac{\sin\theta_2}{R_2^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(R_2+l)}\right] \tag{9.5.19}$$

$$E_z(\vec{r},\omega) = -\frac{\eta_0 I_0(\omega)}{4\pi\rho}\left[2\sin\theta_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 r} - (1 + \cos\theta_1)\sin\theta_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(R_1+l)}\right.$$
$$\left. - (1 - \cos\theta_2)\sin\theta_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(R_2+l)}\right]$$
$$- \frac{I_0(\omega)}{\mathrm{i}\omega\varepsilon_0 4\pi}\left[\frac{\cos\theta_1}{R_1^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(R_1+l)} - \frac{\cos\theta_2}{R_2^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(R_2+l)}\right] \tag{9.5.20}$$

其中，$\eta_0 = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2}$。

把以上场量投影到球坐标系中，可利用关系

$$E_r(\vec{r},\omega) = E_\rho(\vec{r},\omega)\sin\theta + E_z(\vec{r},\omega)\cos\theta$$

$$E_\theta(\vec{r},\omega) = E_\rho(\vec{r},\omega)\cos\theta - E_z(\vec{r},\omega)\sin\theta$$

为了简化，再把结果通过图 9－12 中所示的 α_1 和 α_2 表示，最后可得到

$$E_r(\vec{r},\omega) = \frac{\eta_0 I_0(\omega)}{4\pi}\left[\frac{\sin\alpha_1}{R_1}\cot\frac{\theta_1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(R_1+l)} - \frac{\sin\alpha_2}{R_2}\tan\frac{\theta_2}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(R_2+l)}\right]$$
$$- \frac{I_0(\omega)}{\mathrm{i}\omega\varepsilon_0 4\pi}\left[\frac{\cos\theta_1}{R_1^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(R_1+l)} - \frac{\cos\theta_2}{R_2^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(R_2+l)}\right] \tag{9.5.21}$$

$$E_\theta(\vec{r},\omega) = \frac{\eta_0 I_0(\omega)}{4\pi}\left[\frac{2}{\rho}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 r} - \frac{\cos\alpha_1}{R_1}\cot\frac{\theta_1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(R_1+l)}\right.$$
$$\left. - \frac{\cos\theta_2}{R_2}\tan\frac{\theta_2}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(R_2+l)}\right] - \frac{I_0(\omega)}{\mathrm{i}\omega\varepsilon_0 4\pi}\left[\frac{\sin\alpha_1}{R_1^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(R_1+l)} - \frac{\sin\theta_2}{R_2^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(R_2+l)}\right] \tag{9.5.22}$$

对式（9.5.18）、（9.5.21）和（9.5.22）进行傅里叶逆变换，便可得到在球坐标系中表示的辐射场在时域的表示形式

$$H_\varphi(\vec{r},\omega) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{2}{\rho}I_0\left(t - \frac{r}{c}\right) - \frac{\cot\frac{\theta_1}{2}}{R_1}I_0\left(t - \frac{R_1 + l}{c}\right)\right.$$

$$
- \frac{\tan\dfrac{\theta_2}{2}}{R_2} I_0\left(t - \frac{R_2 + l}{c}\right)\Bigg], \tag{9.5.23}
$$

$$
\begin{aligned}
E_r(\vec{r},t) &= \frac{\eta_0}{4\pi}\left[\frac{\sin\alpha_1}{R_1}\cot\frac{\theta_1}{2} I_0\left(t - \frac{R_1 + l}{c}\right) - \frac{\sin\alpha_2}{R_2}\tan\frac{\theta_2}{2} I_0\left(t - \frac{R_2 + l}{c}\right)\right] \\
&\quad + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\cos\alpha_1}{R_1^2} Q\left(t - \frac{R_1 + l}{c}\right) - \frac{\cos\alpha_2}{R_2^2} Q\left(t - \frac{R_2 + l}{c}\right)\right]
\end{aligned} \tag{9.5.24}
$$

$$
\begin{aligned}
E_\theta(\vec{r},t) &= \frac{\eta_0}{4\pi}\left[\frac{2}{\rho} I_0\left(t - \frac{r}{c}\right) - \frac{\cos\alpha_1}{R_1}\cot\frac{\theta_1}{2} I_0\left(t - \frac{R_1 + l}{c}\right)\right. \\
&\quad \left. - \frac{\cos\alpha_2}{R_2}\tan\frac{\theta_2}{2} I_0\left(t - \frac{R_2 + l}{2}\right)\right] \\
&\quad + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\sin\alpha_1}{R_1^2} Q\left(t - \frac{R_1 + l}{c}\right) - \frac{\sin\alpha_2}{R_2^2}\tan\frac{\theta_2}{2} Q\left(t - \frac{R_2 + l}{2}\right)\right],
\end{aligned} \tag{9.5.25}
$$

其中，$Q(t) = \int_{-\infty}^{t} I_0(t')\,\mathrm{d}t'$，它是在时间 t 内的积累电荷。

下面我们对以上结果进行简单分析，以便了解瞬态辐射的一些基本特性。首先，从式（9.5.23）可以看出，H_φ 共由三部分组成：由到达观察点的时间可以看出，其中第一项表示由天线中心电流产生的辐射；由于 I_0（$t - l/c$）表示 t 时刻 $z = l$ 处的电流，所以第二项表示天线上臂电流所达到的最高端 $z = l$ 处所产生的辐射；根据类似的道理又可知，第三项表示天线下臂电流所达到的最下端 $z = -l$ 处产生的辐射。以上结果由图 9－13 加以表达。

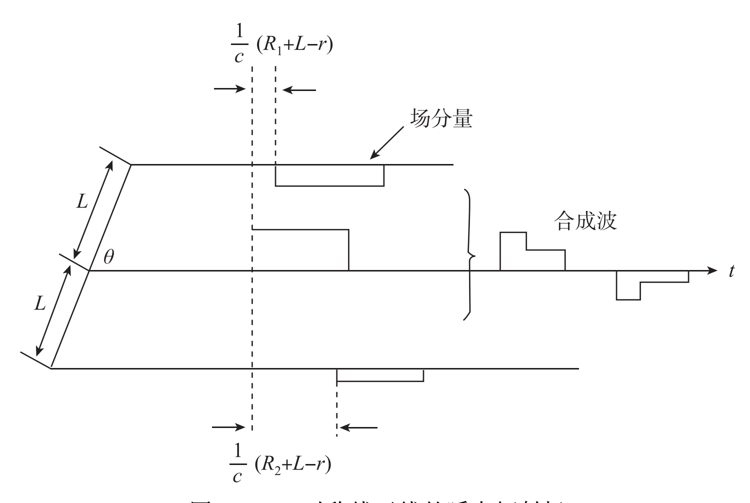


图 9－13　对称线天线的瞬态辐射场

由式（9.5.23）可以直接看出，电流端点产生的辐射场的大小与端点到观察

点的距离 r 成反比，这与时谐场的远区场相似。我们在分析中并没有作远区场近似，故所得结果对远区场和近区场都成立，这反映出稳态辐射和瞬态辐射的差别。观察 E_θ 的表示式（9.5.25）即可发现，除了与 H_φ 一样有三个辐射点外，还有由电流的两个端点处电荷所产生的辐射，它们的强度与端点到观察点距离的平方成反比，这一点与似稳场相似。E_r 的特点是，它不包含中心电流所产生的辐射，或者说中心电流的辐射场没有 E_r 分量。纵观以上结果可以发现，所设置的脉冲电流在天线上传播的过程中不产生辐射，这是因为在这段时间内电荷作匀速直线运动。

由图 9－13 不难看出，中心电流的辐射场最先到达观察点，所以在电流端点辐射场尚未到达观察点而只有中心辐射场的这段时间，观察点处的辐射场为

$$\begin{aligned} H_\varphi &= \frac{1}{2\pi\rho} I_0\left(t - \frac{r}{c}\right) \\ E_\theta &= \eta_0 H_\varphi \\ E_r &= 0 \end{aligned} \tag{9.5.26}$$

这表明，在这一段时间内辐射场的波前为球面，其幅度按 $1/\rho$ 的规律衰减，而且，电场与磁场相互垂直，其比值等于波阻抗。这与时谐场时的远区场相似。但是对瞬态辐射场而言，这一时段辐射场的以上特性并不分远场还是近场。

以上所讨论的辐射场的特性只在 $t \leqslant L/c$ 时是正确的，因为此后电流将在天线的终端点产生反射，天线上的电流不再是行波。考虑反射电流存在时的天线辐射也可以用类似的方法，其特性与行波状态相比将发生明显的变化。要想不受限制地维持行波状态，要么天线为无限长，要么终端接全吸收负载，这种要求实际上是无法实现的。

9.5.4　对称圆柱天线的瞬变电磁辐射

上一段所分析的线天线是一种理想化模型，对于实际的天线结构横向尺度的影响有时不能忽略。下面讨论的圆柱天线将计入天线柱半径 a 的作用。但是为了简化还是假定 $ka \ll 1$。天线的结构及坐标表示由图 9－14 示出。

和前面一样，我们假定天线足够长，在观察的时间段内天线电流尚未到达终端，故不必考虑终端对电流的反射作用。设天线的对称中心的间隙无限窄，并在该处接入一理想电压源，其电动势为 $U(t)$，内阻为零，在频域由 $U(\omega)$ 表示。

由于天线很细，可认为电流只有 z 分量。由此可以推知，天线所产生的电磁场在柱坐标系中仅有 H_φ，E_ρ 和 E_z 分量。由频域麦克斯韦方程可知，这些场分量存在以下关系

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{i}\omega\varepsilon_0 E_\rho(\vec{r},\omega) &= \frac{\partial}{\partial z} H_\varphi(\vec{r},\omega) \\ \mathrm{i}\omega\varepsilon_0 E_z(\vec{r},\omega) &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho H_\varphi(\vec{r},\omega)] \\ \mathrm{i}\omega\mu_0 H_\varphi(\vec{r},\omega) &= \frac{\partial}{\partial z} E_\rho(\vec{r},\omega) - \frac{\partial}{\partial\rho} E_z(\vec{r},\omega) \end{aligned}\right\} \tag{9.5.27}$$

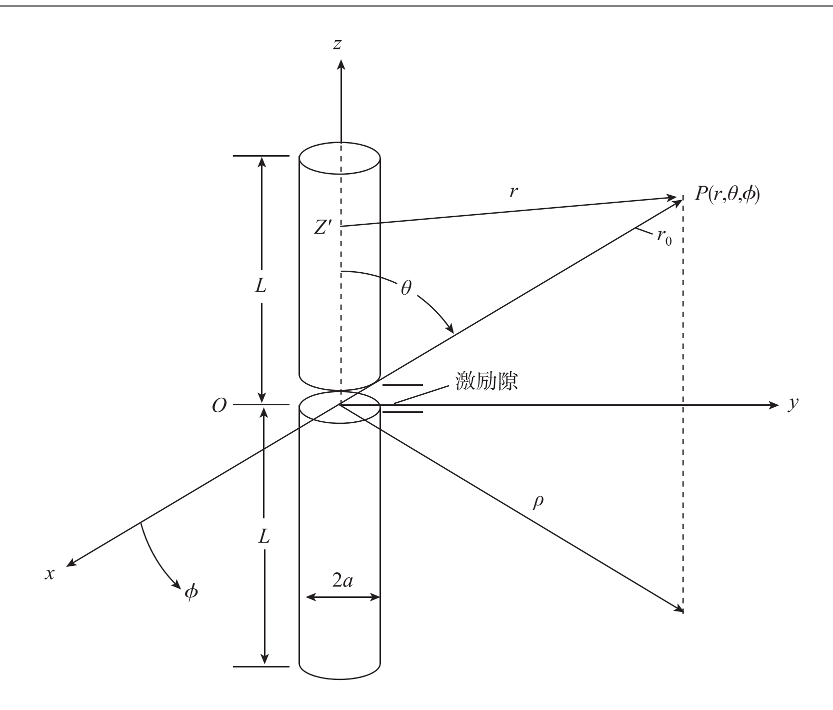


图 9－14　对称圆柱天线及其坐标表示

根据所给的天线激励条件我们又有

$$E_z(a,z,\omega) = -U(\omega)\delta(z) \tag{9.5.28}$$

由给定的电流分布和天线结构的旋转对称性可推知，所有场分量均与 φ 无关。为了进一步分析的方便，运用傅里叶变换再隐去一个空间变量 z。对各场量如 $H_\varphi(\rho,\ z,\ \omega)$ 作如下的变换

$$H_\varphi(\rho,\zeta,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} H_\varphi(\rho,z,\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta z}\mathrm{d}z \tag{9.5.29}$$

可把式（9.5.27）变为

$$\left.\begin{aligned}
\omega\varepsilon_0 E_\rho(\rho,\zeta,\omega) &= -\zeta H_\varphi(\rho,\zeta,\omega)\\
\omega\varepsilon_0 E_z(\rho,\zeta,\omega) &= \mathrm{i}\,\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho H_\varphi(\rho,\zeta,\omega)]\\
\omega\mu_0 H_\varphi(\rho,\zeta,\omega) &= -\zeta E_\rho(\rho,\zeta,\omega) + \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial\rho}E_z(\rho,\zeta,\omega)
\end{aligned}\right\} \tag{9.5.30}$$

而式（9.5.8）则成为

$$E(a,\zeta,\omega) = -U(\omega) \tag{9.5.31}$$

由方程组（9.5.30）可导出 E_z（ρ，ζ，ω）所满足的微分算子方程

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho\frac{\partial}{\partial\rho}E_z(\rho,\zeta,\omega)\right] + (k_0^2 - \zeta^2)E_z(\rho,\zeta,\omega) = 0 \tag{9.5.32}$$

这是一个零阶贝塞尔方程。考虑到我们所选择的谐波分量与时间的关系，可把在 $\rho > a$ 的区域解选作

$$E_z(\rho,\zeta,\omega) = CH_0^{(2)}(\rho\sqrt{k_0^2-\zeta^2}) \tag{9.5.33}$$

利用激励条件可以确定

$$C = -U(\omega)/H_0^{(2)}(a\sqrt{k_0^2-\zeta^2})$$

于是我们有在 ζ 域中的场解

$$E_z(\rho,\zeta,\omega) = -U(\omega)\frac{H_0^{(2)}(\rho\sqrt{k_0^2-\zeta^2})}{H_0^{(2)}(a\sqrt{k_0^2-\zeta^2})} \tag{9.5.34}$$

再变换回频域就是

$$E_z(\rho,z,\omega) = -\frac{U(\omega)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_0^{(2)}(\rho\sqrt{k_0^2-\zeta^2})}{H_0^{(2)}(a\sqrt{k_0^2-\zeta^2})}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta z}\mathrm{d}\zeta \tag{9.5.35}$$

显然，上式被积函数在 $\zeta=\pm k_0$ 是奇异的，积分实际上是不确定的，因为积分路径通过奇点。对于该积分的处理方法通常是采用索末菲路径，正如以前所做的那样。

直接求式（9.5.35）的积分是很困难的，我们仅用最速下降法求其近似解。如果仅考虑远区场即可令 $\rho\to\infty$，于是可把函数 $H_0^{(2)}$ 用其大宗量近似式代替。由于

$$H_0^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)},\quad |x|\to\infty$$

从而可把式（9.5.35）近似地表示成

$$\begin{aligned}E_z(\rho,z,\omega) &= -\frac{U(\omega)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\rho\sqrt{k_0^2-\zeta^2}}}{\sqrt{\pi\rho\sqrt{k_0^2-\zeta^2}}H_0^{(2)}(a\sqrt{k_0^2-\zeta^2})}\mathrm{d}\zeta\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}f(\zeta)\mathrm{e}^{\rho q(\zeta)}\mathrm{d}\zeta\end{aligned} \tag{9.5.36}$$

其中

$$f(\xi) = -\frac{U(\omega)}{2\pi}\frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta z}}{\sqrt{\pi\rho\sqrt{k_0^2-\zeta^2}}H_0^{(2)}(a\sqrt{k_0^2-\zeta^2})} \tag{9.5.37}$$

$$\mathrm{q}(\xi) = \mathrm{i}\sqrt{k_0^2-\zeta^2} \tag{9.5.38}$$

由最速下降法原理可知，由 $\mathrm{d}q(\zeta)/\mathrm{d}\zeta=0$ 可确定该问题的鞍点为 $\zeta=0$。若令

$$\frac{\mathrm{d}^2q(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta^2} = b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$$

由式（9.5.38）可得，$b=1/k_0,\theta_0=\pi/2$。由此可以确定最速下降路径通过鞍点时的方向角为

$$\theta = -\frac{\theta_0}{2}\pm\frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4},\quad \frac{\pi}{4}$$

于是可判定，由索末菲路径变到最速下降路径不会扫过被积函数 $f(\zeta)$ 的奇点。由于鞍点是一阶的，近似积分值可确定为

$$E_z(\rho,z,\omega) \approx \mathrm{i}\sqrt{\frac{2\pi}{b\rho}}f(\zeta)\,\mathrm{e}^{\rho q(\zeta)-\mathrm{i}\theta_0/2} = -\mathrm{i}\frac{U(\omega)}{\pi\rho}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0\rho}}{H_0^{(2)}(k_0a)} \tag{9.5.39}$$

原则上讲对上式求傅里叶逆变换就可以求得 E_z（ρ，z，t）。但是，这并不是容易做到的，尤其更难求得解析表达式。尽管如此，还是由此可以做一定的分析，从而得到一些有益的结论。

如果把天线看作一个时不变线性系统，则可由式（9.5.39）导出它的传递函数。为了使传递函数与 p 无关，定义一个新的传递函数 S（ω），其值为

$$S(\omega) = \frac{\rho}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0\rho}}\frac{E_z(\omega)}{U(\omega)} = -\frac{\mathrm{i}}{\pi}[H_0^{(2)}(k_0a)]^{-1} \tag{9.5.40}$$

从原传递函数中消去因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0\rho}$ 相当于把时间起点推移到 ρ/c。根据假定 $k_0a\ll1$，可以把式（9.5.40）中的 $H_0^{(2)}$（k_0a）用小宗量时的近似式代替，则有

$$S(\omega) \sim \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\omega a}{2c}\right) \tag{9.5.41}$$

这说明，S（ω）与 ω 之间是对数关系，即它随 ω 的变化是平缓的。这一结果意味着该系统对输入信号的频谱分布影响不大，也就是说辐射场的波形与天线的激励源 U（t）的形状没有明显的差异。这一结论是可以预想到的，因为我们的分析是在 $k_0a\ll1$ 的条件下进行的，这种情况与上面分析的线天线的性能应该比较接近。

由此例我们进一步看到电磁场问题时域分析的困难，到现在主要还是一条路子，即先求得频域解然后求傅里叶逆变换。但是，即使求得了频域解，也只有一些简单的情况才能求得其解析形式的逆变换。

9.5.5 分布加载天线的瞬变电磁辐射[3]

从前面的分析我们已经知道，为使天线系统的时域辐射场保持外加激励信号的波形，必须维持天线电流的行波状态，亦即消除电流在天线终端的反射。达到上述目标的一种方法是在天线终端加一定的负载，使其吸收流入的电流。这是一种集中加载形式，其缺点是只对窄带信号有较好的效果。为了扩大有效频带，常采用分布加载方式，如用电阻材料构造天线。下面就分布加载细天线的瞬态电磁辐射问题进行分析。

假设所分析的天线结构仍如图 9－14 所示，只是现在的天线由电阻材料构成。设天线单位长度的内阻抗是坐标 z 的函数，用 Z^i（z）表示。首先需要知道的是，具有怎样的内阻抗分布才能维持有限长细天线上电流的行波状态。由于天线足够细，可假定电流只有 z 向分量。和以前一样，我们先在频域对该种天线进行分析。

设频域电流为 $I(z,\omega)$，则由矢量位与电流的关系可知，$\vec{A}=\hat{z}A_z$，且

$$A_z(\vec{r},\omega) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-L}^{L} I(z',\omega)\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 r}}{r}\mathrm{d}z' \tag{9.5.42}$$

当场点取在天线的外表面时 $r=[(z-z')^2+a^2]^{1/2}$，由于

$$\vec{E}(\vec{r},\omega) = \mathrm{i}\omega\left(\vec{A}+\frac{1}{k_0^2}\nabla\nabla\cdot\vec{A}\right)$$

且在天线表面 A_z 仅为 z 的函数，于是我们有

$$E_z(z,\omega) = -\frac{1}{\mathrm{i}\omega\varepsilon_0\mu_0}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_0^2\right)A_z \tag{9.5.43}$$

另一方面

$$E_z(z,\omega) = -U(\omega)\delta(z) + Z^i(z)I(z,\omega) \tag{9.5.44}$$

其中，$U(\omega)$ 为天线中心所加电压源 $U(t)$ 的傅里叶变换。由上两式可以得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_0^2\right)A_z(z,\omega) = -\mathrm{i}\omega\varepsilon_0\mu_0[U(\omega)\delta(z) - Z^i(z)I(z,\omega)] \tag{9.5.45}$$

由 A_z（z，ω）的表达式（9.5.42）可以看出，式（9.5.45）是关于电流 I（z，ω）的积分方程。

由于场点取在天线表面，式（9.5.42）中的被积函数在 $z=z'$时趋于无限大，故积分值主要取决于在 $z=z'$邻域内积分。在此邻域内 $I(z',\ \omega)\approx I(z,\ \omega)$，并可近似地决定积分结果与 $I(z,\ \omega)$ 成正比。若比例常数用 ψ 表示，则可有

$$\int_{-L}^{L} I(z',\omega)\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0 r}}{r}\mathrm{d}z' = \psi I(z,\omega)$$

把这一结果代入式（9.5.45）就又得到 $I(z,\ \omega)$ 满足的微分方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_0^2\right)I(z,\omega) = -\frac{\mathrm{i}4\pi\omega\varepsilon_0}{\psi}[U(\omega)\delta(z) - Z^i(z)I(z,\omega)] \tag{9.5.46}$$

当 $z\neq 0$ 时上式成为

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k_0^2-\frac{\mathrm{i}4\pi\omega\varepsilon_0}{\psi}Z^i(z)\right]I(z,\omega) = 0 \tag{9.5.47}$$

我们的目的是选择适当的 $Z^i(z)$ 使天线上维持行波电流。设在频域行波电流具有的形式为

$$I(z,\omega) = C(L-|z|)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0|z|} \tag{9.5.48}$$

其中，C 为待定常数。把该表示代入（9.5.47）即可得到

$$Z^i(z) = \frac{\eta_0\psi}{2\pi(L-|z|)} \tag{9.5.49}$$

这就是为在天线上维持由式（9.5.48）表示的电流形态天线所应具有的阻抗分布。为了确定式（9.5.48）中的待定常数 C，可利用洛伦兹规范条件（1.2.12）。在天线表面这一条件可表示为

$$\frac{\partial}{\partial z}A_z(z,\omega) = -\mathrm{i}\omega\varepsilon_0\mu_0\varphi(z,\omega) \tag{9.5.50}$$

由于已设

$$A_z(z,\omega) = \psi \frac{\mu_0}{4\pi} I(z,\omega)$$

再考虑到 $I(z,\ \omega)$ 由式（9.5.48）表示，则由式（9.5.50）可得

$$\varphi(z,\omega) = \frac{\psi}{4\pi \mathrm{i}\omega\varepsilon_0}(ik_0CL + C - \mathrm{i}k_0C|z|)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0|z|}$$

当 $z=0^+$ 时可得

$$\varphi(0^+,\omega) = \frac{\psi}{4\pi \mathrm{i}\omega\varepsilon_0}(\mathrm{i}k_0L + 1)C \tag{9.5.51}$$

由于对称性在天线中心有

$$U(\omega) = \varphi(0^+,\omega) - \varphi(0^-,\omega) = 2\varphi(0^+,\omega)$$

把这一关系代入式（9.5.51）即有

$$C = \frac{2\pi \mathrm{i}\omega\varepsilon_0 U(\omega)}{\psi(\mathrm{i}k_0L + 1)} \tag{9.5.52}$$

于是由式（9.5.48）得到

$$\begin{aligned} I(z,\omega) &= \frac{2\pi \mathrm{i}\omega\varepsilon_0 U(\omega)}{\psi(\mathrm{i}k_0L + 1)}(L - |z|)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0|z|} \\ &= \frac{2\pi \mathrm{i}\omega\tau U(\omega)}{\eta_0\psi(\mathrm{i}\omega\tau + 1)}\left(1 - \frac{|z|}{L}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\frac{|z|}{c}} \end{aligned} \tag{9.5.53}$$

其中，$\tau = L/c$，为信号通过半个天线长度的渡越时间。

仔细地考察定义比例常数 ψ 的积分不难发现，ψ 并不是一个真正的常数而是一个与 z 和 ω 有关的系数。例如，在 $z=0$ 的值 ψ 可表示为

$$\psi = \frac{1}{I(0,\omega)}\int_{-L}^{L} I(z',\omega)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0R}}{R}\mathrm{d}z' \tag{9.5.54}$$

其中，$R = (z^2 + a^2)^{1/2}$。计算表明 ψ 随频率变化缓慢，这说明 $I(z,\ \omega)$ 与 $U(\omega)$ 的频谱接近，亦即 $A_z(z,\ \omega)$ 与 $U(\omega)$ 的频谱也接近，从而使这种分布加载结构具有较宽的频谱特性。

在实际应用中常常用电阻性加载并表示成

$$R^i(z) = \frac{\eta_0\alpha}{L - |z|} \tag{9.5.55}$$

其中 $\alpha = |\psi|/2\pi$。该式表明 $R^i(z)$ 在 $z=0$ 附近其值最小且变化比较平缓，而在 $|z|$ 接近 L 时迅速增大。加载电阻过大会带来一些问题，一方面实现起来有困难，此外也影响天线效率。

详细全面地分析这种天线结构的辐射场有很大难度，下面仅就一定条件下远区场的时域特性加以分析。首先通过传递函数的分析来了解这类天线的某些特性。为此，仍利用类似式（9.5.40）的传递函数的定义。针对现在的情况我们定义

$$S(\theta,\omega) = \frac{E_\theta(r,\theta,\omega)}{U(\omega)}\frac{r}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0r}} \tag{9.5.56}$$

与经典的传递函数定义相比，e^{-ik_0r} 的作用是使起始时间作了改变。求得 $S(\theta,\omega)$ 之后，就可用关系

$$rE_\theta(r,\theta,\omega) = S(\theta,\omega)U(\omega)$$

求得 E_θ。另一方面，如果已知道了天线的电流分布 $I(z,\omega)$ 就可通过式（9.5.4）求得 $E_\theta(r,\theta,\omega)$，即

$$E_\theta(r,\theta,\omega) = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi}\frac{e^{-ik_0r}}{r}\sin\theta\int_{-L}^{L}I(z',\omega)e^{-ik_0z'\cos\theta}dz' \tag{9.5.57}$$

其中，$I(z,\omega)$ 由式（9.5.53）给出。令 $\psi = 2\pi\alpha$，则有

$$S(\theta,\omega) = \frac{\sin\theta}{4\pi\alpha}\frac{(i\omega\tau)^2}{(1+i\omega\tau)}\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{|z'|}{L}\right)e^{-i\omega|z'|/c}e^{+ik_0z'\cos\theta}dz'$$

再令 $\zeta = z'/L$，上式又化作

$$S(\theta,\omega) = \frac{\sin\theta(i\omega\tau)^2}{4\pi\alpha(1+i\omega\tau)}\int_{-1}^{1}(1-|\zeta|)e^{-i\omega\tau|\zeta|+i\omega\tau s\cos\theta}d\zeta \tag{9.5.58}$$

如果只考虑 $\theta = \pi/2$ 这一特殊角度，则有

$$\begin{aligned}S\left(\frac{\pi}{2},\omega\right) &= \frac{1}{4\pi\alpha}\frac{(i\omega\tau)^2}{(1+i\omega\tau)}\int_{-1}^{1}(1-|\zeta|)e^{-i\omega\tau|\zeta|}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha}\left(1+\frac{e^{-i\omega\tau}-2}{1+i\omega\tau}\right)\end{aligned} \tag{9.5.59}$$

由此很容易分析 $S\left(\frac{\pi}{2},\omega\right)$ 的低频和高频特性。由 $e^{-i\omega\tau}$ 的近似展开式得知

$$S\left(\frac{\pi}{2},\omega\right)\to-\frac{(\omega\tau)^2}{4\pi\alpha},\quad 当\ \omega\tau\ll 1\ 时$$

$$S\left(\frac{\pi}{2},\omega\right)\to\frac{1}{2\pi\alpha},\quad 当\ \omega\tau\gg 1\ 时$$

由此可见，在低频时 $S(\pi/2,\omega)$ 虽然与频率高度相关，但辐射很弱；在高频段 $S(\pi/2,\omega)$ 几乎与频率无关，可近似认为是非色散的。

为了具体求得远区辐射场的时域波形，需要给出激励电压的函数表示。假设 $U(t)$ 为一高斯脉冲，即令

$$U(t) = e^{-t^2/(2T^2)} \tag{9.5.60}$$

则有

$$U(\omega) = \sqrt{2\pi}Te^{-T^2\omega^2/2} \tag{9.5.61}$$

从而可知

$$\begin{aligned}rE_\theta\left(\frac{\pi}{2},\omega\right) &= S\left(\frac{\pi}{2},\omega\right)U(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha}\left(1+\frac{e^{-i\omega\tau}-2}{1+i\omega\tau}\right)\sqrt{2\pi}Te^{-T^2\omega^2/2}\end{aligned} \tag{9.5.62}$$

为了求得 $rE_\theta\left(\frac{\pi}{2},\ t\right)$，需要求上式的傅里叶逆变换，这取决于以下两部分傅

里叶逆变换的结果

$$f_1(\omega) = \frac{1}{1+\mathrm{i}\omega\tau}\sqrt{2\pi}T\mathrm{e}^{-T^2\omega^2/2} \tag{9.5.63}$$

$$f_2(\omega) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}}{1+\mathrm{i}\omega\tau}\sqrt{2\pi}T\mathrm{e}^{-T^2\omega^2/2} \tag{9.5.64}$$

由于存在以下变换关系

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega = \begin{cases}\dfrac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}, & t \geqslant 0\\ 0, & t < 0\end{cases}$$

故有

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-\xi^2/(2T^2)}\mathrm{e}^{-(t-\xi)/\tau}\mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{-[(\frac{\xi}{T}-\frac{T}{\tau})/\sqrt{2}]^2+\frac{T^2}{2\tau^2}}\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

令 $\zeta = \left(\dfrac{\xi}{T}-\dfrac{T}{\tau}\right)$，则

$$f_1(t) = \frac{T}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}\mathrm{e}^{T^2/(2\tau^2)}\int_{-\infty}^{(\frac{t}{T}-\frac{T}{\tau})}\mathrm{e}^{-\zeta^2/2}\mathrm{d}\zeta$$

再利用关系

$$1+\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\zeta^2/2}\mathrm{d}\zeta$$

其中，erf 表示误差函数，即可得到

$$f_1(t) = \frac{T}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}\mathrm{e}^{T^2/(2\tau^2)}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left\{1+\mathrm{erf}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{t}{T}-\frac{T}{\tau}\right)\right]\right\} \tag{9.5.65}$$

观察 $f_2(\omega)$ 与 $f_1(\omega)$ 的关系不难发现，$f_2(t)$ 与 $f_1(t)$ 的差异仅是把 t 换作 $t-\tau$。这样一来，利用式（9.5.60）和（9.5.65）便可得到

$$\begin{aligned} rE_\theta\left(\frac{\pi}{2},t\right) = \frac{1}{2\pi\alpha}\Bigg\{&\mathrm{e}^{-t^2/(2T^2)} - \frac{2T}{\tau}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{T^2/(2\tau^2)}\mathrm{e}^{-t/\tau}\left\{1+\mathrm{erf}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{t}{T}-\frac{T}{\tau}\right)\right]\right\} \\ &+\frac{T}{\tau}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{T^2/(2\tau^2)}\mathrm{e}^{-\frac{t-\tau}{\tau}}\left\{1+\mathrm{erf}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{t-\tau}{T}-\frac{T}{\tau}\right)\right]\right\} \end{aligned} \tag{9.5.66}$$

这一结果显示，天线辐射场由几部分组成。式（9.5.66）中的第一项为激励源所在点发出的辐射，其波形就是激励源电压随时间变化的高斯脉冲波形。从天线中心开始向两端延伸是连续加大的电阻加载，使得沿天线运动的电荷被连续减速，而且接近天线终点时减速迅速增大，由此便产生了其余两项所表示的辐射。还可以看出，如果天线无限长，即 $\tau\to\infty$，则近似有

$$rE_\theta\left(\frac{\pi}{2},t\right)\to\frac{1}{2\pi\alpha}\mathrm{e}^{-t^2/(2T^2)} \tag{9.5.67}$$

这时只有激励中心所发出的辐射，其波形与激励源相同。这是因为，当天线

为无限长时按式（9. 5. 55）设定的电阻将变得无限小且均匀，其效果接近于无限长的理想导体细天线，其辐射特性与式（9. 5. 26）所示的结果类似。

如果 $\theta \neq \pi/2$，可利用式（9. 5. 58）求得结果，结论基本类似，但辐射幅度会减弱。

第 10 章　计算电磁学原理

从前面的分析中我们已看到，各种电磁场问题基本上都归结为微分算子方程或积分算子方程的求解。然而，只有对简单而典型的边界形状才能得到微分算子方程的解析解，对积分算子方程而言只有极个别的形式才有解析解。因此，列出算子方程只是解决电磁场问题的第一步，获得其解才能真正解决问题。在电磁学的发展历史上，当不能得到算子方程的精确解析解时如何求得近似解曾经是个重要的研究方向，并对解决很多实际电磁场问题做出了很大贡献。电子计算机的发明和发展为获得算子方程的数值近似解提供了理想的工具，并促成了计算电磁学的诞生，使得原来无法解决的许多复杂电磁场问题获得了近似数值解，从而使电磁场工程的技术水平得以迅速提升。在当代计算电磁学已经成为电磁理论研究的主要方向，而且已经有了非常丰富的内容。本章主要讨论有关计算电磁学的基本原理。

10.1　算子方程近似求解的加权余量法

加权余量法是线性算子方程数值解法的一种一般性理论框架，大部分已有的求解电磁场问题的数值方法都可用这一理论来解释[65]，所以，在这一章论述电磁场问题数值解法的开头先讨论加权余量法的原理是比较合适的。但是，在以后的讨论中，除了所论述的方法与之有自然的联系外，我们仍然按自身的独特方式叙述，而不再特意论述它们与加权余量法之间的关系。

10.1.1　加权余量法基本原理

为了叙述方便，仅以微分算子方程为例说明加权余量法的基本原理。除了不涉及边界条件外，所述原理也适用于积分算子方程。

设 A 为线性微分算子，$A: H \to H$，H 为希尔伯特空间，其定义域为 $D(A)$，值域为 $R(A)$。由算子 A 构成以下边值问题

$$\begin{aligned} Au(\vec{r}) &= f(\vec{r}), \vec{r} \in \Omega, \\ Bu(\vec{r}_b) &= g(\vec{r}_b), \vec{r}_b \in \Gamma, \end{aligned} \tag{10.1.1}$$

其中 B 为线性算子，Γ 为 Ω 的边界，$f(\vec{r})$ 和 $g(\vec{r}_b)$ 为已知函数。这是一种确定性问题的形式。如果把 $f(\vec{r})$ 换成 $\lambda u(\vec{r})$，就成为本征值问题。

如果 $\{u_i\}_{i=1}^{N}$ 为已知线性无关函数集作为展开函数，可把问题（10.1.1）的解 $u(\vec{r})$ 近似地表示成

$$u^N(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i u_i\,。\tag{10.1.2}$$

一般情况下，这样的近似解不会使控制方程和边界条件得到精确的满足，把由此产生的误差称为余量，分别用 $R_e(\vec{r})$ 和 $R_b(\vec{r_b})$ 表示，则有

$$\begin{aligned} R_e(\vec{r}) &= Au^N(\vec{r}) - f(\vec{r}), \\ R_b(\vec{r_b}) &= Bu^N(\vec{r_b}) - g(\vec{r_b})。\end{aligned}\tag{10.1.3}$$

对精确解 $u(\vec{r})$ 而言，余量应该等于零，余量的大小决定于近似解的精确程度。问题是用什么方法估算余量的大小才是合理的。由于余量是 $\vec{r}$ 的函数，如果仅要求在平均意义下等于零，则显然不能限制实际可能存在的最大误差。比较合理的一种方法是对余量进行加权平均，从而更有效地控制误差。

加权余量平均的做法是，选择一线性无关序列 $\{w_j\}_{j=1}^{N}$ 作为权函数，然后对方程的余量 $R_e(\vec{r})$ 作内积，并用权函数边值的适当变换 pw_j 对边界条件的余量进行内积，令这些内积等于零就得到

$$\langle R_e, \omega_j \rangle_\Omega + \langle R_b, P\omega_j \rangle_\Gamma = 0, j = 1,2,\cdots,N。\tag{10.1.4}$$

把（10.1.2）和（10.1.3）代入上式即成为

$$\langle A\sum_{i=1}^{N} \alpha_i u_i(\vec{r}) - f(\vec{r}), \omega_j \rangle_\Omega + \langle B\sum_{i=1}^{N} \alpha_i u_i(\vec{r_b}) - g(\vec{r_b}), P\omega_j \rangle_\Gamma = 0, \quad j = 1,2,\cdots,N。\tag{10.1.5}$$

此乃以 α_i，$i=1$，2，…，N 为未知数的 N 个代数方程。解出 α_i 后即可得到 $u^N(\vec{r})$，这样的 $u^N(\vec{r})$ 即为边值问题（10.1.1）的在加权平均余量为零意义下的近似解。所以，加权余量法的作用是把算子方程的求解问题转化为一个代数方程组的求解问题，而代数方程组可以用计算机求得精度很高的数值解。

加权余量法可以分为两种情况。如果所选展开函数使近似解满足所给边界条件，即有 $R_b=0$，于是式（10.1.5）成为

$$\langle A\sum_{i=1}^{N} \alpha_i u_i(\vec{r}), \omega_j \rangle_\Omega - \langle f(\vec{r}), \omega_j \rangle_\Omega = 0,\tag{10.1.6}$$

这是一种内域积分形式的加权余量法或广义的矩量法。如果近似解已精确地满足控制方程，即已经有 $R_e(\vec{r})=0$，这时的式（10.1.5）变成

$$\langle B\sum_{i=1}^{N} \alpha_i u_i(\vec{r_b}), P\omega_j \rangle_\Gamma - \langle g(\vec{r_b}), P\omega_j \rangle_\Gamma = 0,\tag{10.1.7}$$

这是一种边界积分形式的加权余量法。

显然，加权余量法所求近似解的精确程度和所需 N 的大小与所选的展开函数和权函数有关。因此，如何选择展开函数和权函数是加权余量法具有良好性能的关键。

10.1.2　内域积分形式的加权余量法——矩量法

如上所述，内域积分形式的加权余量法的特点是，用所选展开函数所表示的

算子方程的近似解已经能精确地满足边界条件。对一般的由线性微分算子所构成的方程而言，做到这一点往往是很困难的。但是，对于积分算子方程而言，由于没有单独的边界条件的要求，更适合用这种方法求解。所以，在电磁场问题中主要用这种方法求解积分方程，并称其为矩量法（Method of Moment）。

作为加权余量法的第一步是选择合适的展开函数，以便用尽量少的展开项尽量精确地表示出方程的近似解。由函数的近似表示理论可知，由于精确解 $u(\vec{r})$ 属于算子 A 的定义域 $D(A)$，展开函数系 $\{u_i(\vec{r})\}_{i=1}^{N}$ 的最佳选择应该是，当 N 足够大时它能成为 $D(A)$ 的基函数。

展开函数选定后，近似解就可表示为式（10.1.2）的形式，而余量 R_e 就可表示为

$$R_e(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A u_i(\vec{r}) - f(\vec{r})。\tag{10.1.8}$$

下一步的关键是选择合适的权函数。显然，为了不使权函数本身的作用掩盖了大的 $R_e(\vec{r})$ 的存在，从而得不到较高精度的近似解，要求权函数在计算域中不变号，而且其线性组合在任何一点不为零。我们令

$$f^N(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A u_i(\vec{r}),\tag{10.1.9}$$

则 $R_e(\vec{r}) = f^N(\vec{r}) - f(\vec{r})$。因为 $f^N(\vec{r})$，$f(\vec{r}) \in R(A)$，而权函数的作用是使 $R_e(\vec{r}) = f^N(\vec{r}) - f(\vec{r})$ 尽量小，也就是使 $f^N(\vec{r})$ 尽量接近 $f(\vec{r})$，故权函数也必须属于 $R(A)$，而且当 N 很大时，权函数 $\{w_j\}_{j=1}^{N}$ 构成 $R(A)$ 的基函数。

选定了权函数后，就可根据式（10.1.6）得到

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \langle Au_i, w_j \rangle_\Omega = \langle f, w_j \rangle_\Omega, \\ \qquad j = 1, 2, \cdots, N, \end{cases}\tag{10.1.10}$$

这已经是一个以 α_i，$i=1$，2，…，N 为未知量的代数方程组。当然，为了真正计算出未知量 α_i，先要完成各项内积计算，然后解 N 阶代数方程组。当 N 相当大时，其计算量是非常巨大的，一般地只有高性能的计算机才能完成。

根据权函数的不同特点，矩量法又可分为不同的类型，常用的有

1. 点配法

只要求在一定的离散点上满足方程（10.1.10）的方法称为点配法，这种情形相当于选择 δ 函数作为权函数，即

$$\omega_j(\vec{r}) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_j), j - 1, 2, \cdots, N,$$

这时式（10.1.10）变为

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i A u_i(\vec{r}_j) = f(\vec{r}_j), \\ \qquad j = 1, 2, \cdots, N \end{cases}\tag{10.1.11}$$

显然，在现在的情况下，余量 $R_e(\vec{r})$ 已不是在全域加权平均意义下等于零，

而只是在 N 个离散点上等于零。这样所求的近似解 $u^N(\vec{r})$ 也只是在 N 个离散点上才满足方程，误差的大小与 N 数的大小直接相关。这种方法的优点是省掉了很多复杂的内积计算，缺点则是精度较差。

2. 子域法

该方法是把解域划分为一定数量的足够小的子域，要求在每个子域内余量的算术平均值等于零，即相当于取权函数为

$$w_j(\vec{r}) = \begin{cases} 1, \vec{r} \in \Delta\Omega_j, \\ 0, \vec{r} \notin \Delta\Omega_j, \end{cases}$$

$$j = 1,2,\cdots,N, \sum_{j=1}^{N} \Delta\Omega_j, = \Omega, \tag{10.1.12}$$

这时所得代数方程成为

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \int_{\Delta\Omega_j} Au_i(\vec{r})\,\mathrm{d}\Omega = \int_{\Delta\Omega_j}, f\mathrm{d}\Omega, j = 1,2,\cdots,N \tag{10.1.13}$$

这种方法的优点在于不仅使内积的计算仅限于每个子域内，且由于在每个子域内权函数等于 1，也使得内积的积分计算变得简单。但是，由于只要求每个子域内的余量算术平均为零，只有子域取得非常小才能保证足够的精度。

3. 伽辽金（Galerkin）法

在内域积分形式的加权余量法中，如果选的权函数与展开函数相同，即

$$\{w_j\} = \{u_j\}, j = 1,2,\cdots,N \tag{10.1.14}$$

就称这种方法为伽辽金法。在这种情况下我们有

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \langle Au_i, u_j\rangle_\Omega = \langle f, u_j\rangle_\Omega, \quad j = 1,2,\cdots,N。 \tag{10.1.15}$$

这一方法具有较高的精度，但计算量相对地也较大。

一般地讲展开函数和权函数的选择是相互独立的，但在伽辽金法中二者却联系到了一起。根据上面的讨论，展开函数的最佳选择是 $D(A)$ 的基函数，而权函数的最佳选择是 $R(A)$ 基函数。显然，如果已知算子 A 的值域 $R(A)$ 是其定义域的子空间，即 $R(A) \subset D(A)$，则由 A 所构成的算子方程适用于伽辽金法。

在实际问题中不容易知道 $R(A)$，必须用其他方法判定能否应用伽辽金法。一种简单的方法是通过 A 的伴随算子 A^a 的定义域 $D(A^a)$ 和值域 $R(A^a)$ 来考察。根据算子理论知道

$$D(A^a) = N(A^a) \oplus \overline{R(A)},$$

其中 $N(A^a)$ 表示 A^a 的零空间，$\oplus$表示直和，集合符号上面的一横表示闭集。由此得知 $R(A) \subset D(A^a)$。类似地又有

$$D(A) = N(A) \oplus \overline{R(A^a)},$$

而为使方程 $Au(\vec{r}) = f(\vec{r})$ 解唯一，要求 $N(A)$ 为空集，于是有 $D(A) = \overline{R(A^a)}$。

如果 $D(A) = D(A^a)$，则根据上面的讨论必有 $R(A) \subset D(A)$，这种算子为自伴的。也就是说，对于自伴算子构成的算子方程可以应用伽辽金法。反之，若 D

$(A) \neq D(A^a)$ 则没有理由相信 $D(A)$ 的基函数一定也是 $R(A)$ 的基函数。在电磁场理论中常常遇到 $D(A) \neq D(A^a)$ 的情形，这时对能否应用伽辽金法就需要仔细评估。

以上原理虽然是以标量算子和标量函数为例论述的，但对矢量算子和矢量函数也是适用的，不同的主要表现在内积的定义上，而这些不会增加任何困难。

10.2　频域积分算子方程及其矩量解法

从前面几章分析电磁问题中我们已经看到，很多电磁场问题都可归结为求解相应的积分算子方程。遗憾的是，大部分积分方程还无法获得解析解，寻求近似解是解决问题的主要方法，已经发现，矩量法是获得其数值解的非常有效的途径，而这也是现代计算电磁学发展的起点。

10.2.1　电磁场问题中的频域积分算子方程

用矩量法求得电磁场问题的数值解，在计算电磁学的发展中是研究最早和最充分的方面，其中的一个重要方法是把问题用积分算子方程描述。在上面几章讨论的各类电磁场问题中，有许多复杂的情况我们都归结到求解某种积分算子方程。积分方程方法有其独特的优越性，在电磁散射问题中我们已发现，当散射体为均匀媒质时，可以用表面积分方程表示，这时的计算域就仅限于散射体的表面，这可以大大减少计算的总量。

导出电磁场问题的积分算子方程有多种方法，对于电磁散射问题借助于矢量势函数推导是一种较简单直接的方法。

设散射体所占据的空间为 V，其表面边界为 S。V 的外部为均匀媒质空间，并存在一场源。该源在不存在散射体时在空间产生的电磁场就是该散射问题的入射场，用 $\vec{E}_{inc}(\vec{r})$ 和 $\vec{H}_{inc}(\vec{r})$ 表示。在这种入射场的作用下在散射体中引发诱导等效电流 $\vec{J}_e(\vec{r})$ 和磁流 $\vec{M}_e(\vec{r})$，它们在空间所产生的电磁场用 $\vec{E}_s(\vec{r})$ 和 $\vec{H}_s(\vec{r})$ 表示并称为散射场。于是在散射体外部总的电磁场 $\vec{E}(\vec{r})$ 和 $\vec{H}(\vec{r})$ 就成为

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{inc}(\vec{r}) + \vec{E}_s(\vec{r}), \vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_{inc}(\vec{r}) + \vec{H}_s(\vec{r})。\qquad (10.2.1)$$

另一方面，由于电型矢势 $\vec{A}(\vec{r})$ 和磁型矢势 $\vec{A}_m(\vec{r})$ 在洛伦兹规范条件下分别满足方程（1.2.14）和（1.2.26），则根据均匀媒质空间中源与矢势用格林函数所表示的关系可知

$$\vec{A}(\vec{r}) = \mu\int_V G(\vec{r},\vec{r}')\, \vec{J}_e(\vec{r}')\mathrm{d}V', \qquad (10.2.2)$$

$$\vec{A}_m(\vec{r}) = \varepsilon\int_V G(\vec{r},\vec{r}')\, \vec{M}_e(\vec{r}')\mathrm{d}V', \qquad (10.2.3)$$

其中 $G(\vec{r}, \vec{r}')$ 为无界均匀各向同性媒质空间的格林函数。由电场与矢势的关系可把散射场表示为

$$\vec{E}_s(\vec{r}) = -\mathrm{i}\omega\left(\vec{A}(\vec{r}) + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r})\right) - \frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\vec{A}_m(\vec{r}), \tag{10.2.4}$$

$$\vec{H}_s(\vec{r}) = \frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A}(\vec{r}) - i\omega\left(\vec{A}_m(\vec{r}) + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\vec{A}_m(\vec{r})\right)。 \tag{10.2.5}$$

如果散射体为理想导体，则等效电流只存在于导体表面，即$\vec{J}_e(\vec{r}) = \vec{J}_s(\vec{r})$，而且

$$\vec{J}_s(\vec{r}) = \vec{n}\times\vec{H}(\vec{r}),$$

同时有$\vec{M}_e(\vec{r}) = 0$。于是，有以下适用于理想导电散射体的方程

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{inc}(\vec{r}) - \mathrm{i}\omega\left(\vec{A}(\vec{r}) + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r})\right), \tag{10.2.6}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_{inc} + \frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A}(\vec{r})。 \tag{10.2.7}$$

由于在理想导体表面有边界条件 $\vec{n}\times\vec{E}(\vec{r}) = 0$，故由式（10.2.6）可得

$$\vec{n}\times\vec{E}_{inc}(r) = \vec{n}\times\mathrm{i}\omega\left[\vec{A}(\vec{r}) + \frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r})\right], \vec{r}\in S。 \tag{10.2.8}$$

由式（10.2.2）可知，这是个以$\vec{J}_s(\vec{r})$为未知量的积分算子方程，而且是一个第一类弗雷德霍姆型的电场积分算子方程。

另外，考虑到在导体边界有 $\vec{n}\times\vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}_s(\vec{r})$，则由式（10.2.7）可以得到

$$\vec{n}\times\vec{H}_{inc}(\vec{r}) = \vec{J}_s(\vec{r}) - \frac{1}{\mu}\vec{n}\times\nabla\times\vec{A}(\vec{r}), \vec{r}\in S。 \tag{10.2.9}$$

这是个第二类弗雷德霍姆型的磁场积分方程。

如果散射体为一无限长均匀导体柱，入射电场只有沿导体柱的纵向分量，则导体表面电流也只有沿导体柱纵向分量。于是$\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r}) = 0$，这时式（10.2.9）就变成

$$E_{inc}(\vec{\rho}) = \frac{\omega\mu}{4}\int_\Gamma J_s(\vec{\rho})H_0^{(2)}(k|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|)\mathrm{d}\Gamma', \tag{10.2.10}$$

其中 Γ 为导体柱横截面边界。这里用到了无界均匀媒质空间的二维格林函数。

不难发现，把适用于一般理想导电散射体的积分算子方程（8.1.30）用于上面考虑的无限长导体柱的散射问题，也能立即得到方程（10.2.10）。

10.2.2　二维散射问题的矩量法应用

作为矩量法对二维问题应用的实例，我们考虑无限长理想导体柱对垂直入射波的散射问题。首先讨论 TM 波入射问题。如果用 u 表示导体柱横截面边界 Γ 的参变量，则散射体表面电流 $J_{sz}(u)$ 满足以下积分方程

$$E_{iz}(u) = \frac{k\eta}{4}\int_\Gamma J_{sz}(u')H_0^{(2)}(kR)\mathrm{d}u', \tag{10.2.11}$$

其中 $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$，称为特性阻抗，而

$$R = \sqrt{[x(u) - x(u')]^2 + [y(u) - y(u')]^2}。 \tag{10.2.12}$$

为了说明计算方法方便明了，我们选择脉冲函数 $P_n(u)$ 作为展开函数，用 δ 函数作为权函数，其中

$$P_n(u) = \begin{cases} 1, u \in \Delta_n, \\ 0, \text{其他}, \end{cases} \tag{10.2.13}$$

于是近似解的形式为

$$J_{sz}^N(u) = \sum_{n=1}^N j_n P_n(u)。 \tag{10.2.14}$$

把式（10.2.14）代替（10.2.11）中的 $J_{sz}(u)$ 便得到

$$E_{iz}(u) - \frac{k\eta}{4}\sum_{n=1}^N j_n \int_{\Delta_n} H_0^{(2)}(kR)\mathrm{d}u' = R_e(u), \tag{10.2.15}$$

其中 Δ_n 为把 Γ 分为 N 段中的第 n 段。取权函数为 δ 函数序列 $\delta_m = \delta(u - u_m)$，$m = 1, 2, \cdots, N$，用以对式（10.2.15）作内积并令 $\langle R_e(u), \delta_m \rangle = 0$，则我们有

$$E_{iz}(u_m) = \frac{k\eta}{4}\sum_{n=1}^N j_n \int_{\Delta_n} H_0^{(2)}(kR_m)\mathrm{d}u', m = 1, 2, \cdots, N。 \tag{10.2.16}$$

令

$$Z_{mn} = \frac{k\eta}{4}\int_{\Delta_n} H_0^{(2)}(kR_m)\mathrm{d}u', m, n = 1, 2, \cdots, N, \tag{10.2.17}$$

则（10.2.16）可以表示为

$$E_{iz}(m) = \sum_{n=1}^N z_{mn} j_n, \quad m = 1, 2, \cdots, N, \tag{10.2.18}$$

也可以表示为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} E_{iz}(u_1) \\ E_{iz}(u_2) \\ \vdots \\ E_{iz}(u_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1N} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{N1} & z_{N2} & \cdots & z_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_i \\ j_2 \\ \vdots \\ j_N \end{bmatrix}。$$

显然，为了计算 j_n，首先要计算矩阵元素 z_{mn}。如果 Δ_n 取得足够小，则式（10.2.17）可以近似表示为

$$z_{mn} \approx \frac{k\eta}{4} l_n H_0{}^{(2)}(kR_{mn}), m \neq n,$$

其中

$$R_{mn} = \sqrt{[x(u_m) - x(u_n)]^2 + [y(u_m) - y(u_n)]^2},$$

l_n 为 Δ_n 的长度。

当 $m = n$ 时，$R_{mn} = 0$，这时 $H_0^{(2)}(kR_{mn})$ 是奇异的，必须另加考虑。由汉克尔函数渐近表示可知，当 kR 很小时，有以下近似表示

$$H_0{}^{(2)}(kR) \approx \left(1 - \frac{(kR)^2}{4}\right) - \mathrm{i}\left\{\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\gamma kR}{2}\right) + \left[\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{\gamma kR}{2}\right)\right](kR)^2\right\} + o[(kR)^4], \tag{10.2.19}$$

其中 $\gamma = 1.781072418\cdots$。当边界 Γ 所分段数 N 足够大，每一段的弯曲度就会变得很小，甚至可近似地视为直线段，并可进一步忽略近似式（10. 2. 19）中的高阶项，于是

$$\int_{\Delta_n} H_0^{(2)}(kR_{mn})\mathrm{d}u' \approx 2\int_0^{l_m/2}\left[1 - \mathrm{i}\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{\gamma ks}{2}\right)\right]\mathrm{d}s$$

$$= l_m - \mathrm{i}\frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{\gamma kl_m}{2}\right) - 1\right], m = 1,2,\cdots,N,$$

则有

$$z_{mm} \approx \frac{k\eta l_m}{4}\left\{1 - \mathrm{i}\frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{\gamma kl_m}{4}\right) - 1\right]\right\}, m = 1,2,\cdots,N。\quad(10.2.20)$$

到此，矩阵元素已全部计算出来，所有 j_n 就可以通过矩阵方程（10. 2. 18）计算出来。由此例可以看出矩量法求解积分方程的一个特点，即所得矩阵是满秩的，这使得矩阵求逆计算量较大。当 N 很大时，这个问题就很突出。

如果入射的是 TE 波，即只有 H_{iz} 分量，则表面电流只有横向分量 $\vec{J}_{s,t}$，它满足磁场积分方程为

$$\begin{aligned} H_{iz}(u) &= -J_{st}(u) - \left[\frac{1}{\mu}\hat{z}\cdot(\nabla\times\vec{A}\,)\right]_{S^+} \\ &= -J_{st}(u) - \frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right]_{S^+}, \end{aligned}\quad(10.2.21)$$

其中

$$\vec{A}(u) = \frac{\mu}{4\mathrm{i}}\int_\Gamma \vec{t}(u')\,J_{st}(u')H_0^{(2)}(kR)\mathrm{d}u'。$$

S^+ 为导体柱表面的外侧，$\vec{t}$ 为 Γ 上的横向单位切向矢量。如果用 Ω 表示 $\vec{t}$ 与 x 轴的夹角，则有

$$\vec{t}(u) = \hat{x}\cos\Omega(u) + \hat{y}\sin\Omega(u)$$

与上面的做法类似，把 Γ 分成 N 个单元 Δ_n，$n = 1, 2, \cdots, N$，其长度为 l_n。若展开函数仍用 $P_n(u)$，则有

$$J_{st}^N(u) = \sum_{n=1}^N j_nP_n(u)。$$

在权函数 $\delta_n = \delta(u - u_n)$ 的作用下，导致矩阵方程

$$\begin{bmatrix} H_{iz}(u_1) \\ H_{iz}(u_2) \\ \vdots \\ H_{iz}(u_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1N} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{N1} & z_{N2} & \cdots & z_{NN} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_N \end{bmatrix},\quad(10.2.22)$$

其中

$$z_{mn} = \frac{k}{4\mathrm{i}}\int_{\Delta_n}\left[\sin\Omega(u')\frac{x(u_m) - x(u')}{R_m} - \cos\Omega(u')\frac{y(u_m) - y(u')}{R_m}\right]\cdot H_1^{(2)}(kR_m)\mathrm{d}u'$$

$$m,n = 1,2,\cdots,N, m \neq n\quad(10.2.23)$$

矩阵的对角线元素由以下极限式给出

$$z_{mn} = -1 + \lim_{\substack{x \to x_m \\ y \to y_m}} \frac{k}{4\mathrm{i}} \int_{\Delta_n} \left[\sin\Omega(u') \frac{x(u) - x(u')}{R_m} - \cos\Omega(u') \frac{y(u) - y(u')}{R_m} \right] \cdot H_1^{(2)}(kR_m)\mathrm{d}u', \quad m = 1, 2, \cdots, N。 \tag{10.2.24}$$

其中的极限表示观察点（x，y）从 S 外趋于点（x_m，y_m），当 N 很大，每一单元都可视为平直的，则 $z_{mm} \approx -\dfrac{1}{2}$。

以上所举算例，矩阵元 z_{mn} 可以简化计算。在很多问题中可能很难简化，这就要求计算大量的数值积分。

10.2.3　谐振问题和混合积分方程法

用矩量法求解散射问题的积分方程时，一般都能得到比较精确的数值解，但有时也会出现例外。例如，如果散射体为半径为 a 的圆柱导体，当 TM 入射波的频率满足条件 $ka = 2.405$ 时，计算结果将出现严重的误差，即使划分更精细的单元，也得不到改善。后来查明，这类现象是散射体的内谐振导致方程解的非惟一性造成的。

分析表明，很多电磁场问题，尤其是电磁散射和辐射问题都可以用积分方程来描述。这些方程以第一类和第二类弗雷德霍姆积分方程为主，积分核为自由空间的格林函数或其微商（或二者的混合体），对这类方程解的存在性和惟一性的讨论，是一个经典课题。对第一类弗雷德霍姆积分方程的讨论更困难。在数学理论中，有关退化核的第二类弗雷德霍姆积分方程的解存在惟一性的结论实际上也适用于一般的线性算子方程。

设有线性算子方程

$$Lu = f, \tag{10.2.25}$$

若相应的齐次方程

$$Lu = 0 \tag{10.2.26}$$

有非平凡解，则方程（10.2.25）的解就不是惟一的。反之，若方程（10.2.25）的解不是惟一的，则方程（10.2.26）就有非平凡解。

以上结论的证明很简单。如果 u 满足方程（10.2.25），而方程（10.2.26）又有非平凡解 u_0，即有

$$Lu = f \text{ 和 } Lu_0 = 0$$

同时存在。于是，将两式相加，并根据 L 是线性的，故有

$$L(u + u_0) = f。 \tag{10.2.27}$$

这说明，u 和 $u + u_0$ 都是方程（10.2.25）的解，即该方程的解不是惟一的。反过来，若方程（10.2.25）的解不是惟一的，则至少存在两个解，设为 u 和 $u + u_0$，且 u_0 是非零的，于是（10.2.25）和（10.2.27）成立。把两式相减就有 $Lu_0 = 0$，即式（10.2.26）存在非平凡解。

由于本书所涉及的积分算子方程均为线性的，故上述结论都适用。上面所讨论的关于 TM 波垂直入射理想导体柱的积分方程（10.2.11）对应的齐次方程为

$$\int_{\Gamma} J_{sz}(u')H_0^{(2)}(kR)\mathrm{d}u' = 0, \tag{10.2.28}$$

该方程有非平凡解。实际上，上式正是将导体内部换成以 ε 和 μ 为参数的媒质所形成的波导 TM 模满足的方程。对于适当的波数 k，该方程存在非平凡解。该电磁场解的形态为一种横向谐振。在相应的频率下，方程（10.2.11）的散射解与横向谐振解的叠加，这就使散射解产生严重的误差。如果谐振频率不只一个且比较密集，所造成的影响会更加严重。理论上，齐次方程的非平凡解构成相应算子的零空间，在物理上这些解对应于谐振现象。如果用矩量法求解相应的非齐次方程，则所得到的矩阵可能是严重病态的。在这种情况下，即使求得数值解也可能有很大的误差。以上分析对三维散射问题也是适用的。

如果散射体是可穿透的，则齐次方程的非平凡解对应于开放式谐振腔的谐振模，由于存在谐振阻尼，谐振频率为复数。因时谐场的频率是实的，对实数频率解的要求而言，齐次方程就不存在非零解了。相应地，这种散射问题的积分方程也就不存在谐振问题了。

已经发展了一些方法克服谐振问题所造成的影响，其中主要有混合积分方程法和扩展边界条件法。所谓混合方程法就是把电场积分方程和磁场积分方程混合应用，以构成混合积分方程（Combined - field Integral Equation），简称 CFIE 法。

式（10.2.11）已给出了 TM 入射时的电场积分方程，入射波中的磁场只有横向分量 H_{it}，其等效电流就只有 z 向分量 J_{sz}，由此得到磁场积分方程

$$H_{it}(u) = J_{sz}(u) + \hat{t}\cdot\nabla\times\hat{z}\frac{\mathrm{i}}{4}\int_{\Gamma} J_{sz}(u')H_0^{(2)}(kR)\mathrm{d}u'。 \tag{10.2.29}$$

为了调整幅度量级且保持单位一致，由实数 $\alpha(0<\alpha<1)$ 和空间媒质的特征阻抗 η 构成尺度因子 $(1-\alpha)\eta$ 构造混合积分方程

$$\begin{aligned}\alpha E_{iz}(u) + (1-\alpha)\eta H_{it}(u) &= (1-\alpha)\eta J_{sz}(u)\\ &+ \alpha\frac{k\eta}{4}\int_{\Gamma} J_{sz}(u')H_0^{(2)}(kR)\mathrm{d}u'\\ &+ (1-\alpha)\eta\,\hat{t}\cdot\nabla\times\frac{1}{4}\int_{\Gamma}\hat{z}J_{sz}(u')H_0^{(2)}(kR)\mathrm{d}u'。\end{aligned} \tag{10.2.30}$$

类似地，对于理想导体柱 TE 波散射问题的混合积分方程为

$$\begin{aligned}\alpha E_{it}(u) + (1-\alpha)\eta H_{iz}(u) &= (1-\alpha)\eta J_{st}(u)\\ &- \frac{\mathrm{i}}{4}(1-\alpha)\eta\hat{z}\cdot\nabla\times\int_{\Gamma}\hat{t}(u')J_{st}(u')H_0^{(2)}(kR)\mathrm{d}u'\\ &+ \frac{\alpha\eta}{4}\vec{t}\cdot\frac{\nabla\nabla + k^2}{k}\int_{\Gamma}\vec{t}(u')J_{st}(u')H_0^{(2)}(kR)\mathrm{d}u'。\end{aligned} \tag{10.2.31}$$

以上两式的积分应在散射体外表面无限小的距离上进行。

为了证明混合积分方程解的惟一性，需要讨论发生内谐振的可能性。当不存在任何入射波时，由式（10.2.30）可以看出，散射体内表面无限小的距离上的散射场 E_{sz} 和 H_{st} 应该满足

$$\alpha E_{sz} + (1-\alpha)\eta H_{st} = 0。\tag{10.2.32}$$

该式乘以自身的复共轭成为

$$\alpha^2 |E_{sz}|^2 + (1-\alpha)^2\eta^2 |H_{st}|^2 + \alpha\eta(1-\alpha)(E_{sz}H_{st}^* + H_{st}E_{sz}^*) = 0 \tag{10.2.33}$$

在整个散射体对上式进行积分，可以得到

$$\int_\Gamma R_e(\hat{z}E_{sz} \times \hat{t}H_{st}^* \cdot (-\vec{n}))\mathrm{d}u = \frac{-1}{\alpha(1-\alpha)\eta}\int_\Gamma [\alpha^2 |E_{sz}|^2 + (1-\alpha)^2\eta^2 |H_{st}|^2]\mathrm{d}u。\tag{10.2.34}$$

由坡印亭定理知，上式左侧表示流向导体内部的功率流的时间平均值。由于无入射波存在，流入的功率流应该等于零。于是，为了满足这一要求，在 $\alpha \neq 0$ 和 $\alpha \neq 1$ 的情况下，只有

$$E_{sz} = 0 \text{ 和 } H_{st} = 0。$$

这就说明，除非 $\alpha = 0$ 和 $\alpha = 1$，式（10.2.30）没有内谐振解。由于以上条件不可能满足，就证明式（10.2.30）的散射解是唯一的。

10.2.4　矩量法在三维散射问题中的应用

三维散射问题的特点是直接面对的往往是矢量场，当用矩量法求解矢量函数积分方程时需要矢量展开函数。由积分方程的核函数看，在三维矢量场的散射问题中需要处理的是自由空间的格林函数，这也增加了求解的复杂程度。

1. 三角形面元和 RWG 矢量基函数

一类被称为屋顶函数的矢量基函数在求解导体散射等问题中得到了广泛的应用，这种基函数不仅能保持单元交界处切向或法向的连续性，而且为设置未知场和电流的边界条件提供了方便。为了将三维散射体表面离散化，三角形面元或矩形面元是最常采用的，并定义相应的屋顶函数。

三角面元最有利于对任意曲面的精确模拟，因而得到了最广泛的应用。针对三角面元，S. M. Rao 等提出了一种屋顶函数，后来用作者的名字命名为 Rao - Wilton - Glisson 矢量基函数，简称 RWG 基函数。

Rao 等用三角形面元来逼近任意形状的导体表面 S，并将有公共边的三角形面元用公共边进行编号。图 10 - 1 给出了任意一对三角形面元 T_n^+ 和 T_n^-（$n=1, 2, \cdots, N$），其公共边及其长度用 l_n 表示，三角元面积分别为 A_n^+ 和 A_n^-。为了方便，定义两类位矢表示面元上各点的位置：$\vec{\rho_n^+}$ 和 $\vec{\rho_n^-}$ 分别由 T_n^+ 的自由顶点指向内点和由 T_n^- 的内点指向其自由顶点；$\vec{r_n^+}$ 和 $\vec{r_n^-}$ 分别由坐标原点 O 指向 T_n^+ 和 T_n^- 的内点，T_n^+ 和 T_n^- 中心点的位置分别用 $\vec{\rho_n^{c+}}$ 和 $\vec{\rho_n^{c-}}$ 以及 $\vec{r_n^{c+}}$ 和 $\vec{r_n^{c-}}$ 表示。与 l_n 相联系的

RWG 矢量基函数可定义为

$$\vec{f}_n = (\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{l_n}{2A^+}\vec{\rho}_n^+, \vec{r} \in T_n^+, \\ \dfrac{l_n}{2A_n^-}\vec{\rho}_n^-, \vec{r} \in T_n^-, \\ 0 \quad ,\text{其他}, \end{cases} n = 1,2,\cdots,N \tag{10.2.35}$$

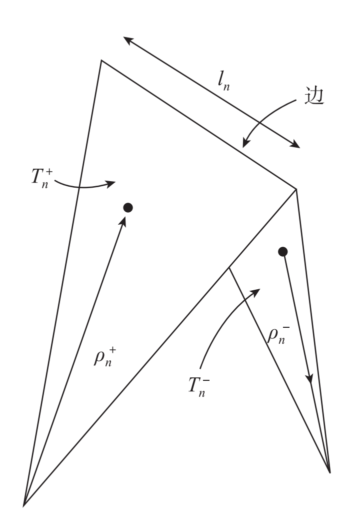


图 10－1　一对三角形面元的模型

其中 $\vec{r}$ 为由原点 O 到任一点的位矢。待求的表面电流$\vec{J}_s$可以近似地表示为

$$J_s(\vec{r}) = \sum_{n=1}^{N} j_n\vec{f}_n(\vec{r}) \tag{10.2.36}$$

其中 j_n 为未知系数，N 为除边界棱边（只与某一个面元相关的棱边）外所包含的面元的边数。显然，当用 RWG 基函数展开表面电流时，电流方向就与式（10.2.35）中$\vec{\rho}_n^+$和$\vec{\rho}_n^-$的方向一致。定义与 l_n 相关的电流以由T_n^+流向T_n^-为正方向，则电流展开基函数具有以下特点：

（1）由三角面元的计算公式可知，$2A_n^\pm/l_n$ 等于从 $T_n^\pm$ 的自由顶点到 l_n 的垂直距离。由式（10.2.35）可推知，如果 $\vec{r}$ 表示 $\rho_n^\pm$ 对 l_n 的正交交点，则必有 $|\vec{f}_n(\vec{r})| = 1$。$T_n^\pm$ 上的电流取向与$\vec{\rho}_n^\pm$一致，说明 $T_n^\pm$ 上对 l_n 正交的电流为常数，在跨越 l_n 时具有连续性。这也说明在 l_n 上没有线电荷积累，从而保证不会由此引起计算误差。此外，由于代表电流方向的$\vec{\rho}_n^\pm$不可能在除公共边 l_n 之外 $T_n^\pm$ 的其他边上有正交分量，所以在其他这些边上没有垂直于 $T_n^\pm$ 边界的电流分量，故也没有线电荷积累。

（2）求$\vec{f}_n(\vec{r})$的面散度可得

$$\nabla_s \cdot \vec{f}_n(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{l_n}{A_n^+}, \vec{r} \in T_n^+, \\ -\dfrac{l_n}{A_n^-}, \vec{r} \in T_n^-, \\ 0 \quad ,\text{其他}。\end{cases} \tag{10.2.37}$$

其中∇_s 表示表面散度算符。上式的计算中用到了$\nabla_s \cdot \vec{\rho}_n^+ = -\nabla_s \cdot \vec{\rho}_n^- = 2$。这表明，$\vec{f}_n(\vec{r})$ 的面散度在每个面元上均为常数。由于在连续性方程中$\nabla_s \cdot \vec{J}_n / \mathrm{i}\omega$ 代表电荷密度，所以 T_n^+ 和 T_n^- 上的电荷密度为常数，电荷总量分别为

$$\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\nabla_s \cdot \vec{f}_n(\vec{r}_n^+)A_n^+ = \frac{l_n}{\mathrm{i}\omega}, \quad \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\nabla_s \cdot \vec{f}_n(\vec{r}_n^-)A_n^- = -\frac{l_n}{\mathrm{i}\omega},$$

这就说明 T_n^- 和 T_n^+ 上所带的电荷等量但异号，故总电荷为零。也就是说，基函数具有偶极子的特点。

（3）$\vec{f}_n(\vec{r})$ 的电矩为 $(A_n^+ + A_n^-)\vec{f}_{ave}$可表示为

$$\begin{aligned}(A_n^+ + A_n^-)\vec{f}_{ave} &= \int_{T_n^+ + T_n^-} \vec{f}_n(\vec{r})\mathrm{d}s \\ &= \frac{l_n}{2}(\overrightarrow{\rho_n^{c+}} + \overrightarrow{\rho_n^{c-}}) = l_n(\overrightarrow{r_n^{c+}} + \overrightarrow{r_n^{c-}}),\end{aligned} \tag{10.2.38}$$

这说明面元对的电矩可用相应的几何参数表示。

2. 矩量法求解电场积分方程

前面已经得出了对封闭和开放任意理想导体散射问题都适用的电场积分方程（10.2.8），可以把它表示为另一种形式

$$\vec{n} \times \vec{E}_i(\vec{r}) = \vec{n} \times (\mathrm{i}\omega\vec{A} + \nabla\varphi), \vec{r} \in S。 \tag{10.2.39}$$

其中

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_S J_s(\vec{r}') \frac{e^{-\mathrm{i}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}s', \tag{10.2.40}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S \sigma_s(\vec{r}') \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}s', \tag{10.2.41}$$

其中$\vec{J}_s$和 σ_s 分别为等效面电流和面电荷，它们之间满足关系

$$\nabla_s \cdot \vec{J}_s(\vec{r}) = -i\omega\sigma_s(\vec{r})。 \tag{10.2.42}$$

现在我们采用伽辽金法计算方程（10.2.39）。首先把式（10.2.36）的近似展开代入（10.2.40）和（10.2.41），亦即代入式（10.2.39）。然后用 RWG 矢量函数进行加权平均，即可得

$$\langle \vec{E}_i, \vec{f}_m \rangle = \mathrm{i}\omega\langle \vec{A}, \vec{f}_m \rangle + \langle \nabla\varphi, \vec{f}_m \rangle, m = 1,2,\cdots N \tag{10.2.43}$$

对任意面元对，由矢量基函数在面元上的性质可知，内积计算有以下结果

$$\langle \nabla\varphi, \vec{f}_m \rangle = -\int_{\Delta_m} \varphi \nabla_s \cdot \vec{f}_m \mathrm{d}s \tag{10.2.44}$$

其中 Δ_m 表示面元对 $T_m^{\pm}$。考虑到式（10.2.37）又有

$$\int_{\Delta_m}\varphi\,\nabla_s\cdot\vec{f}_m\mathrm{d}s=\int_{T_m^+}\varphi\frac{l_m}{A_m^+}\mathrm{d}s+\int_{T_m^-}\varphi\left(-\frac{l_m}{A_m^-}\right)\mathrm{d}s$$

$$\approx l_m[\varphi(\vec{r}_m^{c+})+\varphi(\vec{r}_m^{c-})]。\tag{10.2.45}$$

类似地，$\langle\vec{E}_i,\vec{f}_m\rangle$ 和 $\langle\vec{A},\vec{f}_m\rangle$ 也可分别近似地表示为

$$\left\langle\begin{Bmatrix}\vec{E}_i\\\vec{A}\end{Bmatrix},\vec{f}_m\right\rangle=\frac{l_m}{2}\left[\frac{1}{A_m^+}\int_{T_m^+}\begin{Bmatrix}\vec{E}_i(\vec{r})\\\vec{A}(\vec{r})\end{Bmatrix}\cdot\vec{\rho}_m^{\,+}\mathrm{d}s+\frac{1}{A_m^-}\int_{T_m^-}\begin{Bmatrix}\vec{E}_i(\vec{r})\\\vec{A}(\vec{r})\end{Bmatrix}\cdot\vec{\rho}_m^{\,-}\mathrm{d}s\right]$$

$$\approx\frac{l_m}{2}\left[\begin{Bmatrix}\vec{E}_i(\vec{r}_m^{c+})\\\vec{A}(\vec{r}_m^{c+})\end{Bmatrix}\cdot\vec{\rho}_m^{\,c+}+\begin{Bmatrix}\vec{E}_i(\vec{r}_m^{c-})\\\vec{A}(\vec{r}_m^{c-})\end{Bmatrix}\cdot\vec{\rho}_m^{\,c-}\right]。\tag{10.2.46}$$

将以上两式代入（10.2.43）即得

$$\mathrm{i}\omega l_m\left[\vec{A}(\vec{r}_m^{c+})\cdot\frac{\vec{\rho}_m^{\,c+}}{2}+\vec{A}_m(\vec{r}_m^{c-})\cdot\frac{\vec{\rho}_m^{\,c-}}{2}\right]+l_m[\varphi(\vec{r}_m^{c-})-\varphi(\vec{r}_m^{c+})]$$

$$=l_m\left[\vec{E}_i(\vec{r}_m^{c+})\cdot\frac{\vec{\rho}_m^{\,c+}}{2}+\vec{E}_i(\vec{r}_m^{c-})\cdot\frac{\vec{\rho}_m^{\,c-}}{2}\right],m=1,2,\cdots,N\tag{10.2.47}$$

其中

$$\vec{A}(\vec{r}_m^{c\pm})=\frac{\mu}{4\pi}\int_S\sum_{n=1}^N j_n\vec{f}_n(\vec{r}\,')\frac{e^{-\mathrm{i}k|\vec{r}_m^{c\pm}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}_m^{c\pm}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}s'$$

$$=\sum_{n=1}^N\frac{j_n\mu}{4\pi}\int_{\Delta_n}\vec{f}_n(\vec{r}\,')\frac{e^{-\mathrm{i}k|\vec{r}_m^{c\pm}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}_m^{c\pm}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}s'$$

$$\varphi(\vec{r}_m^{c\pm})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S\frac{\mathrm{i}}{\omega}\nabla'_s\cdot\vec{J}_s\frac{e^{-\mathrm{i}k|\vec{r}_m^{c\pm}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}_m^{c\pm}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}s'$$

$$=\sum_{n=1}^N\frac{\mathrm{i}j_n}{4\pi\omega\varepsilon}\int_{\Delta_n}\nabla'_s\cdot\vec{f}_n(\vec{r}\,')\frac{e^{-\mathrm{i}k|\vec{r}_m^{c\pm}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}_m^{c\pm}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}s'$$

于是方程（10.2.47）又可表示成

$$\sum_{n=1}^N l_m j_n\left[\mathrm{i}\omega\left(\vec{A}_{mn}^+\cdot\frac{\vec{\rho}_m^{\,c+}}{2}+\vec{A}_{mn}^-\cdot\frac{\vec{\rho}_m^{\,c-}}{2}\right)+(\varphi_{mn}^{c-}-\varphi_{mn}^{c+})\right]$$

$$=l_m\left[\vec{E}_i(\vec{r}_m^{c+})\cdot\frac{\vec{\rho}_m^{\,c+}}{2}+\vec{E}_i(\vec{r}_m^{c-})\cdot\frac{\vec{\rho}_m^{\,c-}}{2}\right],m=1,2,\cdots,N\tag{10.2.48}$$

其中

$$\vec{A}_{mn}^{\pm}=\frac{\mu}{4\pi}\int_{\Delta_n}\vec{f}_n(\vec{r}\,')\frac{e^{-\mathrm{i}kR_m^{\pm}}}{R_m^{\pm}}\mathrm{d}s'$$

$$\varphi_{mn}^{\pm}=\frac{1}{4\pi\varepsilon\omega}\int_{\Delta_n}\nabla_s'\cdot\vec{f}_n(\vec{r}\,')\frac{e^{-\mathrm{i}kR_m^{\pm}}}{R_m^{\pm}}\mathrm{d}s',R_m^{\pm}=|\vec{r}_m^{c\pm}-\vec{r}\,'|。$$

将方程（10.2.48）写成矩阵形式，即为

$$[z_{mn}][j_n]=[v_m],m,n=1,2,\cdots,N。\tag{10.2.49}$$

其中

$$z_{mn} = l_m\left[\mathrm{i}\omega\left(\overrightarrow{A_{mn}^{+}} \cdot \frac{\overrightarrow{\rho_m^{c+}}}{2} + \overrightarrow{A_{mn}^{-}} \cdot \frac{\overrightarrow{\rho_m^{c-}}}{2} \right) + (\varphi_{mn}^{c-} - \varphi_{mn}^{c+}) \right]$$

$$v_m = l_m\left[\vec{E}_i(\overrightarrow{r_m^{c+}}) \cdot \frac{\overrightarrow{\rho_m^{c+}}}{2} + \vec{E}_i(\overrightarrow{r_m^{c-}}) \cdot \frac{\overrightarrow{\rho_m^{c-}}}{2} \right]。$$

求解方程即可得到j_n，$n=1$，，2，⋯，N，再将其代入（10.2.36）即可求得表面电流的分布。

对于三维导体散射问题也可表示成其他形式的积分方程，同样可以用类似的方法求解。

10.2.5　积分方程求解的快速多极子方法

从上面举例中已经看到，矩量法求解积分方程的最大特点是所导出的代数方程组的系数矩阵是满秩的，对这样的矩阵求逆最典型的方法是高斯消元法。用计算机完成这种消元计算所需的存储量与 $O(N^2)$ 成正比，其中 N 为未知量个数，所需的计算时间则与 $O(N^3)$ 成正比，这样的计算复杂度限制了矩量法的应用范围。为克服这一缺点，已发展了多种加速计算的方法，快速多极子方法是比较有效的一种。

快速多极子方法由 V. Rokhlin 于 20 世纪 80 年代提出，90 年代开始用于电磁场散射问题。这种方法的主要物理依据是，源对远区的作用可适当地减少信息量，对计算的精度不会产生明显的影响，却可以使矩量法的矩阵变得稀疏，从而可大大降低计算复杂度。传统的矩量法不加区别地处理各离散单元之间的相互作用，快速多极子方法则先把所有离散单元分为若干组，组内单元之间的作用均属近区作用，要用传统的矩量法进行计算。把所有组分为两类，一类为近区集合，另一类为远区集合，近区组之间用传统方法计算，远区组集合之间则采用特殊方法。两种方法的差别由图 10－2 和图 10－3 示出。

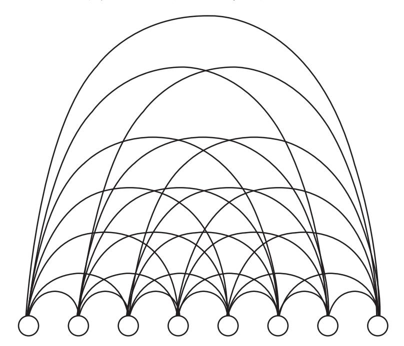


图 10－2　矩量法对单元之间相互作用的处理

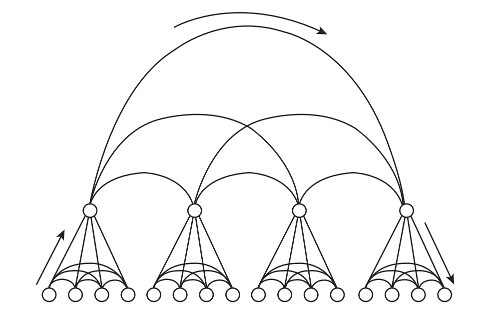


图 10－3　快速多极子方法对单元间相互作用的处理

图 10－2 说明矩量法同等地考虑所有单元之间的相互作用；图 10－3 说明快速多极子方法对远区组集合的处理分成三个过程：首先，统一求出各源点单元到所在组中心的作用，这一过程称为聚合。然后，求出源点所在组中心到观察点单

元所在组中心的作用，这一过程称为转移。最后，统一求出观察点单元所在组中心到观察点单元的作用，这一过程称为解聚。借助于这种特殊的技巧，可使所需存储空间和计算时间由 $O(N^2)$ 减少到 $O(N^{1.5})$，在理想情况下可达到 $O(N\text{Log}N)$ 的量级。

1. 二维散射问题的快速多极子方法

在前面计算 TM 入射对理想导体柱散射问题时，用矩量法解积分方程所得代数方程系数矩阵元素 z_{pq} 为

$$\begin{aligned} z_{pq} &= \frac{k\eta}{4}\int_{\Delta_q} H_0^{(2)}(kR_p)\,\mathrm{d}u'pq \\ &\approx \frac{k\eta}{4} l_q H_0^{(2)}(kR), \quad p,q = 1,2,\cdots,N, p \neq q, \end{aligned} \tag{10.2.50}$$

如果这样计算每个单元，不仅计算的单元个数多，而且矩阵是满秩，求逆的计算量随 N 的增大而急速增加。快速多极子方法主要用于改进这些元素相互作用的计算。

为了应用快速多极子方法，先将矩量法中所用的离散单元就近分为 M 个组，设每组所含的单元数均为 G，第 l 个组记为 G_l（$l=1，2，\cdots，M$），其中心为单元 l。再按一定的距离标准（相对于 G_l）将 M 个组分为近区组和远区组集合，分别记为 G_n 和 G_f，若 G_n 由中心组及其相邻组构成，则有 $G_n = G_{l-1} + G_l + G_{l+1}$，如图 10－4 所示。

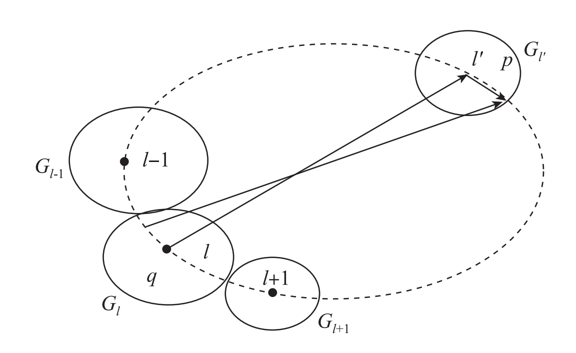


图 10－4　离散单元的近区组和远区组

设 p 为 $G_{l'}$ 中的一个单元（$p=1，2，\cdots，N$），则 N 个单元对单元 p 的作用可分为两部分，一部分是近区组集合内单元的作用，记为 b_{np}，另一部分是所有远区组集合内单元的作用，记为 b_{fp}。b_{np} 的计算应按传统的矩量法进行，若 $q \in G_l$（$q=1，2，\cdots，N$），$G_l \in G_f$，则快速多极子方法对单元 p 的作用主要取决于对 $H_0^{(2)}(kR_{pq})(p，q=1，2，\cdots，N)$ 的处理。

由以上规定的分区规则可知，$R_{pq} > R_{lq}$，其中 R_{pq} 为单元 p 和 q 之间的距离，R_{lq} 为单元 q 到第 l 个组的中心单元 l 之间的距离，$p，q=1，2，\cdots，N$；$l=1，2，\cdots，M$。根据柱函数的加法定理有

$$H_0^{(2)}(kR_{pq}) = \sum_m [J_m(kR_{lq})e^{-\mathrm{i}m\varphi_{lq}}][H_m^{(2)}(kR_{lp})e^{-\mathrm{i}m\varphi_{lp}}] \qquad (10.2.51)$$

其中 J_m 和 $H_m^{(2)}$ 分别为第 m 阶第一类贝塞尔函数和第二类汉克尔函数。由于 $R_{l'l} > R_{pl'}$，便有

$$H_m^{(2)}(kR_{lp})e^{\mathrm{i}m\varphi_{lp}} = \sum_n [H_{n-m}^{(2)}(kR_{ll'})e^{-\mathrm{i}(n-m)\varphi_{ll'}}][J_n(kR_{l'p})e^{\mathrm{i}n\varphi_{l'p}}] \qquad (10.2.52)$$

将上式代入式（10.2.51），并考虑到 $R_{l'p} = R_{pl'} - \pi$，可以得到

$$H_0^{(2)}(kR_{pq}) = \sum_m J_m(kR_{pl'})^{\mathrm{i}m(\varphi_{pl'}-\pi)} \sum_n H_{m-n}^{(2)}(kR_{l'l}) \cdot e^{-\mathrm{i}(m-n)\varphi_{l'l}} J_n(kR_{lq})e^{-\mathrm{i}n\varphi_{lq}} \qquad (10.2.53)$$

其中的 J_m 又可表示为

$$J_m(kR_{pl'})e^{\mathrm{i}m\varphi_{pl'}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}[kR_{pl'}\cos(\alpha-\varphi_{pl'})+m(\alpha-\frac{\pi}{2})]}\mathrm{d}\alpha$$

把这一表示代入上式并交换求和与积分的顺序，又有

$$H_0^{(2)}(kR_{pq}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}kR_{pl'}\cos(\alpha-\varphi_{pl'}+\pi)} \cdot \sum_{m-n} H_{m-n}^{(2)}(kR_{l'l})e^{-\mathrm{i}(m-n)(\varphi_{l'l}-\alpha'-\frac{\pi}{2})}\sum_m e^{\mathrm{i}m(\alpha-\alpha')}e^{\mathrm{i}k_{lq}\cos(\alpha-\varphi_{lq})}\mathrm{d}\alpha'\mathrm{d}\alpha。 \qquad (10.2.54)$$

由于

$$\frac{1}{2\pi}\sum_m e^{im(\alpha-\alpha')} = \delta(\alpha-\alpha'),$$

可利用 δ 函数的性质将式（10.2.54）中的二重积分化为如下的简单积分

$$H_0^{(2)}(kR_{pq}) \approx \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\beta_{pl'}(\alpha)\gamma_{l'l}(\alpha)\beta_{lq}(\alpha)\mathrm{d}\alpha, \qquad (10.2.55)$$

其中

$$\beta_{pl'}(\alpha) = e^{\mathrm{i}kR_{pl'}\cos(\alpha-\varphi_{pl'})},$$

$$\gamma_{l'l}(\alpha) = \sum_{m-n=-P}^{P} H_{m-n}^{(2)}(kR_{l'l})e^{-\mathrm{i}(m-n)(\varphi_{l'l}-\alpha-\frac{\pi}{2})},$$

$$\beta_{lq}(\alpha) = e^{\mathrm{i}kR_{lq}\cos(\alpha-\varphi_{lq})}。$$

这里已把无穷求和适当截断，其中 P 称为多极子数。

由以上三式可以看出，$\gamma_{l'l}$（α）只与场点和源点所在组的中心单元有关，β_{lq} 和 $\beta_{pl'}$ 只限于特定的组内，与组外单元无关。这样，对所有远区组及其单元求和就可求得单元 p（$p=1$，2，…，N）的远区作用，于是有

$$b_{fp} = \frac{k\eta}{8\pi}\int_0^{2\pi}\beta_{pl'}(\alpha)\sum_{\substack{l=1\\G_l\subset G_f}}^{M}\gamma_{l'l}(\alpha)\sum_{q\in G_l}\beta_{lq}(\alpha)i_q j_q\mathrm{d}\alpha, \qquad (10.2.56)$$

其中的积分可以用求和近似。为此将积分区间等分成 Q 个子区间。令 $\alpha_k = \dfrac{2\pi}{Q}$，则有

$$b_{fp} = \frac{k\eta}{4Q}\sum_{k=1}^{Q}\beta_{pl'}(\alpha_k)\sum_{\substack{l=1\\G_l\subset G_f}}^{M}\gamma_{l'l}(\alpha_k)\sum_{q\in G_l}\beta_{lq}(\alpha_k)l_q j_q。\tag{10.2.57}$$

同理，对单元 p 的近区作用可近似表示为

$$b_{np} \approx \sum_{l\in G_n}\sum_{q\in G_l} z_{pq} j_q,\quad p,q = 1,2,\cdots,N。\tag{10.2.58}$$

利用以上两式又可把式（10.2.8）改写为

$$\sum_{l\in G_n}\sum_{q\in G_l} z_{pq} j_q + \frac{k\eta}{4Q}\sum_{k=1}^{Q}\beta_{pl'}(\alpha_k)\sum_{\substack{l=1\\G_l\subset G_f}}^{M}\gamma_{l'l}(\alpha_k)\sum_{q\in G_l}\beta_q(\alpha_k)l_q j_q$$

$$= E_{iz}(u_p), p \in G_l{}', l' = 1,2,\cdots,M。\tag{10.2.59}$$

上式又可表示为

$$ZJ = (Z_n + Z_f)J = V,\tag{10.2.60}$$

其中矩阵 $Z = Z_n + Z_f$，Z_n 表示近区作用，Z_f 表示远区作用，分别对应于式（10.2.59）左侧的第一项和第二项。Z_f 又可写成

$$Z_f = UTA,$$

其中 U、T、A 分别对应于（10.2.59）左侧第二项的三个求和部分并称为解聚矩阵、转移矩阵和聚合矩阵。到此 Z 已由满阵变成了稀疏矩阵，适合用迭代法求解，可大大减少计算量。此外式（10.2.60）中两个矩阵矢量分别为 $J[j_q]$，$V = [E_{iz}(u_p)]$。

2. 三维散射问题的快速多极子法

在理想导体的三维散射问题中主要涉及到并矢格林函数的积分计算，如考虑积分方程

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = ik\eta\int_S \overline{\overline{G}}(\vec{r},\vec{r}')\cdot\vec{J}_s(\vec{r}')\mathrm{d}S',\tag{10.2.61}$$

其中 $G(\vec{r},\vec{r}')$ 为自由空间的并矢格林函数。

利用快速多极子方法求解这类积分方程主要利用球面波的加法定理。根据图 10－5 所示的几何关系定理可表示为

$$\frac{e^{-\mathrm{i}k|\vec{r}+\vec{d}|}}{|\vec{r}+\vec{d}|} = \mathrm{i}k\sum_{\substack{l=0\\r>d}}^{\infty}(-1)^l(2l+1)j_l(k|\vec{d}|)\cdot h_l^{(2)}(k|\vec{r}|)P_l(\hat{d}\cdot\hat{r})\tag{10.2.62}$$

其中 j_l 为 l 阶球贝塞尔函数，$h^{(2)l}$ 为第二类 l 阶球汉克尔函数，P_l 为 l 阶勒让德多项式，$\hat{d}$ 和 $\hat{r}$ 分别为 $\vec{d}$ 方向和 $\vec{r}$ 方向的单位矢量。上式的物理意义可解释为，点 a 处发出的球面波在点 c 处产生的场，等价于点 b 处的多极子在 c 处产生的场。

球面波与平面波存在以下关系

$$4\pi(-\mathrm{i})^l j_l(k|\vec{d}|)P_l(\hat{d}\cdot\hat{r}) = \oint_{S_a} e^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{d}}P_l(\hat{k}\cdot\hat{r})\mathrm{d}\Sigma\tag{10.2.63}$$

其中 $\hat{k}$ 为单位球面上的矢径，$\mathrm{d}\Sigma$ 为单位球面上的微分面积，即

$$\hat{k} = \hat{x}\sin\theta\cos\varphi + \hat{y}\cos\theta\sin\varphi + \hat{z}\cos\theta,$$

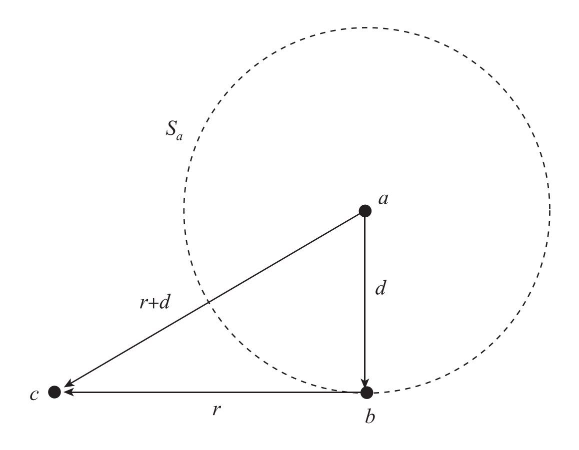


图 10－5　球面波加法定理的说明

$$\mathrm{d}\Sigma = \sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi。$$

将式（10.2.63）代入（10.2.62），并交换积分与求和的顺序，可得

$$\frac{e^{-\mathrm{i}k|\vec{r}+\vec{d}|}}{|\vec{r}+\vec{d}|} = -\frac{\mathrm{i}k}{4\pi}\oint_{S_a} e^{-\mathrm{i}k\hat{k}\cdot\vec{d}} \sum_{l=0}^{\infty}(-\mathrm{i})^l(2l+1)h_l^{(2)}(k|\vec{r}|)P_l(\hat{k}\cdot\hat{r})\mathrm{d}\Sigma \tag{10.2.64}$$

在数值计算中无穷求和必须截断。若把有限求和表示为

$$T_L(\hat{k}\cdot\hat{r}) = \sum_{l=0}^{L}(-\mathrm{i})^l(2l+1)h_l^{(2)}(k|\vec{r}|)P_l(\hat{k}\cdot\hat{r}), \tag{10.2.65}$$

则（10.2.64）可近似地表示为

$$\frac{e^{-\mathrm{i}k|\vec{r}+\vec{d}|}}{|\vec{r}+\vec{d}|} \approx -\frac{\mathrm{i}k}{4\pi}\oint_{S_a} e^{-\mathrm{i}k\hat{k}\cdot\vec{d}} T_L(\hat{k}\cdot\hat{r})\mathrm{d}\Sigma \tag{10.2.66}$$

考虑到

$$\begin{aligned}\vec{r}_{qp} &= \vec{r}_q - \vec{r}_p = (\vec{r}_q - \vec{r}_m) + (\vec{r}_m - \vec{r}_{m'}) - (\vec{r}_p - \vec{r}_m{}') \\ &= \vec{r}_{qm} + \vec{r}_{mm'} - \vec{r}_{pm'}, \quad p,q = 1,2,\cdots,N; m,m' = 1,2\cdots,M,\end{aligned}$$

可将式（10.2.66）改写为

$$\frac{e^{-\mathrm{i}k|\vec{r}_p-\vec{r}_q|}}{|\vec{r}_p-\vec{r}_q|} \approx -\frac{\mathrm{i}k}{4\pi}\oint_{S_a} e^{-\mathrm{i}k\hat{k}\cdot(\vec{r}_m-\vec{r}_{m'})} T_L(\hat{k}\cdot\hat{r})\mathrm{d}\Sigma。 \tag{10.2.67}$$

因为自由空间的并矢格林函数为

$$\overline{\overline{G}}(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{4\pi}\left(\overline{\overline{I}} + \frac{1}{k^2}\nabla'\nabla'\right)4\pi\frac{e^{-\mathrm{i}k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

把上式代入即得

$$\begin{gathered}\overline{\overline{G}}(\vec{r}_p,\vec{r}_q) = -\frac{\mathrm{i}k}{16\pi^2}\oint_{S_a}(\overline{\overline{I}} - \hat{k}\hat{k})e^{-\mathrm{i}k\hat{k}\cdot(\vec{r}_{pm}-\vec{r}_{qm'})}T_L(\hat{k}\cdot\hat{r}_{mm'})\mathrm{d}\Sigma \\ p,q = 1,2,\cdots,N, m,m' = 1,2,\cdots,M。\end{gathered} \tag{10.2.68}$$

为了应用快速多极子方法，将三维散射体表面的离散单元分组，进而分成近

区组和远区组集合，并继续采用在二维问题中定义的符号。对于近区组的计算，可仍然采用对式（10.2.61）采用普通矩量法所得矩阵元的计算公式，即

$$z_{pq} = \mathrm{i}k\eta\int_{\Delta_p}\vec{f}_p(\vec{r})\cdot\int_{\Delta_q}\overline{\overline{G}}(\vec{r},\vec{r}')\cdot\vec{f}_q(\vec{r}')\mathrm{d}s'\mathrm{d}s。\tag{10.2.69}$$

对远区场的计算可采用（10.2.58）的近似，即

$$\begin{aligned}z_{pq} &= \frac{k^2}{16\pi^2}\oint_{S_a}\left[\int_{\Delta_q}(\overline{\overline{I}}-\hat{k}\hat{k})\cdot\vec{f}_p(\vec{r}_{pm})e^{-\mathrm{i}k\hat{k}\cdot\vec{r}_{pm}}\mathrm{d}s\right]\\&\cdot\{T_L(\hat{k}\cdot\hat{r}_{mm'})\cdot[\int_{\Delta_q}(\overline{\overline{I}}-\hat{k}\hat{k})\cdot\vec{f}_q(\vec{r}_{qm'})e^{\mathrm{i}k\hat{k}\cdot\vec{r}_{qm'}}\mathrm{d}s']\}\mathrm{d}\Sigma\\&p,q=1,2,\cdots,N。\end{aligned}\tag{10.2.70}$$

定义以下函数

$$U_{pm}(\hat{k}) = \int_{\Delta_p}e^{-\mathrm{i}k\vec{k}\cdot\vec{r}_{pm}}(\overline{\overline{I}}-\hat{k}\hat{k})\cdot\vec{f}_p(\vec{r}_{pm})\mathrm{d}s$$

$$A_{qm'}(\hat{k}) = \int_{\Delta_q}e^{\mathrm{i}k\vec{k}\cdot\vec{r}_{qm'}}(\overline{\overline{I}}-\hat{k}\hat{k})\cdot\vec{f}_q(\vec{r}_{qm'})\mathrm{d}s'$$

则式（10.2.70）可表示为

$$Z_{pq} = \frac{k^2\eta}{16\eta}\oint_{sa}U_{pm}(\hat{k})\cdot[T_L(\hat{k}\cdot\hat{r}_{mm'})A_{gm}]d\sum\tag{10.2.71}$$

考虑到近区组和远区组的各种关系，线性代数方程组成为

$$\begin{aligned}&\sum_{m'\in G_n}\sum_{q\in G_{m'}}z_{pq}j_q+\frac{k^2\eta}{16\pi^2}\oint_{S_a}j_qU_{pm}(\hat{k})\cdot[\sum_{m'\in G_f}T_L(\hat{k}\cdot\hat{r}_{mm'})\\&\cdot\sum_{q\in G_{m'}}A_{qm}(\hat{k})]\mathrm{d}\Sigma = v_p,\quad p\in G_m,m,m'=1,2,\cdots,M,\end{aligned}\tag{10.2.72}$$

其中 $v_p = \int_{\Delta_p}\vec{f}_p(\vec{r})\cdot\vec{E}_i(\vec{r})\mathrm{d}s$ 。

与二维情况比较可知，对上式左侧第二项积分离散求和后，对应于三个矩阵相乘，分别用 U、T 和 A 表示。于是方程（10.2.72）又可表示成

$$(Z_n+U_xTA_x+U_yTA_y+U_zTA_z)J = V,$$

其中 Z_n 为近区作用矩阵。$J=[j_q]$，$V=[v_p]$（p，$q=1$，2，…，N）。以上这些矩阵都是稀疏的，达到了降低计算复杂度的目的。

以上主要介绍了快速多极子方法的基本原理，在实际应用中还可根据问题的性质做出各种改进。已经发展出的一些新方法包括多层快速多极子法、最陡下降快速多极子法、射线传播快速多极子法以及远场近似多极子法等[63]。

作为正交基的小波函数在矩量法中的应用正在进行着广泛的研究，虽然还不成熟，但蕴藏着巨大的潜力。

10.3　时域积分方程法

上一节讨论了频域积分算子方程的矩量解法，这种频域方程和解法对简谐电磁场问题比较合适。对于非简谐、尤其是瞬变的宽频的电磁场问题，为了获得时

域信息需要多频点的反复计算以满足数值傅里叶逆变换的要求。为了适应求解瞬变电磁场问题的要求，电磁场问题的直接时域方法得到了迅速发展，时域积分方程法就是其中的一种。

10.3.1　时域积分方程的导出

要想利用时域积分方程解决电磁场问题，当然首先是要导出相应问题的时域积分方程。在电磁场理论的发展过程中已经知道了许多不同类型的问题所满足的频域积分方程。因此，如何由已知的频域积分方程导出相应问题的时域积分方程，就成为一种首先需要考虑的方法。

1. 由频域积分方程导出时域积分方程

为明确起见，我们仅以理想导体的散射问题为例进行说明。我们已知散射体表面电流所满足的频域电场积分方程和磁场积分方程

$$\vec{n}\times\vec{E}_i(\vec{r},\omega)=\vec{n}\times P.V.\int_S[\mathrm{i}\omega\mu G(\vec{r},\vec{r}',\omega)\vec{J}_s(\vec{r}'\omega) - \vec{n}\cdot\vec{E}(\vec{r}',\omega)\nabla'G(\vec{r},\vec{r}',\omega)]\mathrm{d}S',\vec{r}\in S \tag{10.3.1}$$

$$\vec{n}\times\vec{H}_i(\vec{r},\omega)+\vec{n}\times P.V.\int_S\vec{J}_s(\vec{r}',\omega)\times\nabla'G(\vec{r},\vec{r}',\omega)]\mathrm{d}S' = \frac{1}{2}\vec{J}_s(\vec{r},\omega),\vec{r}\in S。 \tag{10.3.2}$$

在以上方程中，我们特意标出场量是 ω 的函数以表明它们是频域量，下面我们将用同样的符号表示时域量，但用变量 t 表明它们的实际属性。在当前的讨论中我们假定媒质是非色散的，因此 ε 和 μ 都不是频率的函数。

利用标量函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积定理

$$F[f(t)*g(t)]=F[\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau] = F[f(t)]F[g(t)]$$

我们可以证明，对矢量函数 $\vec{A}(t)$ 和 $\vec{B}(t)$ 有

$$F[\vec{A}(t)*f(t)]=F[\int_{-\infty}^{\infty}\vec{A}(\tau)f(t-\tau)\mathrm{d}\tau] = F[\vec{A}(t)]\cdot F[f(t)], \tag{10.3.3}$$

$$F[\vec{A}(t)\otimes\vec{B}(t)]=F[\int_{-\infty}^{\infty}\vec{A}(\tau)\times\vec{B}(t-\tau)\mathrm{d}\tau] = F[\vec{A}(t)]\times F[\vec{B}(t)]。 \tag{10.3.4}$$

将以上两式用于方程（10.3.1）和（10.3.2），然后进行傅里叶逆变换。根据假设，傅里叶逆变换可与原积分调换顺序，于是有

$$\vec{n}\times\vec{E}_i(\vec{r},t)=\vec{n}\times P.V.\int_S\{\mu F^{-1}[\mathrm{i}\omega\vec{J}_s(\vec{r}',\omega)]*F^{-1}[G(\vec{r},\vec{r}',\omega)] - F^{-1}[\vec{n}\cdot\vec{E}(\vec{r}',\omega)]*F^{-1}[\nabla'G(\vec{r},\vec{r}',\omega)]\}\mathrm{d}S',\vec{r}\in S \tag{10.3.5}$$

$$\vec{n}\times\vec{H}_i(\vec{r},t)+\vec{n}\times P.V.\int_S F^{-1}[\vec{J}_s(\vec{r}',\omega)]\otimes F^{-1}[\nabla' G(\vec{r},\vec{r}',\omega)]\mathrm{d}S'$$
$$=\frac{1}{2}\vec{J}_s(\vec{r},t),\vec{r}\in S。\tag{10.3.6}$$

令 $R=|\vec{r}-\vec{r}'|$，$\hat{R}=(\vec{r}-\vec{r}')/R$，把 $G(R,\ \omega)=e^{ikR}/4\pi R$ 代入以下逆变换

$$F^{-1}[\nabla' G(R,\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\nabla' G(R,\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

由于

$$\nabla' G(R,\omega)=\hat{R}\left[\mathrm{i}kG(R,\omega)+\frac{1}{R}G(R,\omega)\right]$$

可以得到

$$F^{-1}[\nabla' G(R,\omega)]=\frac{\hat{R}}{8\pi^2R}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{i}\omega}{v}+\frac{1}{R}\right)e^{\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{R}{v}\right)}\mathrm{d}\omega$$

其中 v 为电磁波在媒质空间的传播速度。

利用 δ 函数的以下表示

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{R}{v}\right)}\mathrm{d}\omega=\delta\left(t-\frac{R}{v}\right),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{i}\omega e^{\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{R}{v}\right)}\mathrm{d}\omega=\frac{\partial}{\partial t}\delta\left(t-\frac{R}{v}\right),$$

又有以下关系

$$F^{-1}[\nabla' G(R,\omega)]=\frac{\hat{R}}{4\pi R}\left[\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{R}\right]\delta\left(t-\frac{R}{v}\right),\tag{10.3.7}$$

$$F^{-1}[G(\omega,R)]=\frac{1}{8\pi^2R}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\mathrm{i}\omega\left(t-\frac{R}{v}\right)}\mathrm{d}\omega$$
$$=\frac{1}{4\pi R}\delta\left(t-\frac{R}{v}\right)。\tag{10.3.8}$$

再利用这些结果又可得到

$$F^{-1}[\mathrm{i}\omega\vec{J}_s(\vec{r}',\omega)]*F^{-1}[G(R,\omega)]$$
$$=\frac{1}{4\pi R}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\tau}\vec{J}_s(\vec{r}',\tau)\delta\left(t-\frac{R}{v}-\tau\right)\mathrm{d}\tau$$
$$=\frac{1}{4\pi R}\frac{\partial}{\partial\tau}\vec{J}_s(\vec{r}',\tau),\tag{10.3.9}$$

$$F^{-1}[\vec{J}_s(\vec{r}',\omega)]\otimes F^{-1}[\nabla' G(R,\omega)]$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{J}_s(\vec{r}',\tau)\times\frac{\hat{R}}{R}\left[\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{R}\right]\delta\left(t-\frac{R}{v}-\tau\right)\mathrm{d}\tau$$
$$=\frac{1}{4\pi R}\left[\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{1}{R}\right]\vec{J}_s(\vec{r}',\tau)\times\frac{\hat{R}}{R},\tag{10.3.10}$$

其中 $\tau=t-\dfrac{R}{v}$ 表示延迟时间，$\dfrac{\partial}{\partial\tau}\vec{J}_s(r',\ \tau)=\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{J}_s\ (r',\ t)\Big|_{t=\tau}$。

把以上结果代入方程（10.3.5）和（10.3.6）即可得到时域积分方程

$$\vec{n}\times\vec{E}_i(\vec{r},t)=\vec{n}\times P.V.\ \frac{1}{4\pi}\int_S\left\{\frac{\mu}{R}\frac{\partial}{\partial\tau}\vec{J}_s(\vec{r}',\tau)\right.$$

$$\left.-\frac{\hat{R}}{R}\left[\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{1}{R}\right]\vec{n}\cdot\vec{E}(\vec{r},\tau)\right\}\mathrm{d}S',\vec{r}\in S \quad (10.3.11)$$

$$\vec{n}\times\vec{H}_i(\vec{r},t)+\vec{n}\times P.V.\ \frac{1}{4\pi}\int_S\left\{\left[\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{1}{R}\right]\vec{J}_s(\vec{r}',\tau)\times\frac{\hat{R}}{R}\right\}\mathrm{d}S'$$

$$=\frac{1}{2}\vec{J}_s(\vec{r},t),\vec{r}\in S。 \quad (10.3.12)$$

引入等效电荷

$$\vec{n}\cdot\vec{E}(\vec{r}',\tau)=\frac{1}{\varepsilon}\rho_s(r',\tau)$$

方程（10.3.11）又可表示成以下形式

$$\vec{n}\times\vec{E}_i(\vec{r},t)=\vec{n}\times P.V.\ \frac{1}{4\pi}\int_S\left\{\frac{\mu}{R}\frac{\partial}{\partial\tau}\vec{J}_s(\vec{r}',\tau)\right.$$

$$\left.-\frac{\hat{R}}{\varepsilon R}\left[\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{1}{R}\right]\rho_s(\vec{r}',\tau)\right\}\mathrm{d}S',\vec{r}\in S \quad (10.3.13)$$

方程（10.3.13）和（10.3.12）分别称为理想导体散射问题的时域电场积分方程和时域磁场积分方程。

2. 由时域麦克斯韦方程直接导出

时域积分方程也可以直接从时域麦克斯韦方程导出。当只有 $\vec{J}(\vec{r},t)$ 和 $\rho(\vec{r},t)$ 作为电磁场的源时，在以 ε 和 μ 表示的空间中电磁场的时域方程组为

$$\nabla\times\vec{E}(\vec{r},t)=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}(\vec{r},t), \quad (10.3.14)$$

$$\nabla\times\vec{H}(\vec{r},t)=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t)+\vec{J}(\vec{r},t), \quad (10.3.15)$$

$$\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{1}{\varepsilon}\rho(\vec{r},t), \quad (10.3.16)$$

$$\nabla\cdot\vec{H}(\vec{r},t)=0。 \quad (10.3.17)$$

现在，我们在时域引入矢量势函数。根据 $\vec{H}(\vec{r},t)$ 的无散性，我们定义矢量势函数 $\vec{A}(\vec{r},t)$，它与 $\vec{H}(\vec{r},t)$ 的关系是

$$\vec{H}(\vec{r},t)=\frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A}(\vec{r},t)。 \quad (10.3.18)$$

将该式代入方程（10.3.14）可得

$$\nabla\times\left[\vec{E}(\vec{r},t)+\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r},t)\right]=0。$$

这表明，$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$是无旋的，于是又可引入时域标量势函数 $\varphi(\vec{r},t)$ 满足以下关系

$$\vec{E}(\vec{r},t)+\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r},t)=-\nabla\varphi(\vec{r},t)。 \quad (10.3.19)$$

把（10.3.18）和（10.3.19）代入方程（10.3.15）可以得到 $\vec{A}(\vec{r},\ t)$ 满足的方程

$$\nabla^2 A(\vec{r},t) - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}(\vec{r},t) = \nabla\left[\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r},t) + \varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\vec{r},t)\right] - \mu\vec{J}(\vec{r},t)。\tag{10.3.20}$$

引入时域洛伦兹规范条件

$$\nabla\cdot\vec{A}(\vec{r},t) + \varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\vec{r},t) = 0 \tag{10.3.21}$$

式（10.3.20）可简化为 $\vec{A}(\vec{r},\ t)$ 满足的时域波动方程

$$\nabla^2 A(\vec{r},t) - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}(\vec{r},t) = -\mu\vec{J}(\vec{r},t)。\tag{10.3.22}$$

再对方程（10.3.19）取散度，并利用式（10.3.16）和式（10.3.21）又可得 $\varphi(\vec{r},\ t)$ 满足的波动方程

$$\nabla^2\varphi(\vec{r},t) - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(\vec{r},t) = -\frac{1}{\varepsilon}\rho(\vec{r},t)。\tag{10.3.23}$$

所以，只要由方程（10.3.22）和（10.3.23）分别解得 $\vec{A}(\vec{r},\ t)$ 和 $\varphi(\vec{r},\ t)$ 就可由式（10.3.18）和（10.3.19）求得 $\vec{H}(\vec{r},\ t)$ 和 $\vec{E}(\vec{r},\ t)$。和频域情况类似，为了求解方程（10.3.22）和（10.3.23）我们可先求得满足以下方程的时域格林函数 $G(\vec{r},\ \vec{r}',\ t,\ t')$。

$$\nabla^2 G - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}G = \delta(\vec{r}-\vec{r}')\delta(t-t')。\tag{10.3.24}$$

在 9.1 中我们已求得无界均匀媒质空间中满足该方程的格林函数，其形式为

$$G(\vec{r},\vec{r}',t,t') = -\frac{1}{4\pi R}\delta\left(t - t' - \frac{R}{v}\right),\tag{10.3.25}$$

其中 $R = |\vec{r}-\vec{r}'|$，$v = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$。于是，根据格林函数的性质我们可得到无界均匀媒质空间的解

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r},t) &= -\mu\int_V\int_{-\infty}^{\infty} G(\vec{r},\vec{r}',t,t')\vec{J}(\vec{r}',t')\,\mathrm{d}V'\mathrm{d}t' \\ &= \frac{\mu}{4\pi}\int_V\int_{-\infty}^{\infty} J(\vec{r}',t')\frac{\delta(t-t'-R/v)}{R}\mathrm{d}t'\mathrm{d}V' \\ &= \frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{J(\vec{r}',t-R/v)}{R}\mathrm{d}V'\end{aligned}\tag{10.3.26}$$

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r},t) &= -\frac{1}{\varepsilon}\int_V\int_{-\infty}^{\infty} G(\vec{r},\vec{r}',t,t')\rho(\vec{r}',t')\,\mathrm{d}t'\mathrm{d}v' \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\frac{\rho(\vec{r}',t-R/v)}{R}\mathrm{d}V'\end{aligned}\tag{10.3.27}$$

其中 V 为 $\vec{J}(\vec{r},\ t)$ 和 $\rho(\vec{r},\ t)$ 不为零的区域，即其支撑集。

考虑到

$$\nabla R^n = nR^{n-1}\hat{R},(n\in Z)$$

$$\nabla f(R) = \frac{\mathrm{d}f(R)}{\mathrm{d}R}\hat{R}$$

把式（10.3.26）和（10.3.27）代入式（10.3.19）就可得到

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\left(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{1}{R}\right)\frac{\hat{R}}{R}\rho(\vec{r}',\tau)\mathrm{d}V' - \frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\tau}\vec{J}(\vec{r}',\tau)\mathrm{d}V'。\quad(10.3.28)$$

假设空间存在以 S 为表面的理想导体，其表面存在$\vec{J}_s(\vec{r},\ t)$ 和$\rho_s(\vec{r},\ t)$，则根据上式，这些源在空间所产生的电场可以表示为

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S\left(\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{1}{R}\right)\frac{\hat{R}}{R}\rho_s(\vec{r}',\tau)\mathrm{d}S' - \frac{\mu}{4\pi}\int_S\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\tau}\vec{J}_s(\vec{r}',\tau)\mathrm{d}S'。\quad(10.3.29)$$

如果$\vec{J}_s(\vec{r},\ t)$ 和$\rho_s(\vec{r},\ t)$ 是由入射电场$\vec{E}_i(\vec{r},\ t)$ 所引起，则上式就表示散射场$\vec{E}_s(\vec{r},\ t)$。散射场与入射场之和在导体表面应满足理想导体的边界条件

$$\hat{n}\times[\vec{E}_i(\vec{r},t)+\vec{E}_s(\vec{r},t)] = 0,\quad \vec{r}\in S \quad(10.3.30)$$

为了求得导体表面的散射场，要把观察点 $\vec{r}$ 移到导体表面，被积函数出现奇异性，这时应取主值积分。把式（10.3.29）的主值积分所代表的散射场代入（10.3.30）立即就可得到式（10.3.13）所表示的时域电场积分方程。

3. 用势函数直接表示的时域积分方程

由式（10.3.19）知，电场可以通过势函数表示为

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\varphi。\quad(10.3.31)$$

如果产生该电场的源为 $\vec{J}(r,\ t)$ 和 $\rho(\vec{r},\ t)$，则 $\vec{A}(\vec{r},\ t)$ 和 $\varphi(\vec{r},\ t)$ 由式（10.3.26）和（10.3.27）表示。现在考虑理想导体对入射波$\vec{E}_i(\vec{r},\ t)$ 的散射问题，设入射场在导体表面诱发的表面电流和电荷分别为$\vec{J}_s(\vec{r},\ t)$ 和 $\rho_s(\vec{r},\ t)$，则产生散射场的矢势和标势分别为

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_S\frac{\vec{J}_s(\vec{r}',t-R/v)}{R}\mathrm{d}S' \quad(10.3.32)$$

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_S\frac{\rho_s(\vec{r}',t-R/v)}{R}\mathrm{d}S' \quad(10.3.33)$$

其中$\vec{J}_s$和 ρ_s 满足连续性方程

$$\nabla\cdot\vec{J}_s(\vec{r},t)+\frac{\partial}{\partial t}\rho_s(\vec{r},t) = 0。\quad(10.3.34)$$

由此得

$$\rho_s(\vec{r},t) = -\int_0^t\nabla\cdot\vec{J}_s(\vec{r},\tau)\mathrm{d}\tau。\quad(10.3.35)$$

于是 $\varphi(\vec{r},\ t)$ 又可表示为

$$\varphi(\vec{r},t) = -\frac{1}{\varepsilon}\int_S\int^{t-R/v}\frac{\nabla\cdot\vec{J}_s(\vec{r}',\tau)}{4\pi R}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}S' \qquad (10.3.36)$$

如果散射场用式（10.3.31）表示，入射场用$\vec{E}_i(\vec{r},t)$表示，则在导体表面上有

$$\left[\frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}+\nabla\varphi(\vec{r},t)\right]_t = \vec{E}_i(\vec{r},t)\Big|_t,\quad \vec{r}\in S, \qquad (10.3.37)$$

其中的$\vec{A}$和φ分别由式（10.3.32）和（10.3.36）表示。所以，式（10.3.37）是以$\vec{J}_s(\vec{r},t)$为未知量的积分方程。

设

$$\psi(\vec{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi(\vec{r},t) = -\frac{1}{\varepsilon}\int_S\frac{\nabla\cdot\vec{J}_s(\vec{r},t-R/v)}{4\pi R}\mathrm{d}S' \qquad (10.3.38)$$

于是，对式（10.3.37）作时间 t 的导数，即又可得

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}(\vec{r},t)+\nabla\psi(\vec{r},t)\right]_t = \frac{\partial\vec{E}_i(\vec{r},t)}{\partial t}\Big|_t。 \qquad (10.3.39)$$

这是电场时域积分方程的另一种形式。

用类似的方法也可以列出同样问题的磁场时域积分方程。

10.3.2　数值法求解时域积分方程的基本框架[50]

时域积分方程与频域积分方程的差别主要是增加了一个时间变量，数值求解方法的差异主要也是表现在对时间变量的计算方面。数值求解时域积分方程的主要方法是，在空间变量方面仍然采用矩量法，对时间变量则采用步进法。下面仍以理想导体的散射问题为例，针对式（10.3.37）形式的时域积分方程说明数值解法的主要框架。

对散射体表面离散仍用三角面元，并依然采用 RWG 矢量基函数作为展开函数和权函数。对时间变量 t 采用等分法，用 Δt 表示时间步长，并记 $t_n=n\Delta t$，$n=1,2,\cdots,N_t$。时间步进法又分为两种，即显式解法和隐式解法。在显示解法中要求 $\Delta t\leqslant R_{min}/v$，其中 R_{min}是空间离散点之间的最小距离；在隐式解法中则要求 $\Delta t>R_{min}/v$。

1. 显式解法

方程（10.3.37）中包含$\vec{A}$的时间微商，在数值计算中先要用差分近似地代替微商。差分有几种形式，这里采用向前差分近似，这时 $t=t_n$ 时方程（10.3.37）可表示为

$$\left[\frac{\vec{A}(\vec{r},t_{n+1})-\vec{A}(\vec{r},t_n)}{\Delta t}+\nabla\varphi(\vec{r},t_n)\right]_t = \vec{E}_i(\vec{r},t_n)\Big|_t \qquad (10.3.40)$$

或展开成

$$\vec{A}(\vec{r},t_{n+1})\mid_t = \left[\Delta t\,\vec{E}_i(\vec{r},t_n)+\vec{A}(\vec{r},t_n)-\Delta t\,\nabla\varphi(\vec{r},t_n)\right]_t。 \qquad (10.3.41)$$

用式（10.2.25）所示的矢量基函数对上式作内积，由于 RWG 矢量基函数

的方向对三角面元是切向的，取内积后其法向分量自然消失，因此可得到

$$\langle \vec{f}_m, \vec{A}(\vec{r}, t_{n+1}) \rangle = \Delta t \langle \vec{f}_m, \vec{E}_i(\vec{r}, t_n) \rangle + \langle \vec{f}_m, \vec{A}(\vec{r}, t_n) \rangle$$
$$- \Delta t \langle \vec{f}_m, \nabla \varphi(\vec{r}, t_n) \rangle,$$
$$m = 1, 2, \cdots, N_s。 \tag{10.3.42}$$

根据$\vec{f}_m$的具体形式容易看出

$$\langle \vec{f}_m, \vec{A} \rangle = \int_{T_m^+} \frac{l_m}{2A_m^+} \vec{\rho}_m^+ \cdot \vec{A} \mathrm{d}s + \int_{T_m^-} \frac{l_m}{2A_m^-} \vec{\rho}_m^- \cdot \vec{A} \mathrm{d}s。 \tag{10.3.43}$$

如果用棱边 m 中点处的值 $\vec{A}(\vec{r}_m)$ 作为 $\vec{A}(\vec{r})$ 的近似值，则上式又可近似地表示为

$$\langle \vec{f}_m, \vec{A} \rangle \approx \vec{A}(\vec{r}_m) \cdot \left[\frac{l_m}{2A_m^+} \int_{T_m^+} \vec{\rho}_m^+ \mathrm{d}s + \frac{l_m}{2A_m^-} \int_{T_m^-} \vec{\rho}_m^- \mathrm{d}s \right]$$
$$\approx \frac{l_m}{2} \vec{A}(\vec{r}_m) \cdot (\vec{\rho}_m^{c+} + \vec{\rho}_m^{c-})。 \tag{10.3.44}$$

由 RWG 矢量基函数的性质及矢量恒等式$\nabla \cdot (\varphi \vec{F}) = \vec{F} \cdot \nabla \varphi + \varphi \nabla \cdot \vec{F}$ 可知

$$\langle \vec{f}_m, \nabla \varphi \rangle = -\int_S \varphi \nabla_s \cdot \vec{f}_m \mathrm{d}s。 \tag{10.3.45}$$

利用（10.2.27）的结果，并将 φ 用三角形面元质心处的值 $\varphi(\vec{r}_m^{c+})$ 近似，即可得到

$$-\int_S \varphi \nabla_s \cdot \vec{f}_m \mathrm{d}s = \left[\frac{l_m}{A_m^+} \int_{T_m^+} \varphi \mathrm{d}s - \frac{l_m}{A_m^-} \int_{T_m^-} \varphi \mathrm{d}s \right]$$
$$\approx -l_m [\varphi(\vec{r}_m^{c+}) - \varphi(\vec{r}_m^{c-})] \tag{10.3.46}$$

$\vec{E}_i(\vec{r})$ 也用棱边 m 中点处的值$\vec{E}_i(\vec{r}_m)$ 近似，我们又有

$$\langle \vec{f}_m, \vec{E}_i \rangle \approx \frac{l_m}{2} (\vec{\rho}_m^{c+} + \vec{\rho}_m^{c-}) \cdot \vec{E}_i(\vec{r}_m)。 \tag{10.3.47}$$

把以上所得近似结果代入式（10.3.42）并按顺序把 n 换成 $n-1$，就可得到

$$\frac{l_m}{2} (\vec{\rho}_m^{c+} + \vec{\rho}_m^{c-}) \cdot \vec{A}(\vec{r}_m, t_n)$$
$$= \frac{l_m \Delta t}{2} (\vec{\rho}_m^{c+} + \vec{\rho}_m^{c-}) \cdot \vec{E}_i(\vec{r}_m, t_{n-1}) + l_m \Delta t [\varphi(\vec{r}_m^{c+}, t_{n-1})$$
$$- \varphi(\vec{r}_m^{c-}, t_{n-1})] + \frac{l_m}{2} (\vec{\rho}_m^{c+} + \vec{\rho}_m^{c-}) \cdot \vec{A}(\vec{r}_m, t_{n-1}),$$
$$m = 1, 2, \cdots, N_s。 \tag{10.3.48}$$

为了进一步表示 $\vec{A}$ 和 φ，需要把其中所包含的面电流$\vec{J}_s$用基函数作近似表示，引入

$$\vec{J}_s(\vec{r}, t) = \sum_{k=1}^{N_s} I_k(t) \vec{f}_k(\vec{r}), \tag{10.3.49}$$

其中 $I_k(t)$ 为棱边 k 上未知面电流的展开系数，并用以表示电流随时间的变化，

N_s 为除边界棱边外 S 面所包含的面元边数。任一三角形面元最多有三个非零基函数。对于特定的棱边 k，相应的基函数$\vec{f}_k$是惟一对其有电流正交分量的，而与 $T_k^{\pm}$ 其他边相关的电流则与该棱边平行，从而对其正交分量的贡献为零。因此，$I_k(t)$ 可以被理解为在 t 时刻垂直流向棱边 k 的电流（$\vec{f}_k$在棱边 k 上的正交分量为 1）。边界棱边之所以能从式（10.3.49）中消失，正是因为满足了垂直于表面边界的电流为零的要求。

为了近似表达$\vec{A}(\vec{r},\ t_n)$，把式（10.3.49）代入式（10.3.36），便有

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r},t_n) &= \mu\int_S \frac{\sum_{k=1}^{N_s} I_k(t_n - R/v)\vec{f}_k(\vec{r'})}{4\pi R}\mathrm{d}S' \\ &\approx \sum_{k=1}^{N_s} I_k(t_n - R_{mk}/v)\vec{f}_{mk},\end{aligned} \tag{10.3.50}$$

其中 $R_{mk} = |\vec{r}_m - \vec{r}_k|$，$\vec{f}_{mk} = \mu\int_S \frac{\vec{f}_k}{4\pi R_m}\mathrm{d}S'$，$R_m = |\vec{r}_m - \vec{r'}|$，$\vec{r}_m$和$\vec{r}_k$分别为棱边 m 和棱边 k 中点处的位矢。在推导上式的过程中，为了避免繁琐的积分，用 $I_k(t_n - R_{mk}/v)$ 代替了 $I_k(t_n - R/v)$，这是以假定在 $T_k^{\pm}$ 内电流的变化不明显为前提的。当 $m = k$ 时，$R_{mk} = 0$。令$\vec{A}'(\vec{r},\ t_n)$ 表示分离出这一项后的$\vec{A}(\vec{r},\ t_n)$，即有

$$\vec{A}(\vec{r},t_n) = \vec{f}_{mm}I_m(t_n) + \vec{A}'(\vec{r},t_n)。 \tag{10.3.51}$$

对 t_n 时刻 $\varphi(\vec{r},\ t_n)$ 的计算也可做类似的处理。将式（10.3.49）代入式（10.3.36）可得

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r},t_n) &= -\frac{1}{\varepsilon}\int_S\int_0^{t_n - R/v} \frac{\sum_{k=1}^{N_s} I_k(\tau)\nabla'\cdot\vec{f}_k}{4\pi R}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}S' \\ &\approx -\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{N_s}\int_0^{t_R^{c+}} I_k(\tau)\mathrm{d}\tau\int_{T_k^+}\frac{\nabla'\cdot\vec{f}_k}{4\pi R_m^{c+}}\mathrm{d}S' \\ &\quad -\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{N_s}\int_0^{t_R^{c-}} I_k(\tau)\mathrm{d}\tau\int_{T_k^-}\frac{\nabla'\cdot\vec{f}_k}{4\pi R_m^{c-}}\mathrm{d}S' \\ &\approx \sum_{k=1}^{N_s}\left[\int_0^{t_R^{c+}} I_k(\tau)\mathrm{d}\tau\varphi_{mk}^{c+} + \int_0^{t_R^{c-}} I_k(\tau)\mathrm{d}\tau\varphi_{mk}^{c-}\right],\end{aligned} \tag{10.3.52}$$

其中 $t_R^{c\pm} = t_n - R_{mk}^{c\pm}/v$，$R_{mk}^{c\pm} = |\vec{r}_m - \vec{r}_k^{c\pm}|$，

$$\varphi_{mk}^{c\pm} = -\frac{l_k}{\varepsilon A_k^{\pm}}\int_{T_k^{\pm}}\frac{1}{4\pi R_m^{c\pm}}\mathrm{d}S',\quad R_m^{c\pm} = |\vec{r}_m^{c\pm} - \vec{r'}|。$$

如果用 $\vec{r}_m^{c\pm}$ 替换式（10.3.52）中的 $\vec{r}$，则可计算面元质心处的 φ。

现在，式（10.3.48）中的各项均可计算。考察该式可以发现，只有$\vec{A}(\vec{r}_m,\ t_n)$ 这一项要在 t_n 时刻计算，其他各项均取 t_{n-1}时刻的值。一旦这些值都是已知的，只要保证对所有的 m 和 $k(m \neq k)$ 选取 $\Delta t < R_{mk}/v$，就可由此得到所考虑时

域积分方程的一种显式解。再利用式（10.3.51）又有

$$\frac{l_m}{2}\vec{f}_{mm}\cdot(\overrightarrow{\rho_m^{c+}}+\overrightarrow{\rho_m^{c-}})I_m(t_n)=\frac{l_m\Delta t}{2}(\overrightarrow{\rho_m^{c+}}+\overrightarrow{\rho_m^{c-}})\cdot\vec{E}_i(\vec{r}_m,t_{n-1})$$

$$-\frac{l_m}{2}\cdot(\overrightarrow{\rho_m^{c+}}+\overrightarrow{\rho_m^{c-}})\cdot[\vec{A}(\vec{r}_m,t_n)-\vec{A}(\vec{r}_m,t_{n-1})]$$

$$+l_m\Delta t[\varphi(\overrightarrow{r_m^{c+}},t_{n-1})-\varphi(\overrightarrow{r_m^{c-}},t_{n-1})]。\tag{10.3.53}$$

该式表明，等号右侧的量比左侧的量早一个时间步，这是用已知电流计算未知电流的步进格式，用以计算 $m=1$，2，…，N_s，$t=t_n$ 时刻的电流。然后再推进一个时间步，计算 t_{n+1}时刻的电流。依此类推，就可计算任何时间段的电流分布随时间的变化。

2. 隐式解法

为了用隐式算法求得方程（10.3.37）的数值解，我们把对 $\vec{A}$ 的时间微商用向后差分来近似，这时我们有

$$\left[\frac{\vec{A}(\vec{r},t_n)-\vec{A}(\vec{r},t_{n-1})}{\Delta t}+\nabla\varphi(\vec{r},t_n)\right]_t=\vec{E}_i(\vec{r},t_n)\Big|_t\tag{10.3.54}$$

或展开成

$$[\vec{A}(\vec{r},t_n)+\Delta t\nabla\varphi(\vec{r},t_n)]_t=[\Delta tE_i(\vec{r},t_n)+\vec{A}(\vec{r},t_{n-1})]_t。\tag{10.3.55}$$

仍用矢量基函数$\vec{f}_m$对上式两侧做内积运算即有

$$\langle\vec{f}_m,\vec{A}(\vec{r},t_n)\rangle+\langle\vec{f}_m,\Delta t\nabla\varphi(\vec{r},t_n)\rangle=\langle\vec{f}_m,\Delta t\vec{E}_i(\vec{r},t_n)\rangle$$

$$+\langle\vec{f}_m,\vec{A}(\vec{r},t_{n-1})\rangle。\tag{10.3.56}$$

利用式（10.3.45），上式又可改为

$$\langle\vec{f}_m,\vec{A}(\vec{r},t_n)\rangle-\langle\nabla\cdot\vec{f}_n,\Delta t\varphi(\vec{r},t_n)\rangle$$

$$=\langle\vec{f}_m,\Delta t\vec{E}_i(\vec{r},t_n)\rangle+\langle\vec{f}_m,\vec{A}(\vec{r},t_{n-1})\rangle。\tag{10.3.57}$$

把$\vec{f}_m$的具体表达式代入上式，可把以上各项内积表示为

$$\langle\vec{f}_m,\vec{A}\rangle=\vec{A}(\overrightarrow{r_m^{c+}})\cdot\left[\frac{l_m}{2A_m^+}\int_{T_m^+}\vec{\rho}_m^+\mathrm{d}s\right]+\vec{A}(\overrightarrow{r_m^{c-}})\cdot\left[\frac{l_m}{2A_m^-}\int_{T_m^-}\vec{\rho}_m^-\mathrm{d}s\right]$$

$$\approx\frac{l_m}{2}[\vec{A}(\overrightarrow{e_m^{c+}})\cdot\overrightarrow{\rho_m^{c+}}+\vec{A}(\overrightarrow{r_m^{c-}})\cdot\overrightarrow{\rho_m^{c-}}],\tag{10.3.58}$$

$$\langle\vec{f}_m,\nabla\varphi\rangle\approx-l_m[\varphi(\overrightarrow{r_m^{c+}})-\varphi(\overrightarrow{r_m^{c-}})],\tag{10.3.60}$$

$$\langle\vec{f}_m,\vec{E}_i\rangle\approx\frac{l_m}{2}[\overrightarrow{\rho_m^{c+}}\cdot\vec{E}_i(\overrightarrow{r_m^{c+}})+\overrightarrow{\rho_m^{c-}}\cdot\vec{E}_i(\overrightarrow{r_m^{c-}})]。\tag{10.3.61}$$

在这里用 $T_m^{\pm}$ 质心处的值代替了三角形面元棱边中点的值，这种近似更有效。

利用以上结果，式（10.3.57）成为

$$\frac{1}{2}l_m[\overrightarrow{\rho_m^{c+}}\cdot\vec{A}(\overrightarrow{r_m^{c+}},t_n)+\overrightarrow{\rho_m^{c-}}\cdot\vec{A}(\overrightarrow{r_m^{c-}},t_n)]-\Delta tl_m[\varphi(\overrightarrow{r_m^{c+}},t_n)-\varphi(\overrightarrow{r_m^{c-}},t_n)]$$

$$= \frac{l_m \Delta t}{2}[\overrightarrow{\rho_m^{c+}} \cdot \vec{E}_i(\overrightarrow{r_m^{c+}}, t_n) + \overrightarrow{\rho_m^{c-}} \cdot \vec{E}_i(\overrightarrow{r_m^{c-}}, t_n)]$$

$$+ \frac{l_m}{2}[\overrightarrow{\rho_m^{c+}} \cdot \vec{A}(\overrightarrow{r_m^{c+}}, t_{n-1}) - \overrightarrow{\rho_m^{c-}} \cdot \vec{A}(\overrightarrow{r_m^{c-}}, t_{n-1})]。\quad (10.3.61)$$

仍用式（10.3.49）作为$\vec{J}_s(\vec{r}, t)$的近似展开式，经过$\vec{A}$和φ的近似计算，可再把上式转换为隐式计算时域积分方程（10.3.54）的离散表示

$$\sum_{k=1}^{N_s} z_{amk}(t_n) + \Delta t \sum_{k=1}^{N_s} z_{bmk}(t_n) = F_m(t_n) + \sum_{k=1}^{N_s} z_{amk}(t_{n-1}), m = 1, 2, \cdots, N,\quad (10.3.62)$$

其中

$$z_{amk}(t_n) = I_k(t_R^{c++})\left[\frac{\mu l_m l_k}{2A_k^+}\overrightarrow{\rho_m^{c+}} \cdot \int_{T_k^+} \frac{\overrightarrow{\rho_k^+}}{4\pi |\overrightarrow{r_m^{c+}} - \vec{r}'|} \mathrm{d}s'\right]$$

$$+ I_k(t_R^{c+-})\left[\frac{\mu l_m l_k}{2A_k^-}\overrightarrow{\rho_m^{c+}} \cdot \int_{T_k^-} \frac{\overrightarrow{\rho_k^-}}{4\pi |\overrightarrow{r_m^{c+}} - \vec{r}'|} \mathrm{d}s'\right]$$

$$+ I_k(t_R^{c-+})\left[\frac{\mu l_m l_k}{2A_k^+}\overrightarrow{\rho_m^{c-}} \cdot \int_{T_k^+} \frac{\overrightarrow{\rho_k^+}}{4\pi |\overrightarrow{r_m^{c-}} - \vec{r}'|} \mathrm{d}s'\right]$$

$$+ I_k(t_R^{c--})\left[\frac{\mu l_m l_k}{2A_k^-}\overrightarrow{\rho_m^{c-}} \cdot \int_{T_k^-} \frac{\overrightarrow{\rho_k^-}}{4\pi |\overrightarrow{r_m^{c-}} - \vec{r}'|} \mathrm{d}s'\right],\quad (10.3.63)$$

$$z_{bmk}(t_n) = \left[\int_0^{t_R^{c++}} I_k(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\left[\frac{l_m l_k}{\varepsilon A_k^+}\int_{T_k^+} \frac{\mathrm{d}s'}{4\pi |\overrightarrow{r_m^{c+}} - \vec{r}'|}\right]$$

$$- \left[\int_0^{t_R^{c+-}} I_k(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\left[\frac{l_m l_k}{\varepsilon A_k^-}\int_{T_k^-} \frac{\mathrm{d}s'}{4\pi |\overrightarrow{r_m^{c+}} - \vec{r}'|}\right]$$

$$- \left[\int_0^{t_R^{c-+}} I_k(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\left[\frac{l_m l_k}{\varepsilon A_k^+}\int_{T_k^+} \frac{\mathrm{d}s'}{4\pi |\overrightarrow{r_m^{c+}} - \vec{r}'|}\right]$$

$$+ \left[\int_0^{t_R^{c--}} I_k(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\left[\frac{l_m l_k}{\varepsilon A_k^-}\int_{T_k^-} \frac{\mathrm{d}s'}{4\pi |\overrightarrow{r_m^{c+}} - \vec{r}'|}\right]\quad (10.3.64)$$

其中 $t_R^{c\pm\pm} = t_n - R_{mk}^{c\pm\pm}/v$，$R_{mk}^{c\pm\pm} = |\overrightarrow{r_m^{c\pm}} - \overrightarrow{r_k^{c\pm}}|$，$F_m(t_n)$ 表示 t_n 时刻的式（10.3.61）。

在隐式解法中 Δt 的选取与散射体的离散化无关。当用方程（10.3.62）计算 t_n 时刻的电流时，直到 t_{n-1} 时刻的电流都是已知的。若式（10.3.63）和（10.3.64）中的某些项满足 $\Delta t \leqslant R_{mk}^{c\pm\pm}/v$，将这些已知项移至方程（10.3.62）等号右侧，未知项仍保留在等号左侧，则方程（10.3.62）可改写成

$$\sum_{k=1}^{N_s} \alpha_{m,k} I_k(t_n) = F_m(t_n) + \sum_{k=1}^{N_s} \beta_{m,k} I_k\left(t_{n-1} - \frac{R_{mk}^{c\pm\pm}}{v}\right),\quad m = 1, 2, \cdots, N_s\quad (10.3.65)$$

其中 α_{mk} 和 β_{mk} 分别为矩阵 α 和 β 的元素，其表达式不难由相关方程导出。α 是稀疏矩阵，其稀疏程度与 Δt 有关。由于该矩阵不是时间的函数，故只需要初始时刻计算一次，通过步进法求解方程（10. 3. 65）即可获得散射体表面上任一时刻的电流。

10. 4　基于变分原理的有限元法

上面所讨论的积分方程方法对于表面问题比较适用，对于体问题由于单元数量过大而失去优越性。另一种重要的频域数值方法称为有限元法，如果从微分算子方程出发，则很容易归结为加权余量法，它也可以基于微分算子方程的变分原理。电磁场问题的变分原理我们已经熟悉，下面我们就在此基础上讨论频域电磁场问题的有限元法。

10. 4. 1　有限元法基函数的构造

有限元法可用于任何维度，我们只以三维问题为例进行讨论。和所有数值方法一样，第一步都是考虑如何对问题的解域进行剖分，对散射问题就是把散射体划分为离散单元。为了剖分的灵活性，对面问题往往采用三角元，对体问题则采用四面体单元。

设问题的解域为 V，其边界为 S。用四面体单元对 V 进行剖分，S 则被三角形单元所代替。我们用 e 表示四面体单元的编号，单元 e 的顶点称为节点，分别用 1、2、3、4 表示，如图 10 – 6 所示

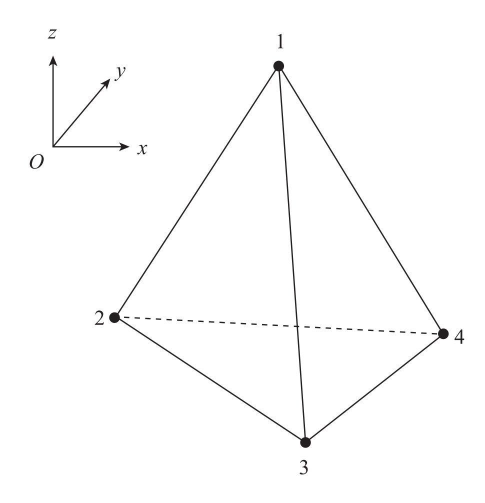


图 10 – 6　四面体单元

任一四面体单元 e 内的未知函数 $\varphi(x, y, z)$ 可用一线性插值函数近似表示为

$$\varphi^e(x,y,z) = \beta_1^e + \beta_2^e x + \beta_3^e y + \beta_4^e z, \tag{10.4.1}$$

其中 β_i^e，$i=1$，2，3，4 为待定系数。设（x_i^e，y_i^e，z_i^e），$i=1$，2，3，4 为节点 i 的坐标，则节点上的函数值分别为

$$\varphi_1^e = \beta_1^e + \beta_2^e x_1 + \beta_3^e y_1 + \beta_4^e z_1,$$

$$\varphi_2^e = \beta_1^e + \beta_2^e x_2 + \beta_3^e y_2 + \beta_4^e z_2,$$

$$\varphi_3^e = \beta_1^e + \beta_2^e x_3 + \beta_3^e y_3 + \beta_4^e z_3,$$

$$\varphi_4^e = \beta_1^e + \beta_2^e x_4 + \beta_3^e y_4 + \beta_4^e z_4。$$

由以上四式可解出 β_i^e，分别为

$$\beta_1^e = \frac{1}{6V^e}\begin{vmatrix} \varphi_1^e & \varphi_2^e & \varphi_3^e & \varphi_4^e \\ x_1^e & x_2^e & x_3^e & x_4^e \\ y_1^e & y_2^e & y_3^e & y_4^e \\ z_1^e & z_2^e & z_3^e & z_4^e \end{vmatrix} = \frac{1}{6V^e}(a_1^e\varphi_1^e + a_2^e\varphi_2^e + a_3^e\varphi_3^e + a_4^e\varphi_4^e)$$

$$\beta_2^e = \frac{1}{6V^e}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \varphi_1^e & \varphi_2^e & \varphi_3^e & \varphi_4^e \\ y_1^e & y_2^e & y_3^e & y_4^e \\ z_1^e & z_2^e & z_3^e & z_4^e \end{vmatrix} = \frac{1}{6V^e}(b_1^e\varphi_1^e + b_2^e\varphi_2^e + b_3^e\varphi_3^e + b_4^e\varphi_4^e)$$

$$\beta_3^e = \frac{1}{6V^e}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1^e & x_2^e & x_3^e & x_4^e \\ \varphi_1^e & \varphi_2^e & \varphi_3^e & \varphi_4^e \\ z_1^e & z_2^e & z_3^e & z_4^e \end{vmatrix} = \frac{1}{6V^e}(c_1^e\varphi_1^e + c_2^e\varphi_2^e + c_3^e\varphi_3^e + c_4^e\varphi_4^e)$$

$$\beta_4 = \frac{1}{6V^e}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1^e & x_2^e & x_3^e & x_4^e \\ y_1^e & y_2^e & y_3^e & y_4^e \\ \varphi_1^e & \varphi_2^e & \varphi_3^e & \varphi_4^e \end{vmatrix} = \frac{1}{6V^e}(\mathrm{d}_1^e\varphi_1^e + \mathrm{d}_2^e\varphi_2^e + \mathrm{d}_3^e\varphi_3^e + \mathrm{d}_4^e\varphi_4^e)$$

其中

$$V^e = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1^e & x_2^e & x_3^e & x_4^e \\ y_1^e & y_2^e & y_3^e & y_4^e \\ z_1^e & z_2^e & z_3^e & z_4^e \end{vmatrix}$$

为 e 单元的体积，系数 a_i^e，b_i^e，c_i^e 和 d_i^e，$i=1$，2，3，4 由节点坐标决定。例如，当 $i=1$ 时有

$$a_1^e = \begin{vmatrix} x_2^e & y_2^e & z_2^e \\ x_3^e & y_3^e & z_3^e \\ x_4^e & y_4^e & z_4^e \end{vmatrix}, \qquad b_1^e = \begin{vmatrix} 1 & y_2^e & z_2^e \\ 1 & y_3^e & z_3^e \\ 1 & y_4^e & z_4^e \end{vmatrix},$$

$$c_1^e = \begin{vmatrix} 1 & x_2^e & z_2^e \\ 1 & x_3^e & z_3^e \\ 1 & x_4^e & z_4^e \end{vmatrix}, \qquad d_1^e = \begin{vmatrix} 1 & x_2^e & y_2^e \\ 1 & x_3^e & y_3^e \\ 1 & x_4^e & y_4^e \end{vmatrix}。$$

其他系数可由下角标循环依次获得。

将 β_i^e，$i=1$，2，3，4 代入式（10.4.1），可得

$$\varphi^e(x,y,z) = \sum_{i=1}^{4} N_i^e(x,y,z)\varphi_i^e, \tag{10.4.2}$$

其中 N_i^e 称为形函数，其形式为

$$N_i^e(x,y,z) = \frac{1}{6V^e}(a_i^e + b_i^e x + c_i^e y + d_i^e z) \tag{10.4.3}$$

容易证明，形函数 N_i^e（x，y，z）具有如下的重要性质

$$N_i^e(x_j,y_j,z_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j。\end{cases} \quad i,j = 1,2,3,4$$

$$= \delta_{ij}, \tag{10.4.4}$$

其中 δ_{ij}为克罗内克尔（Kronecker）δ 函数。这说明，若观察点位于四面体单元 e 中与第 i 个节点相对的三角形内，则 N_i^e(x，y，z）为零，使得单元之间的连续性得到了保证。式（10.4.2）表明 N_i^e 相当于单元 e 内的基函数，所以被称为插值函数或基函数。

10.4.2　有限元法用于矢量波动方程构成的边值问题

前面已经证明由矢量波动方程

$$\nabla \times \mu^{-1} \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) - \mu^{-1} k^2 \vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{i}\omega \vec{J}(\vec{r}), \vec{r} \in V \tag{10.4.5}$$

和齐次边界条件

$$\begin{matrix} \hat{n} \times \vec{E}(\vec{r}) = 0, \vec{r} \in S_1, \\ \hat{n} \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = 0, \vec{r} \in S_2, \end{matrix} \quad S_1 + S_2 = S, \tag{10.4.6}$$

当 k 为实数时构成电磁场的自伴边值问题。该问题的解 $\vec{E}(\vec{r})$ 使下面的泛函取极值

$$J[\vec{E}] = \int_V \mu^{-1} |\nabla \times \vec{E}|^2 \mathrm{d}V - \int_V \mu^{-1} k^2 |\vec{E}|^2 \mathrm{d}V - 2\mathrm{i}\omega \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} \mathrm{d}V \tag{10.4.7}$$

该泛函在直角坐标系中具有以下的形式

$$J[\vec{E}] = \int_V \mu^{-1} \left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)^2 \right] \mathrm{d}V$$

$$- \int_V \mu^{-1} k^2 (E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) \mathrm{d}V - 2\mathrm{i}\omega \int_V (E_x J_x + E_y J_y + E_z J_z) \mathrm{d}V。 \tag{10.4.8}$$

如果对解域 V 用四面体离散，则可按以上方式构造基函数如式（10.4.3）。当以节点上 $\vec{E}$ 的三个分量为未知量时，就可对每个单元中的场进行近似展开

$$
\begin{aligned}
E_x^e &= \sum_{j=1}^{4} N_j^e E_{xj}^e = [N^e]^{\mathrm{T}}[E_x^e],\\
E_y^e &= \sum_{j=1}^{4} N_j^e E_{yj}^e = [N^e]^{\mathrm{T}}[E_y^e],\\
E_z^e &= \sum_{j=1}^{4} N_j^e E_{zj}^e = [N^e]^{\mathrm{T}}[E_z^e],
\end{aligned}
\tag{10.4.9}
$$

其中 T 表示转置，且

$$
[N^e] = (N_1^e, N_2^e, N_3^e, N_4^e)^T,
$$

$$
[E_p^e] = (E_{p1}^e, E_{p2}^e, E_{p3}^e, E_{p4}^e)^T, \quad p = x, y, z。
$$

把以上表示代入式（10.4.8）即得到任一单元 e 的体积 V^e 中的 $J^e[E^e]$，再分别取其对 E_{xi}^e，E_{yi}^e 和 E_{zi}^e，$i=1$，2，3，4 的偏导数并把结果表示成矩阵形式，就可得到

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{\partial J^e}{\partial E_x^e}\right] &= [K_{xx}^e][E_x^e] + [K_{xy}^e][E_y^e] + [K_{xz}^e][E_z^e] - [b_x^e],\\
\left[\frac{\partial J^e}{\partial E_y^e}\right] &= [K_{yx}^e][E_x^e] + [K_{yy}^e][E_y^e] + [K_{yz}^e][E_z^e] - [b_y^e],\\
\left[\frac{\partial J^e}{\partial E_z^e}\right] &= [K_{zx}^e][E_x^e] + [K_{zy}^e][E_y^e] + [K_{zz}^e][E_z^e] - [b_z^e],
\end{aligned}
\tag{10.4.10}
$$

其中

$$
\left[\frac{\partial J^e}{\partial E_p^e}\right] = \left[\frac{\partial J^e}{\partial E_{p1}^e}, \frac{\partial J^e}{\partial E_{p2}^e}, \frac{\partial J^e}{\partial E_{p3}^e}, \frac{\partial J^e}{\partial E_{p4}^e}\right],
$$

$$
K_{xxij}^e = 2\int_{V^e} \mu^{-1}\left[\frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_j^e}{\partial y} + \frac{\partial N_i^e}{\partial z}\frac{\partial N_j^e}{\partial z} - k^2 N_i^e N_j^e\right]\mathrm{d}V,
$$

$$
K_{yyij}^e = 2\int_{V^e} \mu^{-1}\left[\frac{\partial N_i^e}{\partial z}\frac{\partial N_j^e}{\partial z} + \frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_j^e}{\partial x} - k^2 N_i^e N_j^e\right]\mathrm{d}V,
$$

$$
K_{zzij}^e = 2\int_{V^e} \mu^{-1}\left[\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_j^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_j^e}{\partial y} - k^2 N_i^e N_j^e\right]\mathrm{d}V,
$$

$$
K_{pqij}^e = -2\int_{V^e} \mu^{-1}\frac{\partial N_i^e}{\partial p}\frac{\partial N_j^e}{\partial q}\mathrm{d}V, \quad p \neq q
$$

$$
b_{p_i}^e = 2\mathrm{i}\omega\int_{V^e} N_i^e J_p \mathrm{d}V,
$$

$$
p, q = x, y, z; i, j = 1, 2, 3, 4。
$$

为了把以上表示扩展到所有单元的组合，将以上矩阵进行扩展，并对所有单元进行增广组合，再令 $\delta J=0$，就可得到符合变分原理的矩阵方程。

$$\left[\frac{\partial J}{\partial E_x}\right]=\sum_{e=0}^{M}\{[\overline{K_{xx}^e}][\overline{E_x^e}]+[\overline{K_{xy}^e}][\overline{E_y^e}]+[\overline{K_{xz}^e}][\overline{E_z^e}]-[\overline{b_x^e}]\}=[0],$$

$$\left[\frac{\partial J}{\partial E_y}\right]=\sum_{e=0}^{M}\{[\overline{K_{yx}^e}][\overline{E_x^e}]+[\overline{K_{yy}^e}][\overline{E_y^e}]+[\overline{K_{yz}^e}][\overline{E_z^e}]-[\overline{b_y^e}]\}=[0],$$

$$\left[\frac{\partial J}{\partial E_z}\right]=\sum_{e=0}^{M}\{[\overline{K_{zx}^e}][\overline{E_x^e}]+[\overline{K_{zy}^e}][\overline{E_y^e}]+[\overline{K_{zz}^e}][\overline{E_z^e}]-[\overline{b_z^e}]\}=[0]。$$

(10.4.11)

组合相加以后又可表示成

$$\begin{aligned}K_{xx}E_x+K_{xy}E_y+K_{xz}E_z&=b_x,\\K_{yx}E_x+K_{yy}E_y+K_{yz}E_z&=b_y,\\K_{zx}E_x+K_{zy}E_y+K_{zz}E_z&=b_z。\end{aligned}\tag{10.4.12}$$

最后组成总矩阵方程

$$\begin{bmatrix}K_{xx}&K_{xy}&K_{xz}\\K_{yx}&K_{yy}&K_{yz}\\K_{zx}&K_{zy}&K_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_x\\E_y\\E_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{bmatrix}。\tag{10.4.13}$$

除此之外，还要考虑边界节点上的未知量，它们由边界条件决定。在 S_1 上需满足第一类齐次边界条件，但 S_2 上的第二类齐次边界条件已自动得到满足。如果 V 内还有媒质的不连续性，还要考虑连接条件。

由于所用基函数的性质，式（10.4.13）中的系数矩阵是个高度稀疏的矩阵，这正是有限元法的一大优越性。

10.4.3 有限元法的伪解问题

有限元法能有效地解决很多复杂的电磁场问题，但也并非没有问题。一个最大的问题是有时用有限元法所获得的解是不正确的。这一问题首先是在求解波导中的电磁场时发现的，后来又在确定性问题中得到确认。研究表明，出现问题的原因是所求得的解不满足散度条件，即磁场不满足$\nabla\cdot\vec{B}=\nabla\cdot(\mu\vec{H})=0$，在无源区域电场不满足$\nabla\cdot\vec{D}=\nabla\cdot(\varepsilon\vec{E})=0$，在源区不满足$\nabla\cdot(\varepsilon\vec{E})=-\nabla\cdot(\vec{J}/\mathrm{i}\omega)$。实际上这一结论已隐含在波动方程中，当然也就隐含在与其等价的变分问题中。

从数学上来看，波动方程（10.4.5）与变分问题（10.4.7）等价，而波动方程正是变分问题（10.4.7）的欧勒方程。为了通过泛函求得波动方程（10.4.5）的解，需要对泛涵 $J(\vec{E})$ 取一阶变分。变分的存在性要求 $\vec{E}$ 是二次可微的，也就等于要求$\nabla\times\vec{E}/\mu$ 是连续的。可是，在用有限元法求解问题的过程中，仅仅要求用以展开场量的形函数是连续的，而对其导数并没有连续性的要求。根据有关算子方程广义解的理论可知，这样所求得的仅是相应算子方程的弱解，这种解是在非经典意义上满足所求解的算子方程。由于在弱解中$\nabla\times\vec{E}/\mu$ 不连续，所以不能以取式（10.4.5）的散度来证明散度条件是否满足。也就是说，用有限

元法所得到的解可能不满足散度条件，其中可能掺杂了“伪解”。为了使所得解是正确的，就必须从所得解中把伪解排除掉，当然最好是使伪解不产生。

在已经知道的几种消除伪解的方法中，最直接的方法是，采用具有连续导数的基函数。遗憾的是，这类函数通常比较复杂，在有限元法中难以实现。一种比较简单的方法是，先用有限元法求得电场（或磁场），再通过麦克斯韦方程求出磁场（或电场）。具体地讲，如果感兴趣的是磁场，可先用有限元法求得电场，而后按方程

$$\vec{H} = -\frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\nabla\times\vec{E}$$

求得磁场。即使 $\vec{E}$ 中掺杂了伪解，经过旋度运算也可以消除。同样的道理，如果感兴趣的是电场，则应先求得磁场，然后由关系

$$\vec{E} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega\mu}\nabla\times\vec{H} - \vec{J}$$

求得电场。然而这一方法也存在缺点，因为偏导数计算会导致所得的结果比直接有限元法所得到的解精度低。

另外一种方法是在方程中增加一项罚函数以强加散度条件。例如将式（10.4.7）修正为

$$J[\vec{E}] = \int_V\left\{\mu^{-1}\nabla\times\vec{E}\cdot\nabla\times\vec{E} + \mu^{-1}\varepsilon^{-2}\left[\nabla\cdot(\varepsilon\vec{E}) + \frac{\nabla\cdot\vec{J}}{\mathrm{i}\omega}\right]^2 - \mu^{-1}k^2\vec{E}\cdot\vec{E}^*\right\}\mathrm{d}V - \mathrm{i}\omega\int_V(\vec{E}\cdot\vec{J}^* - \vec{E}^*\cdot\vec{J})\,\mathrm{d}V。\qquad(10.4.14)$$

其中等号右侧第一个积分中被积函数的第二项为罚项，即使不能完全清除解中的散度，至少也能使之大大减小。当然，这种方法也会降低解的精度。

10.4.4　矢量基函数

前已说明，用节点插值导出的标量基函数所构成的有限元方法存在一些明显的缺点，如存在伪解等。此外，如果解域内媒质不连续，还要增加连续性条件，在处理导体和介质的棱角时还会遇到困难。后来发展了基于矢量基函数的矢量有限元法，克服了这些缺点。矢量有限元法把单元棱边上的切向场分量作为未知量，用矢量函数构造基函数，直接将矢量场量进行展开，从而使它特别适用于求解矢量场。

为了容易理解和叙述的方便，将以二维的矩形单元为例来说明。单元的节点和棱边的命名如图 10－7 所示。设该单元在直角坐标系中沿 x 和 y 轴棱边的长度分别为 l_x 和 l_y，单元中心的坐标为（x_c，y_c）。如果认为在每条棱边上的切向场分量均为常量，用 E_{x1} 和 E_{x2} 分别表示棱边 1 和 2 上的 E_x 分量，而用 E_{y1} 和 E_{y2} 分别表示棱边 3 和 4 上 E_y 的分量，则单元内部各点的电场可表示为

$$E_x = \frac{1}{l_y}\left(y_c + \frac{l_y}{2} - y\right)E_{x1} + \frac{1}{l_y}\left(y - y_c + \frac{l_y}{2}\right)E_{x_2},$$

$$E_y = \frac{1}{l_x}\left(x_c + \frac{l_x}{2} - x\right)E_{y1} + \frac{1}{l_x}\left(x - x_c + \frac{l_x}{2}\right)E_{y2}。 \tag{10.4.15}$$

也可表示成矢量形式

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{4} \vec{N}_i E_i, \tag{10.4.16}$$

其中 E_i 为沿棱边 i 的切向场分量，即 $E_1 = E_{x1}$，$E_2 = E_{x2}$，$E_3 = E_{y1}$，$E_4 = E_{y2}$。$\vec{N}_i$ 称为矢量基函数，分别表示为

$$\vec{N}_1 = \frac{1}{l_y}\left(y_c + \frac{l_y}{2} - y\right)\hat{x}, \quad \vec{N}_2 = \frac{1}{l_y}\left(y - y_c + \frac{l_y}{2}\right)\hat{x},$$

$$\vec{N}_3 = \frac{1}{l_x}\left(x_c + \frac{l_x}{2} - x\right)\hat{y}, \quad \vec{N}_4 = \frac{1}{l_x}\left(x - x_c + \frac{l_x}{2}\right)\hat{y}。 \tag{10.4.17}$$

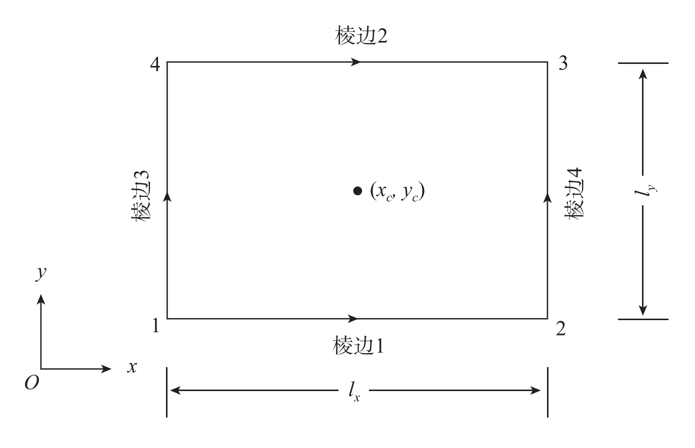


图 10－7　矩形单元的节点和棱边

式（10.4.16）通过矢量基函数用单元棱边上的切向场分量表示单元内部任一点的电场矢量。由式（10.4.17）很容易看出所定义的矢量基函数的特性：$\vec{N}_i$ 只在棱边 i 上有切向分量，而在其他棱边上切向分量为零。这样，使得通过所有单元棱边的切向场的连续性得到保证。$\vec{N}_i$的另一个特点是，每个基函数在矩形单元内满足条件$\nabla \cdot \vec{N}_i = 0$，这正好符合无源区域电磁场所要求的散度条件。所以，用这种基函数表达磁场，自然满足无源区域的要求。此外，很容易求出

$$\nabla \times \vec{N}_1 = \frac{1}{l_y}\hat{z}, \nabla \times \vec{N}_2 = -\frac{1}{l_y}\hat{z},$$

$$\nabla \times \vec{N}_3 = -\frac{1}{l_x}\hat{z}, \nabla \times \vec{N}_4 = \frac{1}{l_x}\hat{z}。 \tag{10.4.18}$$

由于以上四式均为常量，使得建立单元方程变得比较容易。

还应该指出，如果用 $\hat{z}$ 叉乘$\vec{N}_i$，就能得到另一组基函数 $\hat{z} \times \vec{N}_i$（$i = 1，2，3，4$）。与$\vec{N}_i$的切向连续性比较可知，这组新的矢量基函数保证了法向连续性。但与$\vec{N}_i$相反，$\hat{z} \times \vec{N}_i$具有非零散度和零旋度，从而使之更宜于表示表面电流或面电流

密度。这一特点使得它在矩量法中也得到了应用。

对于在二维问题中所使用的三角形单元，也能很容易地得到矢量基函数。图 10－8 给出了三角形单元顶点和棱边的命名。

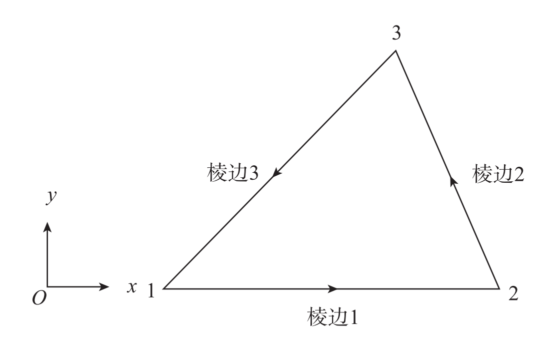


图 10－8　三角形单元的顶点和棱边

三角形单元在有限元法中早已广泛应用，而且和四面体一样建立了与对四面体同样的方法建立的形函数——即标量基函数 N_i，$i=1$，2，3。适用于三角形单元的矢量基函数可用标量基函数产生。为了清楚分辨标量基函数和矢量基函数，我们改用 L_i 表示 N_i，即令

$$L_i = N_i, i = 1,2,3。$$

为导出矢量基函数，首先定义一种 Whitney 矢量函数

$$\vec{W}_{12} = L_1 \nabla L_2 - L_2 \nabla L_1。 \tag{10.4.19}$$

不难证明，$\vec{W}_{12}$具有以下性质

$$\nabla \cdot \vec{W}_{12} = \nabla \cdot (L_1 \nabla L_2) - \nabla \cdot (L_2 \nabla L_1) = 0$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{W}_{12} &= \nabla \times (L_1 \nabla L_2) - \nabla \times (L_2 \nabla L_1) \\ &= 2 \nabla L_1 \times \nabla L_2。\end{aligned} \tag{10.4.20}$$

由于 L_i 为线性函数，L_1 的值从节点 1 处的 1 变化到节点 2 处的 0，L_2 的值从节点 2 处的 1 变化到节点 1 处的 0。如果用 $\hat{e}_{12}$表示从节点 1 指向节点 2 的单位矢量，则有

$$\hat{e}_{12} \cdot \nabla L_1 = -\frac{1}{l_1}, \quad \hat{e}_{12} \cdot \nabla L_2 = \frac{1}{l_1}, \tag{10.4.21}$$

其中 l_1 为棱边 1 的长度，由此可得

$$\hat{e}_{12} \cdot \vec{W}_{12} = \frac{L_1 + L_2}{l_1} = \frac{1}{l_1}, \tag{10.4.22}$$

这表明，$\vec{W}_{12}$沿棱边 1 有一个不变的切向分量。而且，由于 L_1 沿棱边 2 为零，L_2 沿棱边 3 为零，故$\vec{W}_{12}$沿这两条棱边没有切向分量。这样，$\vec{W}_{12}$具备了作为与棱边 1 相关棱边场的矢量基函数所需的全部特性。于是，可定义与棱边 1 相关的矢量基函数$\vec{N}_1$。定义

$$\vec{N}_1 = \vec{W}_{12} l_1 = (L_1 \nabla L_2 - L_2 \nabla L_1) l_1, \tag{10.4.23}$$

其中 l_1 用以使 $\vec{N}_1$ 归一。

用类似的方法可分别定义与棱边 2 和棱边 3 相关的矢量基函数 $\vec{N}_2$ 和 $\vec{N}_3$ 为

$$\begin{aligned} \vec{N}_2 &= \vec{W}_{23} l_2 = (L_2 \nabla L_3 - L_3 \nabla L_2) l_2, \\ \vec{N}_3 &= \vec{W}_{31} l_3 = (L_3 \nabla L_1 - L_1 \nabla L_3) l_3, \end{aligned} \tag{10.4.24}$$

其中 l_2 和 l_3 分别为棱边 2 和棱边 3 的长度。

这样，在有限元法求解电场时，相应问题泛函中的电场 $\vec{E}$ 就可用矢量基函数展开，亦即可将三角形单元内任一点的电场矢量表示为

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{3} \vec{N}_i E_i, \tag{10.4.25}$$

其中 E_i，$i=1$，2，3，为沿棱边 i 的电场切向分量。

与矩形单元中所定义的矢量基函数类似，$\hat{z} \times \vec{N}_i$，$i=1$，2，3，构成另一种矢量基函数，其特点是能保证法向连续性，并具有零旋度和非零散度。

用类似的方法可建立适合四面体单元的矢量基函数。在上面我们也导出了四面体的标量基函数 N_i，如果我们也令

$$L_i = N_i, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

则相应的 Whitney 矢量函数定义为

$$\overrightarrow{W_{12}} = L_1 \nabla L_2 - L_2 \nabla L_1。 \tag{10.4.26}$$

它具有以下性质：

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{W}_{12} &= 0, \\ \nabla \times \vec{W}_{12} &= 2 \nabla L_1 \times \nabla L_2。 \end{aligned} \tag{10.4.27}$$

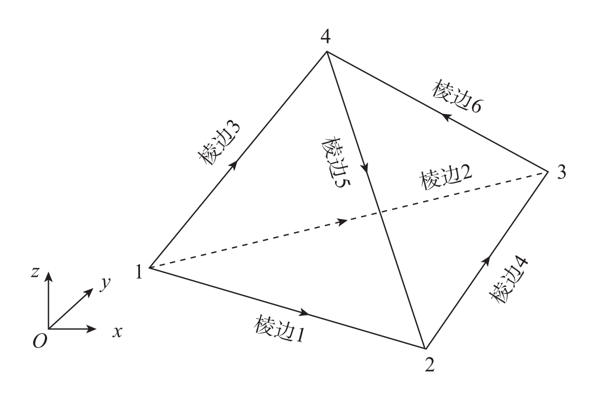


图 10－9　四面体棱边单元

和三角形单元类似，L_i，$i=1$，2，3，4 是线性函数，L_1 的值从节点 1 处的 1 变到节点 2 处的 0，L_2 的值从节点 2 处的 1 变到节点 1 处的 0。所以，若用 $\hat{e}_{12}$ 表从节点 1 指向节点 2 的单位矢量，则有

$$\hat{e}_{12} \cdot \nabla L_1 = -\frac{1}{l_1}, \quad \hat{e}_{12} \cdot \nabla L_2 = \frac{1}{l_1},$$

其中 l_i 为棱边 1 的长度。由此可知

$$\hat{e}_{12} \cdot \vec{W}_{12} = \frac{L_1 + L_2}{l_1} = \frac{1}{l_1}。$$

这说明，$\vec{W}_{12}$沿棱边 1 有一个不变的切向分量。而且，由于 L_1 沿棱边 4，5，6 为零，L_2 沿棱边 2，3，4 为零，故$\vec{W}_{12}$沿这五条棱边都没有切向分量。又由于 L_1 在由节点 2，3，4 所定义的三角形平面上为零，L_2 在由 1，3，4 所定义的三角形平面上为零，故$\vec{W}_{12}$在这两个三角形平面上也没有切向分量。可见，$\vec{W}_{12}$的切向分量只出现在棱边 1 上以及分别由节点 1，2，4 和 1，2，3 所定义的两个三角形平面内。这样$\vec{W}_{12}$具备了作为棱边 1 相关的棱边场的矢量基函数所需要的特性。

与三角形单元中定义矢量基函数类似，定义与棱边 1 相关的矢量基函数$\vec{N}_1$为

$$\vec{N}_1 = \vec{W}_{12} l_1 = (L_1 \nabla L_2 - L_2 \nabla L_1) l_1。 \tag{10.4.28}$$

一般地，可将与棱边 i，$i=1$，2，3，4，5，6，相关的矢量基函数定义为

$$\vec{N}_i = \vec{W}_{i_1 i_2} l_i = (L_{i_1} \nabla L_{i_2} - L_{i_2} \nabla L_{i_1}) l_i \tag{10.4.29}$$

其中 l_i 为棱边 i 的长度。棱边 i 与节点 i_1 和 i_2 的关系列于表 10－1 中。

表 10－1　四面体单元中棱边 i 与节点 i_1 和 i_2 的关系

棱边 i	节点 i_1	节点 i_2
1	1	2
2	1	3
3	1	4
4	2	3
5	4	2
6	3	4

建立了矢量基函数后，四面体单元内任一点的电场矢量就可表示为

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{6} \vec{N}_i E_i, \tag{10.4.30}$$

其中 E_i 为沿棱边 i 的切向场分量。

10.4.5　矢量有限元法单元矩阵的计算

按照有限元法数值求解算子方程的步骤，一旦确定了区域剖分的单元形式，也就确定了对待求场近似展开的基函数，下一个主要问题是将近似表达式代入相应的泛函表达式，并计划组合成最后的有限元代数方程。在上面讨论矢量波动方

程的有限元解法时已知，获得单元方程的计算量主要集中在矩阵元的计算中。如果求解的是方程（10.4.5），则主要需要计算以下两类积分：

$$\int_V \mu^{-1}(\nabla \times \vec{E}) \cdot (\nabla \times \vec{E})^* \mathrm{d}V, \quad \int_V \mu^{-1} k^2 \vec{E} \cdot \vec{E}^* \mathrm{d}V。$$

如果解域 V 内的媒质是均匀的，或在一个单元内媒质参量可用一个平均值代替，则 μ^{-1} 和 k^2 可提到积分号外。于是当把场的展开式（10.4.30）代入以上积分，并对 E_i，$i=1$，2，…，6，取偏导数，这些积分就归结为以下积分的计算：

$$P_{ij}^e = \int_{V^e} (\nabla \times \vec{N}_i^e) \cdot (\nabla \times \vec{N}_j^e) \mathrm{d}V,$$

$$Q_{ij}^e = \int_{V^e} \vec{N}_i^e \cdot \vec{N}_j^e \mathrm{d}V,$$

$$i,j = 1,2,\cdots,6。 \tag{10.4.31}$$

其中 e 表示单元的编号，V^e 表示 e 的体积。

如果计算的是二维问题并采用三角形单元，则根据定义（10.4.23）和（10.4.24）不难验证

$$\nabla \times \vec{N}_i^e = \frac{l_i^e}{\Delta^e}\hat{z}, \quad i = 1,2,3, \tag{10.4.32}$$

其中 Δ^e 表示单元 e 的面积。上式说明 $\nabla \times \vec{N}_i^e$ 是个常量，于是有

$$P_{ij}^e = \frac{l_i^e l_j^e}{\Delta^e}, \quad i,j = 1,2,3。 \tag{10.4.33}$$

Q_{ij}^e 的积分要复杂一些，但因 L_i^e 为 x 和 y 的线性函数，∇L_i^e 为常矢量，再利用公式

$$\int_{\Delta^e} (L_1^e)^l (L_2^e)^m (L_3^e)^n \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{l!m!n!}{(l+m+n+2)!},$$

可以得到

$$Q_{11}^e = \frac{(l_1^e)^2}{24\Delta^e}(f_{22}^e - f_{12}^e + f_{11}^e), Q_{12}^e = \frac{l_1^e l_2^e}{48\Delta^e}(f_{23}^e - f_{22}^e - 2f_{13}^e + f_{12}^e),$$

$$Q_{13}^e = \frac{l_1^e l_3^e}{48\Delta^e}(f_{21}^e - f_{23}^e - f_{11}^e + f_{13}^e), Q_{22}^e = \frac{(l_2^e)^2}{24\Delta^e}(f_{33}^e - f_{23}^e + f_{22}^e),$$

$$Q_{23}^e = \frac{l_2^e l_3^e}{48\Delta^e}(f_{31}^e - f_{33}^e - 2f_{21}^e + f_{23}^e), Q_{33}^e = \frac{(l_3^e)^2}{24\Delta^e}(f_{11}^e - f_{13}^e + f_{33}^e), \tag{10.4.34}$$

其中 $f_{ij}^e = b_i^e b_j^e + c_i^e c_j^e$，$i$，$j=1$，2，3。$b_i^e$ 和 c_i^e 分别为

$$b_1 = y_2 - y_3, b_2 = y_3 - y_1, b_3 = y_1 - y_2,$$

$$c_1 = x_3 - x_2, c_2 = x_1 - x_3, c_3 = x_2 - x_1$$

而 x_i，y_i，$i=1$，2，3，为节点 1，2，3 的坐标。

对于三维问题，又采用四面体单元，则根据定义有

$$\nabla \times \vec{N}_i^e = 2l_i^e \nabla L_{i_1}^e \times \nabla L_{i_2}^e$$

$$= \frac{l_i^e}{(6V^e)^2}[(c_{i_1}^e d_{i_2}^e - \mathrm{d}_{i_1}^e c_{i_2}^e)\hat{x} + (d_{i_1}^e b_{i_2}^e - b_{i_1}^e \mathrm{d}_{i_2}^e)\hat{y} + (b_{i_1}^e c_{i_2}^e - c_{i_1}^e b_{i_2}^e)\hat{z}], \tag{10.4.35}$$

其中所出现的参数已在 10.4.1 中给出，均为单元 e 节点坐标的函数。式（10.4.35）表明，$\nabla \times N_i^e$ 为常量，由此可求得

$$P_{ij}^e = \frac{l_i l_j V^e}{(6V^e)^4}[(c_{i_1}^e d_{i_2}^e - d_{i_1}^e c_{i_2}^e)(c_{j_1}^e d_{j_2}^e - d_{j_1}^e c_{j_2}^e) + (d_{i_1}^e b_{i_2}^e - b_{i_1}^e d_{i_2}^e)(d_{j_1}^e b_{j_2}^e - b_{j_1}^e d_{j_2}^e) + (b_{i_1}^e c_{i_2}^e - c_{i_1}^e b_{i_2}^e)(b_{j_1}^e c_{j_2}^e - c_{j_1}^e b_{j_2}^e)]$$

$$i,j = 1,2,\cdots,6. \tag{10.4.36}$$

对 Q_{ij}^e的计算可利用关系

$$\vec{N}_i^e \cdot \vec{N}_j^e = \frac{l_i^e l_j^e}{(6V^e)^2}[L_{i_1}^e L_{j_1}^e f_{i_2 j_2}^e - L_{i_1}^e L_{j_2}^e f_{i_1 j_2}^e + L_{i_2}^e L_{j_2}^e f_{i_1 j_1}^e]$$

$$i,j = 1,2,\cdots,6,\cdots$$

其中$f_{ij}^e =$（$b_i^e b_j^e + c_i^e c_j^e + d_i^e d_j^e$），以及公式

$$\int_{V^e}(L_1^e)^k (L_2^e)^l (L_3^e)^m (L_4^e)^n \mathrm{d}V = \frac{k!l!m!n!}{(k+l+m+n+3)!}6V^e$$

Q_{ij}^e的表示比较繁长，这里不再给出，但不难看出，P_{ij}^e和 Q_{ij}^e都是由单元参数和坐标决定的数量，很容易计算。

10.5　时域有限元法

上一节讨论的有限元法是基于频域电磁场方程，因此不能直接用于电磁场的时域计算。基于发展时域积分方程法同样的理由，也发展出了时域有限元法。从发展水平看，时域有限元法还处于初级阶段，但它仍然很有意义。为了较完整地了解计算电磁学的发展，我们还是应该对它进行简单的讨论。

10.5.1　基于麦克斯韦旋度方程的时域有限元法

时域有限元是在频域有限元的基础上发展起来的，它们的主要差别是前者增加了时间变量，需要解决的主要问题是时间变量的离散及计算格式的建立。在已发展的时域有限元法中多用加权余量法建立有限元方程，出发点则分别为时域麦克斯韦旋度方程或由其导出的矢量波动方程。首先讨论前一种情况。

考虑一个区域 V，其表面为 S，其内部媒质特性由 $\varepsilon(\vec{r})$ 和 $\mu(\vec{r})$ 表示。若 V 的内部存在电流分布 $\vec{J}(\vec{r},t)$，则 V 内的电磁场满足时域麦克斯韦旋度方程

$$\varepsilon(\vec{r})\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t) = \nabla \times \vec{H}(\vec{r},t) - \vec{J}(\vec{r},t),$$

$$\mu(\vec{r})\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}(\vec{r},t) = -\nabla \times \vec{E}(\vec{r},t)。 \tag{10.5.1}$$

作为初值问题，$\vec{E}(\vec{r},t)$ 和 $\vec{H}(\vec{r},t)$ 的切向分量或其间的阻抗关系在 S 上

对时间 $t\geqslant 0$ 必须是确定的。为了保证解的惟一性，设在 $t=0$ 时 V 内场的初始值是已知的。这时，方程（10.5.1）的解是存在惟一的，可以通过加权余量法对其求得近似数值解。

若选矢量函数 $\vec{v}\in L^2(V)^3$ 作为权函数作用于方程（10.5.1），则有

$$\int_V \vec{v}\cdot\left(\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\nabla\times\vec{H}+\vec{J}\right)\mathrm{d}V=0,$$

$$\int_V \vec{v}\cdot\left(\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}+\nabla\times\vec{E}\right)\mathrm{d}V=0。\tag{10.5.2}$$

若以上两式对所有的 $\vec{v}$ 成立，则称其为方程（10.5.1）的一种弱形式。若 S 上的边界条件为

$$\begin{aligned}&\vec{n}\times\vec{E}=0,\text{在 } S_e \text{ 上},\\&\vec{n}\times\vec{H}=0,\text{在 } S_h \text{ 上},\end{aligned}\quad S_e+S_h=S。\tag{10.5.3}$$

通过方程（10.5.2）可寻求试探空间 $\vec{E}(\vec{r},t)$ 和 $\vec{H}(\vec{r},t)$，且

$$\vec{E}(\vec{r},t)\in H_e(curl,V)\times(0,T),$$

$$\vec{H}(\vec{r},t)\in H_h(curl,V)\times(0,T),$$

其中（0，T）为时间取值范围，而且

$$H_e(curl,V)=\{\vec{E}:\vec{E},\nabla\times\vec{E}\in L^2(V)^3,\vec{n}\times\vec{E}=0,\text{在 } S_e \text{ 上}\},$$

$$H_h(curl,V)=\{\vec{E}:\vec{E},\nabla\times\vec{E}\in L^2(V)^3,\vec{n}\times\vec{H}=0,\text{在 } S_h \text{ 上}\}。$$

为简单起见，仅以标量基函数和点配法为例说明构造时域有限元方程的过程。与频域有限元法不同的是，电场的三个分量设置在同一个节点上，而磁场的三个分量则设置在另一个节点上。于是，为了对 V 中的场进行数值近似，应使用两套互补的网格，每个电场节点和每个磁场节点交叉放置。电场和磁场可分别近似地表示为

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t)&=\sum_{i=1}^{N_e}\alpha_i(\vec{r})\,\vec{E}_i(t),\\\vec{H}(\vec{r},t)&=\sum_{i=1}^{N_h}\beta_j(\vec{r})\,\vec{H}_j(t),\end{aligned}\tag{10.5.4}$$

其中 N_e 和 N_h 分别为电场和磁场网格中的节点数，$\alpha_i(\vec{r})$ 和 $\beta_j(\vec{r})$ 为基函数，且

$$\alpha_i(\vec{r})=\begin{cases}1, & \vec{r}=\vec{r}_i,\\0, & \text{其他节点}\end{cases}$$

$$\beta_j(\vec{r})=\begin{cases}1, & \vec{r}=\vec{r}_j,\\0, & \text{其他节点}\end{cases}$$

在点配法中也选择以上基函数作为权函数 v，当把展开式（10.5.4）代入式（10.5.2）后就可得到

$$\varepsilon(\vec{r}_i)\frac{\mathrm{d}\vec{E}_i(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{j=1}^{N_h}\nabla\beta_j(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=\vec{r}_i}\times\vec{H}_j(t)-\vec{J}(\vec{r}_i),\quad i=1,2,\cdots,N_e,$$

$$\mu(\vec{r}_j)\frac{\mathrm{d}\vec{H}_j(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{N_e}\nabla\alpha_j(\vec{r})\Big|_{\vec{r}=\vec{r}_j}\times\vec{E}_i(t),\quad j=1,2,\cdots,N_h。\tag{10.5.5}$$

以上两式可写成更紧凑的矩阵形式，为此引入

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{E}}&=[\overline{E}_1(t),\overline{E}_2(t),\cdots,\overline{E}_{N_e}(t)]^T,\\ \overline{\boldsymbol{H}}&=[\overline{H}_1(t),\overline{H}_2(t),\cdots,\overline{H}_{N_h}(t)]^T,\\ \overline{\boldsymbol{J}}&=[\overline{J}_1(t),\overline{J}_2(t),\cdots,\overline{J}_{N_e}(t)]^T,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{E}}_i(t)&=(E_{ix}(t),E_{iy}(t),E_{iz}(t))^T,\\ \overline{\boldsymbol{H}}_j(t)&=(H_{jx}(t),H_{jy}(t),H_{jz}(t))^T,\\ \overline{\boldsymbol{J}}_i(t)&=(J_x(\vec{r}_i,t),J_y(\vec{r}_i,t),J_z(\vec{r}_i,t))^T。\end{aligned}$$

显然，$\overline{\boldsymbol{E}}$ 和 $\overline{\boldsymbol{J}}$ 均为 $3N_e$ 维矢量，$\overline{H}$ 为 $3N_h$ 维矢量。这样就有

$$\nabla\beta_j(\vec{r})\big|_{\vec{r}=\vec{r}_i}\times\vec{H}_j(t)=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{\partial\beta_j}{\partial z} & \dfrac{\partial\beta_j}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\beta_j}{\partial z} & 0 & -\dfrac{\partial\beta_j}{\partial x}\\ -\dfrac{\partial\beta_j}{\partial y} & \dfrac{\partial\beta_j}{\partial x} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_{jx}\\ H_{jy}\\ H_{jz}\end{bmatrix}=D_{hj}^i\vec{H}_j\tag{10.5.6}$$

$$\nabla\alpha_i(\vec{r})\big|_{\vec{r}=\vec{r}_j}\times\vec{E}_i(t)=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{\partial\alpha_i}{\partial z} & \dfrac{\partial\alpha_i}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\alpha_i}{\partial z} & 0 & -\dfrac{\partial\alpha_i}{\partial x}\\ -\dfrac{\partial\alpha_j}{\partial y} & \dfrac{\partial\alpha_i}{\partial x} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_{ix}\\ E_{iy}\\ E_{iz}\end{bmatrix}=D_{ei}^j\vec{E}_i\tag{10.5.7}$$

其中

$$D_{hj}^i=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{\partial\beta_i}{\partial z} & \dfrac{\partial\beta_j}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\beta_j}{\partial z} & 0 & -\dfrac{\partial\beta_j}{\partial x}\\ -\dfrac{\partial\beta_j}{\partial y} & \dfrac{\partial\beta_i}{\partial x} & 0\end{bmatrix}_{\vec{r}=\vec{r}_i},$$

$$
D_{ei}^{j}=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial\alpha_i}{\partial z} & \frac{\partial\alpha_i}{\partial y} \\ \frac{\partial\alpha_i}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial\alpha_i}{\partial x} \\ -\frac{\partial\alpha_i}{\partial y} & \frac{\partial\alpha_i}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}_{\vec{r}=\vec{r}_j}\text{。}
$$

式中上角标 i 和 j 分别表示相应的矩阵元素是在$\vec{r}_i$（$i=1$，2，…，N_e）和$\vec{r}_j$（$j=1$，2，…，N_h）的作用下求出的。

在此基础上，构造两个扩展矩阵 P 和 G，其元素分别为 $p_{ij}=D_{hj}^{i}$和 $q=D_{ei}^{j}$，再引入描述电磁场各节点媒质电磁特性的对角矩阵，即介电常数矩阵 S，其元素为 $s_{ii}=\varepsilon(\vec{r}_i)\ \bar{\bar{I}}_3$和磁导率矩阵 T，其元素为 $t_{jj}=\mu(\vec{r}_j)\ \bar{\bar{I}}_3$，其中$\bar{\bar{I}}_3$为 3×3 阶单位矩阵。利用以上矩阵，可将方程（10.5.5）表示成

$$
\frac{\mathrm{d}\bar{E}}{\mathrm{d}t}=S^{-1}P\cdot\bar{H}-S^{-1}\bar{J},
$$

$$
\frac{\mathrm{d}\bar{H}}{\mathrm{d}t}=-T^{-1}Q\cdot\bar{E}\text{。}\tag{10.5.8}
$$

对时间变量可以采用差分近似，如中心差分。当时间步长为 Δt 时，计算磁场的时间相对于计算电场的时间移动了一个半时间步，从而形成一种“蛙跳式”计算格式。这种显式格式是有条件稳定的，其数值稳定性条件为[58]

$$
\Delta t\leqslant\frac{2}{|\lambda_{max}(R)|},\tag{10.5.9}
$$

其中 $R=S^{-1}PQT^{-1}$，$|\lambda_{max}(R)|$ 为矩阵 R 的最大本征值。

以上方法的缺点是，将电场各分量和磁场各分量分别放在同一个节点上。由于媒质的电磁特性在边界上急剧变化，给边界条件的设置造成了困难，使得边界上的节点需要特殊处理。为了改进这一方法，已提出几种方案，其中之一就是使用矢量有限元法。

10.5.2　基于矢量波动方程的时域有限元法

上面用麦克斯韦方程描述的问题，改用波动方程描述就变成

$$
\nabla\times\mu^{-1}\nabla\times\vec{E}(\vec{r},t)+\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t^2}=-\frac{\partial\vec{J}(\vec{r},t)}{\partial t},\vec{r}\in V,\tag{10.5.10}
$$

$$
\left.\begin{aligned}&\vec{n}\times\vec{E}(\vec{r},t)=0,\vec{r}\in S_e,\\&\vec{n}\times\vec{H}(\vec{r},t)=0,\vec{r}\in S_h,\end{aligned}\right\}S_e+S_h=S\text{。}\tag{10.5.11}
$$

下面仍用加权余量法导出时域有限元方程。

若仍用 $\vec{v}$ 表示权函数，将方程（10.5.10）的弱形式表示为

$$
\int_V\left(\vec{v}\cdot\nabla\times\mu^{-1}\nabla\times\vec{E}+\varepsilon\vec{v}\cdot\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}+\vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}\right)\mathrm{d}V=0,\tag{10.5.12}
$$

也可以写成更加对称的形式

$$\int_V \left(\mu^{-1} \nabla \times \vec{v} \cdot \nabla \times \vec{E} + \varepsilon \vec{v} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}\right) \mathrm{d}V = 0。 \tag{10.5.13}$$

如果展开函数采用全域矢量基函数$\vec{N}_i(\vec{r})$，$i=1$，2，…，M，其中 M 为未知量的个数，则电场可展开为

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_{j=1}^{M} \vec{N}_j(\vec{r}) E_j(t)。 \tag{10.5.14}$$

若采用伽辽金法，即用$\vec{N}_i$代替 $\vec{v}$，则方程（10.5.13）变成

$$\int_V \left(\mu^{-1} \nabla \times \vec{N}_i \cdot \sum_{j=1}^{M} \nabla \times \vec{N}_j E_j + \varepsilon \vec{N}_i \cdot \sum_{j=1}^{M} \vec{N}_j \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_j + \vec{N}_i \cdot \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}\right) \mathrm{d}V = 0,$$

$$i = 1,2,\cdots,M。 \tag{10.5.15}$$

为把这一方程改为矩阵形式，令

$$\overline{E} = [E_1, E_2, \cdots, E_M]^T$$

并用以下元素构造矩阵 T，S 和 f

$$t_{ij} = \int_V \varepsilon \vec{N}_i(\vec{r}) \cdot \vec{N}_j(\vec{r}) \mathrm{d}V,$$

$$s_{ij} = \int_V \mu^{-1} \nabla \times \vec{N}_i(\vec{r}) \cdot \nabla \times \vec{N}_j(\vec{r}) \mathrm{d}V,$$

$$f_i = \int_V \vec{N}_i(\vec{r}) \cdot \frac{\partial J_i(\vec{r},t)}{\partial t} \mathrm{d}V,$$

$$i,j = 1,2,\cdots,M。$$

于是便有

$$T \frac{\mathrm{d}^2 \overline{E}}{\mathrm{d}t^2} + S \cdot \overline{E} + f = 0。 \tag{10.5.16}$$

该方程已经可以用有限差分方法求其近似解。

将方程的待求解时段（0，T）均匀地分成 P 段，每一段长度为 Δt。差分法可以有以下几种形式：

（1）向前差分法

即采用

$$\frac{\mathrm{d}\overline{E}}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\overline{E}^{n+1} - \overline{E}^n}{\Delta t},$$

其中 $\overline{E}^n = \overline{E}(n\Delta t)$。这样，二阶导数的差分近似就成为

$$\frac{\mathrm{d}^2 \overline{E}}{\mathrm{d}t^2} \approx \frac{\overline{E}^{n+2} - 2\overline{E}^{n+1} + \overline{E}^n}{(\Delta t)^2}。 \tag{10.5.17}$$

在这样的近似下，方程（10.5.16）成为

$$\frac{1}{(\Delta t)^2} T \cdot \overline{E}^{n+1} = \frac{2}{(\Delta t)^2} T \cdot E^n - \left[\frac{1}{(\Delta t)^2} T + S\right] \cdot \overline{E}^{n-1} - f^{n-1}。 \tag{10.5.18}$$

显然，一旦给定了 f^n 和初值 $\bar{E}^0$ 和 $\bar{E}^1$ 就可解出 $\bar{E}^2$，继而解出 $\bar{E}^3$，$\bar{E}^4$，…，最终计算出时间段（0，T）内的值。考虑到这种算法在数值上的不稳定性，实际上很少采用。

（2）向后差分法

这种方法取

$$\frac{\mathrm{d}\bar{E}}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\bar{E}^n - \bar{E}^{n-1}}{\Delta t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\bar{E}}{\mathrm{d}t^2} \approx \frac{\bar{E}^n - 2\bar{E}^{n-1} + \bar{E}^{n-2}}{(\Delta t)^2},$$

这时的差分方程为

$$\left[\frac{1}{(\Delta t)^2}T + S\right]\cdot \bar{E}^{n+1} = \frac{2}{(\Delta t)^2}T\cdot \bar{E}^n - \frac{1}{(\Delta t)^2}T\cdot \bar{E}^{n-1} - f^{n+1}。\tag{10.5.19}$$

这种方法的缺点是，在每一时间步的计算中都要解包含 S 在内的矩阵方程，其优点是它的稳定性不依赖于 Δt 的选择，是一种隐式算法。

（3）中心差分法

中心差分的导数近似为

$$\frac{\mathrm{d}\bar{E}}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\bar{E}^{n+1} - \bar{E}^{n-1}}{2\Delta t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\bar{E}}{\mathrm{d}t^2} \approx \frac{\bar{E}^{n+1} - 2\bar{E}^n + \bar{E}^{n-1}}{(\Delta t)^2}。$$

在这种近似下得到如下的差分方程

$$\frac{1}{(\Delta t)^2}T\cdot \bar{E}^{n+1} = \left[\frac{2}{(\Delta t)^2}T + S\right]\cdot E^n - \frac{1}{(\Delta t)^2}T\cdot \bar{E}^{n-1} - f^n。\tag{10.5.20}$$

与上一个方程不同的是，在每一步的求解中所解的矩阵方程不包括 S，这还是显式算法，它的数值稳定性条件是

$$\Delta t < \frac{2}{\sqrt{\rho(T^{-1}S)}},\tag{10.5.21}$$

其中 $\rho(T^{-1}S)$ 表示矩阵 $T^{-1}S$ 的谱半径。

（4）Newmark 法

在这一方法中，$\bar{E}$ 及其一阶异数在 $t+\Delta t$ 时刻的近似表示分别是

$$\bar{E}^{n+1} = \overline{E^n} + \Delta t\frac{\mathrm{d}\bar{E}^n}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)(\Delta t)^2\frac{\mathrm{d}^2\bar{E}^n}{\mathrm{d}t^2} + \beta(\Delta t)^2\frac{\mathrm{d}^2\bar{E}^{n+1}}{\mathrm{d}t^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{E}^{n+1}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\bar{E}^n}{\mathrm{d}t^2} + (1-\gamma)\Delta t\frac{\mathrm{d}^2\bar{E}^n}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\Delta t\frac{\mathrm{d}^2\bar{E}^{n+1}}{\mathrm{d}t^2}。$$

其中 β 和 γ 是两个可以选择的数，其作用是控制时间步进过程的精度和稳定性。这时的差分方程是

$$\left[\frac{1}{(\Delta t)^2}T + \beta S\right]\cdot \bar{E}^{n+1} = \left[\frac{2}{(\Delta t)^2}T + \left(\frac{1}{2} + \gamma - 2\beta\right)S\right]\cdot \bar{E}^n$$

$$-\left[\frac{1}{(\Delta t)^2}T+\left(\frac{1}{2}-\gamma+\beta\right)S\right]\cdot\overline{E}^{n-1}-\left[\beta f^{n+1}+\left(\frac{1}{2}+\gamma-2\beta\right)f^n+\left(\frac{1}{2}-\gamma+\beta\right)f^{n-1}\right]。\tag{10.5.22}$$

应用较多的是令 $\gamma=\dfrac{1}{2}$，称为 Newmark-β 法，在这种情况下上式成为

$$\left[\frac{1}{(\Delta t)^2}T+\beta S\right]\cdot\overline{E}^{n+1}=\left[\frac{2}{(\Delta t)^2}T+(1-2\beta)S\right]\cdot\overline{E}^{n}$$
$$-\left[\frac{1}{(\Delta t)^2}T+\beta S\right]\cdot\overline{E}^{n-1}-[\beta f^{n+1}+(1-2\beta)f^n+\beta f^{n-1}]。\tag{10.5.23}$$

显然，当 $\beta=0$ 时，上式与（10.5.20）完全一样，即退化为中心差分法。这也说明，Newmark 法比中心差分法具有更广泛的意义。可以证明，当 $\beta\geqslant 0.25$ 时式（10.5.23）是稳定的，属于隐式算法。

10.6　时域有限差分法

时域有限差分法是在瞬变电磁场研究需要的推动下发展起来的，是电磁场时域计算方法中发展较早成熟最快的一种，也是应用最广最有效的一种。该方法的特点是直接从麦克斯韦方程出发，不需要任何导出方程。可直接求得近似时域矢量场解。它具有简单、直观和通用等特点，它又可以作为频域方法使用，与它相关的文献已非常丰富，此处只讨论有关的基本原理。

10.6.1　时域有限差分法的基本原理

时域有限差分（Finite-Difference Time-Domain）法，简称 FD-TD 的基本做法是，直接把麦克斯韦旋度方程变为差分形式，但更重要的是它对计算域的离散方式及场点的设置。

为了建立差分方程，首先用一定形式的网格来划分求解空间，且只以网格结点上的未知量作为计算对象。这样，自变量变为离散的，未知量也只在有限个网格结点上计算。当在每个离散点上用差分替代微商时，就把在一定空间求解微分方程的问题化为解有限个差分方程的问题。由微分方程导出的差分方程的一般通式，就称为该方程的差分格式。

电磁场的最普遍规律是麦克斯韦方程组，从含时间变量的旋度方程出发建立计算电磁场的时域方法是非常自然的。K. S. Yee 在 1966 年关于时域有限差分法的奠基工作正是这样开始的。

一般情况下，在时域计算电磁场就要在包括时间和空间在内的四维变量空间进行，如何合理地建立离散空间的网格体系及正确地处理时空关系成为建立时域有限差分法的关键问题。正是因为 Yee 提出一个合理的网格体系，才成功地创立了时域有限差分法，现在人们把他所提出的网格体系称为 Yee 氏网格，在直角坐标系中 Yee 氏网格的一个单元示于图 10－10，这个网格体系的特点是，电场和磁

场各分量在空间的取值点被交叉地放置，使得在每个坐标平面上每个电场分量的四周由磁场分量环绕，同时每个磁场分量的四周由电场分量环绕，这样的电磁场空间配置符合电磁场的基本规律——法拉弟（Faraday）电磁感应定律和安培（Ampere）环流定律，亦即符合麦克斯韦方程的空间关系要求，因而也符合电磁波在空间的传播规律，关于时间变量的处理，一般还是采用均匀离散的方式，即把需要求解的时间段划分为相等的份数，至于时间步的长度选择需要从稳定性角度考虑。

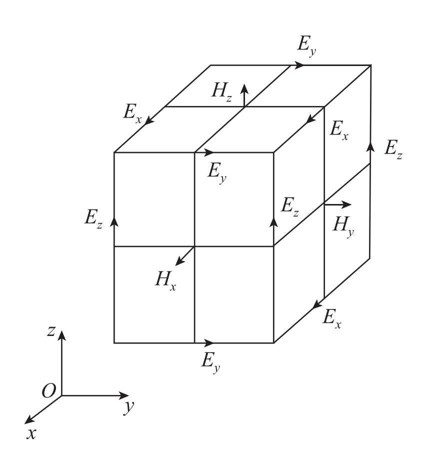


图 10－10　Yee 氏网格单元

首先考虑无源形式的麦克斯韦方程，源的作用可另行处理。为了更有普遍性，设媒质是非均匀的，有耗的，但是各向同性的，这时的时域麦克斯韦方程具有以下形式。

$$\nabla\times\vec{E}(\vec{r},t)=-\mu(\vec{r})\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}(\vec{r},t)-\sigma_m(\vec{r})\vec{H}(\vec{r},t),$$

$$\nabla\times\vec{H}(\vec{r},t)=\varepsilon(\vec{r})\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}(\vec{r},t)+\sigma(\vec{r})\vec{E}(\vec{r},t),\tag{10.6.1}$$

差分方程是针对坐标系中的分量展开式进行的，在直角坐标系中 $E_x(\vec{r},\ t)$ 和 $H_x(\vec{r},\ t)$ 满足的方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}E_x(\vec{r},t)=\frac{1}{\varepsilon(\vec{r})}\left(\frac{\partial}{\partial y}H_z(\vec{r},t)-\frac{\partial}{\partial z}H_y(\vec{r},t)-\sigma(\vec{r})E_x(\vec{r},t)\right),\tag{10.6.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}H_x(\vec{r},t)=\frac{1}{\mu(\vec{r})}\left(\frac{\partial}{\partial z}E_y(\vec{r},t)-\frac{\partial}{\partial y}E_z(\vec{r},t)-\sigma_m(\vec{r})H_x(\vec{r},t)\right)。\tag{10.6.3}$$

由上两方程可以看出，差分式的导出主要是把一阶偏导数用差分近似代替。一个连续函数的导数与差分近似的关系可以通过函数的泰勒（Taylor）级数表示出来。差分式可以分为三种，即向前差分，向后差分和中心差分，前两种只有一阶近

似，中心差分的精度为二阶，在时域有限差分法中采用中心差分近似。

在 Yee 氏网格体系中沿不同坐标的网格长度分别为 Δx，Δy 和 Δz，时间步长则用 Δt 表示。为了书写方便将用以下记号，若 $F(\vec{r},\ t)$ 代表任一场分量，则

$$F^n(i,j,k) = F(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t)。$$

在这种表示下，$F(\vec{r},\ t)$ 对变量 x 和 t 的中心差分近似在 Yee 氏网格中可表示为

$$\frac{\partial F^n(i,j,k)}{\partial x} = \frac{F^n\left(i+\frac{1}{2},j,k\right) - F^n\left(i-\frac{1}{2},j,k\right)}{\Delta x}, \tag{10.6.4}$$

$$\frac{\partial F^n(i,j,k)}{\partial t} = \frac{F^{n+\frac{1}{2}}(i,j,k) - F^{n-\frac{1}{2}}(i,j,k)}{\Delta t}。 \tag{10.6.5}$$

利用这种近似及表示方法，在 Yee 氏网格中的各个场分量都可以把相应的麦克斯韦方程表示成近似的差分形式。例如，根据式（10.6.2）$E_x(\vec{r},\ t)$ 可表示为

$$\frac{E_x^{\ n+1}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right) - E_x^{\ n}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)}$$

$$\left[\frac{H_z^{\ n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right) - H_z^{\ n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k\right)}{\Delta y}\right.$$

$$-\frac{H_y^{\ n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right) - H_y^{\ n+\frac{1}{2}},\left(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}\right)}{\Delta z}$$

$$\left.-\sigma\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)E_x^{\ n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)\right]。 \tag{10.6.6}$$

在以上表示式中，包含着相隔半个时间步的三个 $E_x\left(i+\frac{1}{2},\ j,\ k\right)$，这在实际编程计算中很不方便，为克服这一缺点，可采用以下近似

$$E_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right) = \frac{1}{2}\left[E_x^{\ n+1}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right) + E^n\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)\right]$$

这时式（10.6.6）又可表示成

$$E_x^{\ n+1}\left(i+\frac{1}{2},j,k\right) = \frac{1-\dfrac{\sigma\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)\Delta t}{2\varepsilon\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)}}{1+\dfrac{\sigma\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)\Delta t}{2\varepsilon\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)}} \cdot E_x^n\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)$$

$$+\frac{\Delta t}{\varepsilon\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)}\cdot\frac{1}{1+\frac{\sigma\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)\Delta t}{2\varepsilon\left(i+\frac{1}{2},j,k\right)}}$$

$$\left[\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k\right)-H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k\right)}{\Delta y}\right.$$

$$\left.-\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}\right)-H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}\right)}{\Delta z}\right]。\tag{10.6.7}$$

用类似的方法可求得其他电场分量所满足的差分方程，至于磁场分量 H_x，由于方程（10.6.3）与方程（10.6.2）的相似性不难用同样的方法获得，而且必然有很强的对应性。只是在时间步的选取上可照顾到计算的先后顺序，以便与电场的计算相互照应。在此种考虑下我们有

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)=\frac{1-\frac{\sigma_m\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)\Delta t}{2\mu\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)}}{1+\frac{\sigma_m\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)\Delta t}{2\mu\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)}}\cdot H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)$$

$$+\frac{\Delta t}{\mu\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{1}{1+\frac{\sigma_m\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)\Delta t}{2\mu\left(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}\right)}}$$

$$\cdot\left[\frac{E_y^n\left(i,j+\frac{1}{2},k+1\right)-E_y^n\left(i,j+\frac{1}{2},k\right)}{\Delta z}\right.$$

$$\left.-\frac{E_z^n\left(i,j+1,k+\frac{1}{2}\right)-E_z^n\left(i,j,k+\frac{1}{2}\right)}{\Delta y}\right]。\tag{10.6.8}$$

其他的磁场分量也有类似的差分方程。

由以上所得电场和磁场所满足的差分方程不难看出这种算法的一大特点是，任一网格点上的电场分量只与它上一时间步的值及四周环绕它的磁场分量在较早时刻的值有关；同样地，任一网格点上的磁场分量也由它的上一个时间步的值及其四周邻近网格点电场在较早时刻的值决定。这样就形成了一种在空间上逐点展开在时间上逐步推进的算法。此外，由于 ε，μ，σ 和 σ_m 都可以逐点赋值，故很容易适应非均匀媒质，甚至各向异性媒质空间中电磁场的计算。

10.6.2　数值稳定性和数值色散

上面导出的差分方程是一种显式差分格式，它的执行是按时间步推进方法计算空间各取值点电磁场随时间的变化，这种差分格式存在稳定性问题，即时间步长不能随意选择，与空间步长存在一定关系，当时间步长不满足这种关系的限制时就会出现数值不稳定性，即随着计算步数的增加被计算的场量可能无限制地增大，其原因不同于误差的积累，而是由于因果关系被破坏而造成的。

时域有限差分法是在计算机的存储空间中模拟电磁波的传播和作用，为了确定稳定性的条件需要考虑在该算法中可能出现的各种数字波模。因为任何波模都可以展开为平面波谱，故一个算法若对平面波不稳定，则对任何波模也不稳定。因此，我们可以以平面波作为分析的对象来进行讨论。讨论的基本步骤是，把时域有限差分法的算式分解为空间和时间的本征值问题。假定平面波本征模在数值空间中传播，这些模的本征值谱由数值空间微分过程来确定，并与由时间微分过程所确定的本征值谱相比较。按要求，空间本征值的完全谱必须落在稳定区内，以此来确定稳定条件。为简单起见，将以二维问题为例进行分析。

（1）时间本征值问题

假定我们仅考虑均匀无耗的非磁性媒质空间，而且场与坐标 z 无关，这时的电磁场是个二维问题，且可分为相互独立的对 z 的 $TE^z(H)$ 模和 $TM^z(E)$ 模。对 TM^z 模而言，场方程为

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}E_z(x,y) &= \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\partial}{\partial x}H_y(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}H_x(x,y)\right],\\
\frac{\partial}{\partial t}H_x(x,y) &= -\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial y}E_z(x,y),\\
\frac{\partial}{\partial t}H_y(x,y) &= \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}E_z(x,y),
\end{aligned}
\tag{10.6.9}
$$

在二维 Yee 氏网格中的差分格式为

$$
\begin{aligned}
\frac{E_z^{n+1}(i,j) - E_x^{n}(i,j)}{\Delta t} &= \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right) - H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2},j\right)}{\Delta x}\right.\\
&\qquad \left. - \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right) - H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y}\right],\\
\frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right) - H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta t} &= -\frac{1}{\mu}\frac{E_z^{n}(i,j+1) - E_z^{n}(i,j)}{\Delta y},\\
\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right) - H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right)}{\Delta t} &= \frac{1}{\mu}\frac{E_z^{n}(i+1,j) - E_z^{n}(i,j)}{\Delta x}。
\end{aligned}
\tag{10.6.10}
$$

把上式中的时间差分部分分离出来构成时间本征值问题的差分格式

$$\frac{E_z^{n+1}(i,j) - E_z^n(i,j)}{\Delta t} = \lambda E_z^{n+\frac{1}{2}}(i,j),$$

$$\frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}{}_y\left(i,j+\frac{1}{2}\right) - H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)}{\Delta t} = \lambda H_x^n\left(i,j+\frac{1}{2}\right), \quad (10.6.11)$$

$$\frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right) - H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right)}{\Delta t} = \lambda H_y^n\left(i+\frac{1}{2},j\right),$$

可以看出，这些方程有一个共同特点，即方程右边的场值由该点场的前半时间步和后半时间步的场值之差与时间步长之比来确定。如果用 V_i 来表示式（10.6.11）中的任何一个场量，则可把（10.6.11）中的各式写成统一形式

$$\frac{V_i^{n+\frac{1}{2}} - V_i^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \lambda V_i^n。 \quad (10.6.12)$$

现在定义一个解的增长因子

$$q_i = \frac{V_i^{n+\frac{1}{2}}}{V_i^n}, \quad (10.6.13)$$

则为保证方程（10.6.11）的稳定性，必须有 $|q_i| \leqslant 1$，把 q_i 代入式（10.6.12）就可得到关于 q_i 的代数方程

$$q_i^2 - \lambda \Delta t q_i - 1 = 0。 \quad (10.6.14)$$

该方程的两个解为

$$q_i = \frac{\lambda \Delta t}{2} \pm \left[1 + \left(\frac{\lambda \Delta t}{2}\right)^2\right]^{1/2}。 \quad (10.6.15)$$

可以看出，为使 $|q_i| \leqslant 1$，需要满足以下两个条件

$$Re(\lambda) = 0,$$

$$-\frac{2}{\Delta t} \leqslant Im(\lambda) \leqslant \frac{2}{\Delta t}。 \quad (10.6.16)$$

也就是说，只要（10.6.11）的本征值限定在虚轴上且在式（10.6.16）所限定的范围内，式（10.6.11）的解才是稳定的。

（2）空间本征值问题

为了使上述时间本征值问题的方程（10.6.11）符合原差分方程（10.6.10），还必须同时满足以下空间本征值方程

$$\frac{H_y\left(i+\frac{1}{2},j\right) - H_y\left(i-\frac{1}{2},j\right)}{\Delta x} - \frac{H_x\left(i,j+\frac{1}{2}\right) - H_x\left(i,j-\frac{1}{2}\right)}{\Delta y} = \lambda \varepsilon E_z(i,j),$$

$$\frac{E_z(i,j+1) - E_z(i,j)}{\Delta y} = -\lambda \mu H_x\left(i,j+\frac{1}{2}\right),$$

$$\frac{E_z(i+1,j) - E_z(i,j)}{\Delta x} = \lambda \mu H_y\left(i+\frac{1}{2},j\right)。 \quad (10.6.17)$$

假定平面波模取如下的形式

$$
\begin{aligned}
E_z(I,J) &= E_{0z}e^{-i(k_xI\Delta x+k_yJ\Delta y)},\\
H_x(I,J) &= E_{0x}e^{-i(k_xI\Delta x+k_yJ\Delta y)},\\
H_y(I,J) &= E_{0y}e^{-i(k_xI\Delta x+k_yJ\Delta y)},
\end{aligned}
\tag{10.6.18}
$$

其中 k_x 和 k_y 为波矢量在 x 和 y 方向的分量，大写的 I 和 J 代替了 i 和 j 是为了防止 x 方向的空间网格数 i 与虚数 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$相互混淆。

显然，式（10.6.18）所表示的解必须满足所设定的波的方程（10.6.10），因而也必须满足方程（10.6.17），把式（10.6.18）代入（10.6.17），经整理后便得到

$$
\begin{aligned}
E_{0z} &= \mathrm{i}\frac{2}{\lambda\varepsilon}\left[\frac{H_{0y}}{\Delta x}\sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)-\frac{H_{0x}}{\Delta y}\sin\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right)\right]\\
H_{0x} &= -\mathrm{i}\frac{2E_{0z}}{\lambda\mu\Delta y}\sin\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right)\\
H_{0y} &= \mathrm{i}\frac{2E_{0z}}{\lambda\mu\Delta x}\sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)
\end{aligned}
\tag{10.6.19}
$$

再把（10.6.19）中的后两式代入第一式即可得到 λ 的表示

$$
\lambda^2 = -\frac{4}{\varepsilon\mu}\left[\frac{1}{(\Delta x)^2}\sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)+\frac{1}{(\Delta y)^2}\sin^2\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right)\right] \tag{10.6.20}
$$

考虑到正弦函数的幅度不超过 1，则由式可以看出，对于所有 k_x 和 k_y 应该有

$$
\begin{aligned}
Re(\lambda) &= 0\\
|Im(\lambda)| &\leqslant 2v\left[\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}\right]
\end{aligned}
\tag{10.6.21}
$$

现在，综合式（10.6.21）和（10.6.16）就可知道，为保持方程（10.6.17）解的稳定性必须满足条件

$$
2v\left[\frac{1}{(\Delta x)^2}+\frac{1}{(\Delta y)^2}\right]\leqslant\frac{2}{\Delta t}
$$

也就是，当 Δx 和 Δy 选定后为使解保持稳定，时间步长 Δt 的选择必须满足

$$
\Delta t \leqslant \frac{1}{v\sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{1}{\Delta y}\right)^2}} \tag{10.6.22}
$$

这就是时域有限差分法二维情况下的稳定性条件。推广到三维，这一条件成为

$$
\Delta t \leqslant \frac{1}{v\sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{1}{\Delta y}\right)^2+\left(\frac{1}{\Delta z}\right)^2}} \tag{10.6.23}
$$

这一条件也称为 Couraut 条件，当媒质不均匀时，v 要取最大者。

由于时域有限差分方程只是原微分形式麦克斯韦方程的近似，当在计算机中对电磁波的传播进行模拟时，在非色散媒质空间中也会出现色散现象，且电磁波

的相速度随波长、传播方向和离散化的情况而发生变化。我们把这种非物理的色散现象称为数值色散。数值色散的存在会导致脉冲波形的破坏，出现附加的各向异性以及虚假的折射现象等。因此，数值色散是时域有限差分法的一个重要的计算精度问题。

分析数值色散的一个基本方法是把单色平面波的一般形式代入差分方程，从而得到数值色散关系。仍以上面讨论的二维问题为例进行讨论。在二维空间中的一个任意 TM^z 单色平面波可以表示为

$$\begin{aligned} E_z^n(I,J) &= E_{0z}e^{-\mathrm{i}(k_xI\Delta x+k_yJ\Delta y-\omega n\Delta t)}, \\ H_x^n(I,J) &= H_{0x}e^{-\mathrm{i}(k_xI\Delta x+k_yJ\Delta y-\omega n\Delta t)}, \\ H_y^n(I,J) &= H_{0y}e^{-\mathrm{i}(k_xI\Delta x+k_yJ\Delta y-\omega n\Delta t)}, \end{aligned} \tag{10.6.24}$$

把它代入差分方程（10.6.10）即可得到

$$\begin{aligned} E_{0z}\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) &= \frac{\Delta t}{\varepsilon}\left[\frac{H_{0x}}{\Delta y}\sin\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right)-\frac{H_{0y}}{\Delta x}\sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)\right], \\ H_{0x}\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) &= \frac{\Delta tE_{0z}}{\mu\Delta y}\sin\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right), \\ H_{0y}\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) &= \frac{\Delta tE_{0z}}{\mu\Delta x}\sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)。 \end{aligned} \tag{10.6.25}$$

把后两式代入前式立即便有

$$\left(\frac{1}{v\Delta t}\right)^2\sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \frac{1}{(\Delta x)^2}\sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)+\frac{1}{(\Delta y)^2}\sin^2\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right)。\tag{10.6.26}$$

用同样的方法分析可知，对三维情况也会有完全类似的结果，只是后面增加关于 $k_z\Delta z$ 的一项而已。

由电磁理论已经知道，在均匀无耗各向同性媒质中的电磁波具有如下的色散关系

$$\frac{\omega^2}{v^2} = k_x^2+k_y^2+k_z^2。\tag{10.6.27}$$

不难发现，当 Δx 和 Δy 都趋于零时，式（10.6.26）就会趋于（10.6.27）的二维结果，这说明式（10.6.26）是近似的色散关系，误差是由于空间和时间的离散化造成的。

为了具体地显示空间步长对数值色散的影响，图 10－11（a）和（b）给出了根据式（10.6.26）的计算结果，计算是在均匀网格中进行的，即有 $\Delta x=\Delta y=\Delta s$，图中的 α 为波的传播方向与 x 轴之间的夹角。图中给出了相速度 u_p 与光速 c 之比与空间步长及入射角之间的关系。从图上可以看出，相速度与空间步长和入射角度之间有非常明显的联系，只有在每个波长取十个以上的空间步长时才能达到可以接受的一般精度。正是这一点严重限制了时域有限差分法可应用的范围。

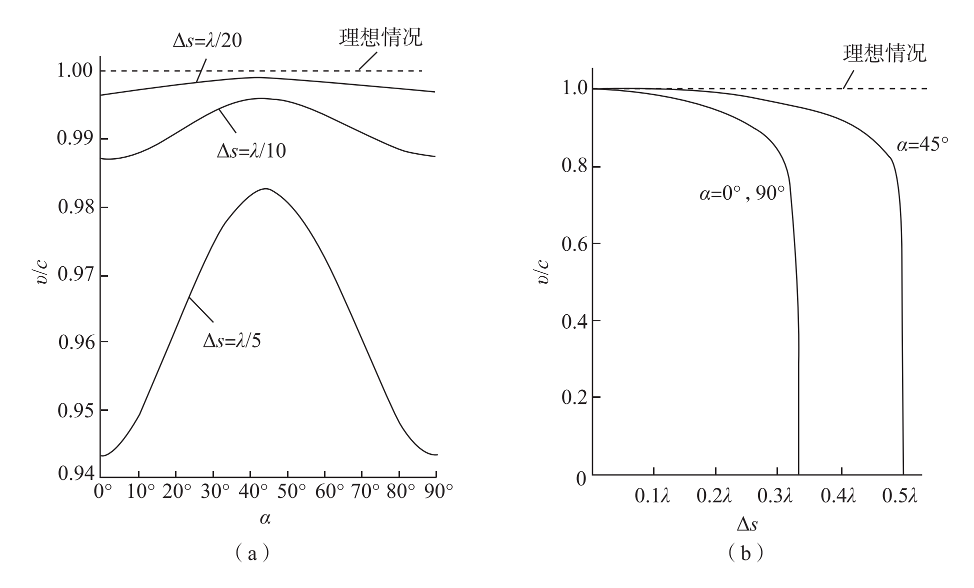


图 10－11　相速度 v_p 与空间步长和入射角之间的关系

10.6.3　高阶时域有限差分法

上面所讨论的经典时域有限差分法采用的是具有二阶精度的中心差分近似，为叙述简单起见，把这种方法记作 FDTD（2，2），但是由于存在数值色散，限制了它在电大尺度问题中的应用。虽然，减小空间步长可以降低数值色散的影响，但由于稳定性要求的限制又得同时缩短时间步长，这会大大增加计算量。为了既能增大空间步长，又不增加数值色散误差，一个显然的途径是提高差分的近似精度，也就是采用高阶时域有限差分法。

对高价时域有限差分法已进行了多方面的研究，对各阶精度差分近似的搭配进行了比较。结果发现，当时间上采用二阶精度，空间上用四阶精度时，即 FDTD（2，4）相对比较优越。

如果我们用 $D_{2x}f$（x，y）和 $D_{2y}f$（x，y）分别表示以下二阶精度差分近似

$$\begin{aligned} D_{2x}f(i,j) &= \frac{1}{\Delta x}\left[f\left(i+\frac{1}{2},j\right)-f\left(i-\frac{1}{2},j\right)\right], \\ D_{2y}f(i,j) &= \frac{1}{\Delta y}\left[f\left(i,j+\frac{1}{2}\right)-f\left(i,j-\frac{1}{2}\right)\right], \end{aligned} \tag{10.6.28}$$

则具有四阶精度的中心差分 D_{4x} 和 D_{4y} 就有形式

$$\begin{aligned} D_{4x}f(i,j) = D_{2x}f(i,j) &+ \frac{1}{24\Delta x}\left[3f\left(i+\frac{1}{2},j\right)-3f\left(i-\frac{1}{2},j\right)\right. \\ &\left. -f\left(i+\frac{3}{2},j\right)+f\left(i-\frac{3}{2},j\right)\right], \end{aligned} \tag{10.6.29}$$

$$D_{4y}(i,j) = D_{2y}(i,j) + \frac{1}{24\Delta y}\left[3f\left(i,j+\frac{1}{2}\right)-3f\left(i,j-\frac{1}{2}\right)\right.$$

$$-f\left(i,j+\frac{3}{2}\right)+f\left(i,j-\frac{3}{2}\right)\Big]。$$

以上两式的获得是根据连续函数$f(x)$的泰勒展开，因为

$$f\left(x\pm\frac{1}{2}\Delta x\right)=f(x)+\left(\pm\frac{1}{2}\Delta x\right)\frac{\partial}{\partial x}f(x)+\frac{1}{2!}\left(\pm\frac{1}{2}\Delta x\right)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x)$$
$$+\frac{1}{3!}\left(\pm\frac{1}{2}\Delta x\right)^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}f(x)+\frac{1}{4!}\left(\pm\frac{1}{2}\Delta x\right)^4\frac{\partial^4}{\partial x^4}f(x)+\cdots,$$
$$f\left(x\pm\frac{3}{2}\Delta x\right)=f(x)+\left(\pm\frac{3}{2}\Delta x\right)\frac{\partial}{\partial x}f(x)+\frac{1}{2!}\left(\pm\frac{3}{2}\Delta x\right)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x)$$
$$+\frac{1}{3!}\left(\pm\frac{3}{2}\Delta x\right)^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}f(x)+\frac{1}{4!}\left(\pm\frac{3}{2}\Delta x\right)^4\frac{\partial^4}{\partial x^4}f(x)+\cdots,$$

由此得到

$$f\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)-f\left(x-\frac{1}{2}\Delta x\right)=\Delta x\frac{\partial}{\partial x}f(x)+\frac{1}{24}\Delta x^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}f(x)+O(\Delta x^5),$$
$$f\left(x+\frac{3}{2}\Delta x\right)-f\left(x-\frac{3}{2}\Delta x\right)=3\Delta x\frac{\partial}{\partial x}f(x)+\frac{27}{24}\Delta x^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}f(x)+O(\Delta x^5)。$$

又因此有一阶微商的四阶精度的差分近似

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{f\left(x-\frac{3}{2}\Delta x\right)-f\left(x+\frac{3}{2}\Delta x\right)+27f\left(x+\frac{1}{2}\Delta x\right)-27f\left(x-\frac{1}{2}\Delta x\right)}{24\Delta x}+O(\Delta x^4)。\tag{10.6.30}$$

把以上关系用于二元函数即有式（10.6.29）。

把（10.6.29）这种差分近似用于二维问题（10.6.9）就可得到

$$E_z^{n+1}(i,j)=E_z^n(i,j)+\frac{\Delta t}{\varepsilon}D_{4x}H_y^{n+\frac{1}{2}}(i,j)-\frac{\Delta t}{\varepsilon}D_{4y}H_x^{n+\frac{1}{2}}(i,j),$$
$$H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)=H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)-\frac{\Delta t}{\mu}D_{4y}E_z^n\left(i,j+\frac{1}{2}\right),$$
$$H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right)=H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right)-\frac{\Delta t}{\mu}D_{4x}E_z^n\left(i+\frac{1}{2},j\right)。\tag{10.6.31}$$

可采用类似的方法获得三维问题的高阶差分格式。

关于 FDTD（2，4）稳定性条件和数值色散问题，对二维差分格式的分析可知稳定性条件为

$$v\Delta t\sqrt{\left(\frac{M_x}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{M_y}{\Delta y}\right)^2}\leqslant 1,\tag{10.6.32}$$

其中

$$M_x=\frac{1}{24}\left[27\sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)-\sin\left(\frac{3}{2}k_x\Delta x\right)\right],$$
$$M_y=\frac{1}{24}\left[27\sin\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right)-\sin\left(\frac{3}{2}k_y\Delta y\right)\right]。$$

色散方程则是

$$\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)=v\Delta t\sqrt{\left(\frac{M_x}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{M_y}{\Delta y}\right)^2}。\tag{10.6.33}$$

图 10－12 给出了根据上式计算的结果，可以明显地看出，FDTD（2，4）明显地降低了数值色散。

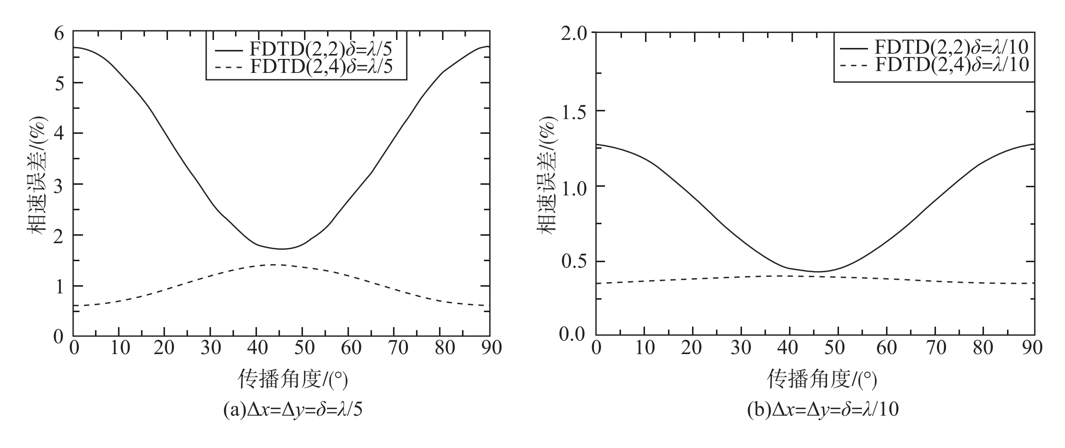


图 10－12　FDTD（2，4）与 FDTD（2，2）数值色散特性比较

10.6.4　ADI－FDTD 法

到现在为止，以上所讨论的时域有限差分法都是显式的，其特点是时间步长只在满足一定条件下时才是稳定的，这一限制大大影响了计算效率。隐式算法是无条件稳定的，时间步可取得比较大。但是，每一时间步都需要解矩阵方程，并不能提高计算效率。

在用差分法求解热传导问题中早已发展了一种交替方向隐式法（Alternating Direction Implicit Method），简称 ADI。这种方法的要点是，先选取一个变量按隐式差分格式处理，而对余下的变量按显式处理，然后交替处理方向。对每一步而言计算仍是条件稳定的，但复合的结果使整个计算成为无条件稳定的。

为了简便，仅以二维 TE^z 模为例，说明 ADI-FDTD 差分格式的建立过程。TE^z 的方程为

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}E_x(x,y,t)=\frac{\partial}{\partial y}H_z(x,y,t),\tag{10.6.34}$$

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}E_y(x,y,t)=-\frac{\partial}{\partial x}H_z(x,y,t),\tag{10.6.35}$$

$$\mu\frac{\partial}{\partial t}H_z(x,y,t)=\frac{\partial}{\partial y}E_x(x,y,t)-\frac{\partial}{\partial x}E_y(x,y,t),\tag{10.6.36}$$

该方法的特点是，把 n 到 $n+1$ 时间步分为两个子时间步，第一个子时间步为 n 到 $n+1/2$，第二个子时间步为 $n+1/2$ 到 $n+1$，在第一个子时间步时，方程

（10.6.34）按显式差分，而方程（10.6.35）和（10.6.36）则按隐式差分。若仍采用中心差分，则三个方程在第一子时间步时的差分格式为

$$
\begin{aligned}
E_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right) = E_x^n\left(i+\frac{1}{2},j\right) \\
+\left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta y}\right)\left[H_z^n\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)-H_z^n\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)\right],
\end{aligned} \tag{10.6.37}
$$

$$
\begin{aligned}
E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right) = E_y^n\left(i,j+\frac{1}{2}\right) \\
-\left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x}\right)\left[H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)-H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)\right],
\end{aligned} \tag{10.6.38}
$$

$$
\begin{aligned}
H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right) = H_z^n\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right) \\
+\left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta y}\right)\left[E_x^n\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)-E_x^n\left(i+\frac{1}{2},j\right)\right] \\
-\left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta x}\right)\left[E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+1,j+\frac{1}{2}\right)-E_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)\right]。
\end{aligned} \tag{10.6.39}
$$

不难发现，方程（10.6.38）的特点是，右边的 H_z 与左边的 E_y 取相同时刻的值，而方程（10.6.39）的特点则是，右边的 E_y 与左边的 H_z 取相同时刻的值。显然，方程（10.6.38）不能直接用步进法计算，因为 $H_z^{n+\frac{1}{2}}$ 还是未知，为了解决这一问题，可利用式（10.6.39）消去 $H_z^{n+\frac{1}{2}}$，从而得到

$$
\begin{aligned}
E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i-1,j+\frac{1}{2}\right)-\left[\left(\frac{2\sqrt{\varepsilon\mu}\Delta x}{\Delta t}\right)^2+2\right]E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right) \\
+E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+1,j+\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{2\sqrt{\varepsilon\mu}\Delta x}{\Delta t}\right)^2 E_y^n\left(i,j+\frac{1}{2}\right) \\
+\left(\frac{2\mu\Delta x}{\Delta t}\right)\left[H_z^n\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)-H_z^n\left(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)\right] \\
+\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)\left[E_x^n\left(i+\frac{1}{2},j+1\right)-E_x^n\left(i+\frac{1}{2},j\right)\right. \\
\left.+E_x^n\left(i+\frac{1}{2},j+1\right)-E_x^n\left(i-\frac{1}{2},j+1\right)\right]。
\end{aligned} \tag{10.6.40}
$$

它可表示成一个对角带状方程，由此可解出 $E_y^{n+\frac{1}{2}}$，在此之后方程（10.6.39）就可以计算了。

作为第二个子时间步，将把（10.6.38）表示成显式，其他两个则成为隐式，其形式为

$$
\begin{aligned}
E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j\right) = E_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right) \\
+\left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta y}\right)\left[H_z^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)-H_z^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)\right],
\end{aligned} \tag{10.6.41}
$$

$$
\begin{aligned}
E_y^{n+1}\left(i,j+\frac{1}{2}\right) = {} & E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right) \\
& - \left(\frac{\Delta t}{2\varepsilon\Delta x}\right)\left[H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right) - H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)\right],
\end{aligned} \tag{10.6.42}
$$

$$
\begin{aligned}
H_z^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right) = {} & H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right) \\
& + \left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta y}\right)\left[E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j+1\right) - E_z^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j\right)\right] \\
& - \left(\frac{\Delta t}{2\mu\Delta x}\right)\left[E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+1,j+\frac{1}{2}\right) - E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)\right]。
\end{aligned} \tag{10.6.43}
$$

在这一过程中方程（10.6.41）不能直接执行，需要利用式（10.6.43）消去 $H_z^{n+\frac{1}{2}}$，而后得

$$
\begin{aligned}
& E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j-1\right) - \left[\left(\frac{2\sqrt{\varepsilon\mu}\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + 2\right]E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j\right) + E_x^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j+1\right) \\
& = -\left(\frac{2\sqrt{\varepsilon\mu}\Delta y}{\Delta t}\right)^2 E_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j\right) \\
& \quad + \left(\frac{2\mu\Delta y}{\Delta t}\right)\left[H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right) - H_z^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)\right] \\
& \quad + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\left[E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+1,j+\frac{1}{2}\right) - E_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j+\frac{1}{2}\right)\right. \\
& \quad \left. + E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+1,j-\frac{1}{2}\right) - E_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j-\frac{1}{2}\right)\right]。
\end{aligned} \tag{10.6.44}
$$

由该方程解出 E_x^{n+1} 后，后面两个方程就都可以执行了。完成了这两个子时的计算就可进入下一个时间步，依此可以完成全部依步进法的计算。

对于三维电磁场问题要考虑六个场分量的计算，其中每个场分量都满足类似式（10.6.36）的方程，对比方程（10.6.39）和（10.6.43）可以发现它们之间的差别。在适用于第一子时间步的方程（10.6.39）中对 E_x 取的是显式，对 E_y 取的是隐式；而在适用于第二子时间步的方程（10.6.43）中正好相反，对 E_x 取的是隐式，而对 E_y 取的则是显式。把这一交替原则运用到三维电磁场六个分量的方程中，就能得到三维电磁场问题的 ADI-FDTD 差分格式。当然，ADI-FDTD 差分格式还可以用其他方式构成，例如，在第一个子时间步对方程（10.6.36）右侧第一项采用显示格式，第二项采用隐式格式，在第二个子时间步交换显、隐的顺序等。

按以上方式建立的 ADI-FDTD 差分格式应该是无条件稳定的，下面用 TE^z 波的差分格式来证明，三个分量可表示为一般形式

$$
\begin{aligned}
E_x^n &= E_{0x}q_e^l e^{-\mathrm{i}(k_x x+k_y y)}, \\
E_y^n &= E_{0y}q_e^l e^{-\mathrm{i}(k_x x+k_y y)}, \\
H_z^n &= E_{0z}q_e^l e^{-\mathrm{i}(k_x x+k_y y)},
\end{aligned} \tag{10.6.45}
$$

其中 q_l 为增长因子，$l=1$，2，分别代表第一子时间步和第二子时间步。为了计算 q_l，把上式代入（10.6.37）～（10.6.39）可得

$$(q_1-1)E_{0x}-\mathrm{i}\left(\frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta y}\right)\sin\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right)q_1H_{0z}=0,$$

$$(q_1-1)E_{0y}+\mathrm{i}\left(\frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta x}\sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)q_1H_{0z}=0,$$

$$\mathrm{i}\left(\frac{\Delta t}{\mu\Delta y}\right)\sin\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right)q_1E_{0x}-\mathrm{i}\left(\frac{\Delta t}{\mu\Delta x}\right)\sin\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)q_1E_{0y}$$
$$-(q_1-1)H_{0z}=0 \tag{10.6.46}$$

把 E_{0x}，E_{0y} 和 H_{0z} 作为未知量，由以上方程的系数行列式应该等于零而得到

$$\alpha q_1^2-2q_1+\beta=0 \tag{10.6.47}$$

其中

$$\alpha=1+\left(\frac{\Delta t}{\sqrt{\varepsilon\mu}\Delta x}\right)^2\sin^2\left(\frac{k_x\Delta x}{2}\right)$$

$$\beta=1+\left(\frac{\Delta t}{\sqrt{\varepsilon\mu}\Delta y}\right)^2\sin^2\left(\frac{k_y\Delta y}{2}\right)$$

由方程（10.6.47）可解得 q_1 为

$$q_1=\frac{1\pm\mathrm{i}\sqrt{\alpha\beta-1}}{\alpha} \tag{10.6.48}$$

类似地，把式（10.6.45）代入式（10.6.41）～（10.6.43），按以上步骤又可以得知

$$q_2=\frac{1\pm\mathrm{i}\sqrt{\alpha\beta-1}}{\beta} \tag{10.6.49}$$

这样，整个时间步的增长因子 q 就成为

$$|q|=|q_1q_2|=|q_1||q_2|=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\cdot\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=1 \tag{10.6.50}$$

这就说明，按以上方式建立的 ADI-FDTD 差分格式是无条件稳定的。这一结论也可以推广到三维问题。

10.6.5　时域有限差分法用于开域问题

时域有限差分法的应用已经非常广泛，几乎涵盖了所有有关时变电磁场的问题。这一点并不奇怪，因为麦克斯韦方程是电磁场运动的最基本规律，而时域有限差分法是直接从麦克斯韦方程出发的。

电磁场的辐射和散射是时域有限差分法应用最多的两个方面，用时域有限差分法解决这两种问题时，首先要在网格空间中模拟辐射体和散射体的形状和电磁性结构。一般地讲，一个物体的电磁特性由常数 ε，μ 和 σ 描述。所以，给定了该物体所占空间的以上电参数的分布，也就给定了该物体的形状和电磁特性。由于在时域有限差分法的计算格式中电参数 ε，μ 和 σ 可以按网格赋值，实现以上

对物体在网格空间中的模拟是很容易做到的事情，只是由于空间步长的局限性，使得无论是对物体的形状还是电参数的空间变化都存在一定程度的近似。

另一个共同性的问题是，待求的电磁场都要传播到无限大空间。显然，不可能把计算的网格空间扩展到无限大，从实际计算的角度考虑计算空间应该尽量小。解决这一问题的可行方法是，把网格空间在适当的地方截断，在截断处设置一种吸收边界，就像一个电磁暗室一样，使投射到边界的电磁波被吸收，或不被反射。这样，对区域内的电磁场而言就相当于一个无限大的空间。

所谓吸收边界实际上是一种算法，常把这种有吸收作用的算法称为吸收边界条件。已经提出了多种吸收边界条件，性能各有不同。

为了说明吸收边界条件的作用原理，我们讨论最简单的一维情况，不难验证如下形式的方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t) = 0 \tag{10.6.51}$$

的解可以表示为

$$u(x,t) = f(x + vt) \tag{10.6.52}$$

它表示一个只沿 x 的负方向传播的波，故称之为单向波（one-way-wave），称式（10.6.51）为单向波方程。可以证明，一个满足方程（10.6.51）的平面波垂直投射到一个截断边界上，在边界上不会产生反射。

假设截断边界在 $x=0$ 处，满足方程（10.6.51）的平面波在 $x=0$ 处满足条件

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)\bigg|_{x=0} = \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\bigg|_{x=0}。 \tag{10.6.53}$$

如果在一维 Yee 氏网格中进行计算，空间步长为 Δx，时间步长为 Δt，微商采用向前差分近似，令 $x=0$ 处网格处 $i=0$，则式（10.6.53）的差分形式应为

$$\frac{u^n(1) - u^n(0)}{\Delta x} = \frac{1}{v}\frac{u^{n+1}(0) - u^n(0)}{\Delta t}。$$

上式又可以改写为

$$u^{n+1}(0) = u^n(0)\left(1 - \frac{v\Delta t}{\Delta x}\right) + \frac{v\Delta t}{\Delta x}u^n(1)。 \tag{10.6.54}$$

当选择满足条件$\nabla x = v\nabla t$ 时，则有

$$u^{n+1}(0) = u^n(1)。$$

这说明，满足方程（10.6.51）的波在网格空间中传播时，在满足稳定条件的情况下，传播到 $i=0$ 时的波与上一个时间步前面一个网格的值一样，即波在没有任何变化的情况下不断地向边界方向传播，就好像边界不存在一样。或者说，按式（10.6.51）方式入射的波在边界上被完全吸收，不会产生反射，于是把式（10.6.51）称为一种一维波的吸收边界条件。

依这一原理可以形成二维和三维波的吸收边界条件。但不会像一维情况那样理想，而是对不同方向的入射波存在不同程度的反射。

当前用得较普遍性能也比较优良的吸收边界称为全匹配层。它是人为设置的满足一定条件的非物理实在的假想媒质，当把它们设置在网格空间的外层时，能比较好地吸收各个方向入射的电磁波。全匹配层的缺点是增大了网格空间，从而附加了相当大的额外计算量。

对于散射问题还需要解决入射平面波的设置和散射波的分离，在时域有限差分法中以上问题的解决方法之一是靠所设置的连接边界。在网格空间中连接边界的设置示于图 10－13。连接边界把计算网格空间分为两个区域，区域 1 中存在散射体，在其中计算总场，区域 2 中只存在散射波。划分场区计算的主要问题是，在差分格式中每一网格点场量的计算不仅需要该网格点上一个时间步的场值还需要邻近网格点场的信息，也就是说，在计算总场区边界点的总场时需要属于散射场区的网络点的总场值，而散射场区并不提供这一信息，对散射场区边界点散射场的计算也是一样。为了解决这一问题，总场区和散射场区边界网格点上场的计算需要特殊对待，我们把这种特殊的计算格式称为连接条件。图 10－14 给出了一个二维网格空间的连接边界的一个交界面，被计算的是 TM^z 波，其计算格式为（10.6.10），设交界面的 y 坐标用 j_0 表示，并在其上计算总场。为了区别，分别用 t，i 和 s 作为总场，入射场和散射场的角标。根据计算格式（10.6.10）可知，要计算 $E_{zt}^{n+1}(i, j_0)$ 必须知道 $H_{xt}^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j_0+\frac{1}{2}\right)$和 $H_{xt}^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j_0-\frac{1}{2}\right)$的值，但是点$\left(i, j-\frac{1}{2}\right)$已属于散射区，在计算机中不存在 $H_{xt}^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j_0-\frac{1}{2}\right)$而只有 $H_{xs}^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j_0-\frac{1}{2}\right)$。由于

$$H_{xt}^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j_0-\frac{1}{2}\right)=H_{xs}^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j_0-\frac{1}{2}\right)+H_{xi}^{n+\frac{1}{2}}\left(i,j_0-\frac{1}{2}\right),$$

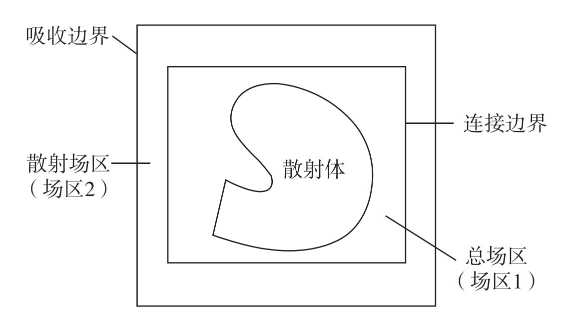


图 10－13　网格空间的场区划分

其中的 $H_{xi}^{n+\frac{1}{2}}\left(i, j_0-\frac{1}{2}\right)$由入射波的设置来提供。从另一角度看，入射平面波也正是通过这一方法而引入到网格空间中。

入射平面波是个一维波，可以在相同空间步长的一维网格空间中计算，并根据极化方向和传播方向插值到连接边界上。它随时间的变化规律可根据问题的要

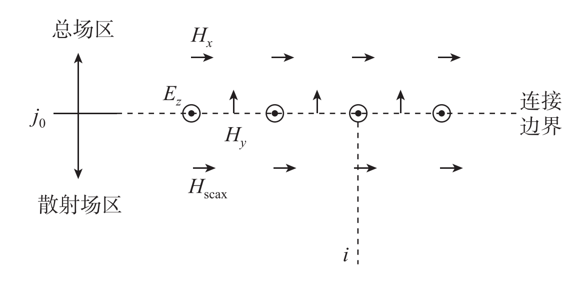


图 10 – 14　二维网格空间中一条连接边界

求任意设置，当选择正弦或余弦函数时就与频域方法相同。

对于辐射问题不需要连接边界，但需要合理的设置激发源。同时，由于计算网格空间有限，计算所得的场不满足远场条件。为了计算天线的远场辐射特性，需要根据等效原理进行由近区场到远区场的变换。

由于篇幅的限制，以上各种问题都不作详细讨论，具体内容可在专门著作中查找。

10. 7　时域多分辨分析法

电磁场计算的时域多分辨分析法是一种更一般意义上的时域有限差分法，或者说后者是前者的一种特殊情况。时域多分辨分析法最突出的特点是，具有自适应性的网格细化功能，从而可以在粗网格的框架内获得细网格的计算精度，因此可大大节省计算资源，提高计算效率，时域多分辨分析法利用了小波分析中的多分辨分析原理，把待求场量用正交小波基展开，并用伽辽金法对麦克斯韦方程进行离散，从而建立起类似于时域有限差分法的时域步进计算格式。本节就其最基本原理进行讨论。

10. 7. 1　正交多分辨分析

正交多分辨分析由 L^2（R）的一组闭子空间序列 $\{V_j\}_{j\in Z}$ 和正交尺度函数 φ 构成，它们满足以下条件

（1）单调性：$V_j \subset V_{j+1}$，

（2）平移不变性：若 $u(x)\in V_j \Leftrightarrow u(x-k)\in V_j$，$k\in Z$，

（3）伸缩相关性：若 $u(x)\in V_j \Leftrightarrow u(2x)\in V_{j+1}$，

（4）逼近性：$\bigcap_{j\in Z} V_j = \{0\}$，$\overline{\bigcup_{j\in Z} V_j} = L^2(R)$，

（5）存在尺度函数 $\varphi(x)\in V_0$，且 $\{\varphi(x-k)\}_{k\in Z}$ 为 V_0 的归一化正交基。

由（1）和（4）可知，在多分辨分析中，子空间 V_j 之间的关系为

$$\{0\} \underset{j\to-\infty}{\cdots} \subset V_{j-1} \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \underset{j\to\infty}{\cdots} \subset L^2(R)。\qquad (10.7.1)$$

由（3）可知，任何两相邻子空间之间是二进分辨率的关系。这样，只要知道了

任一个子空间中的正交基，就可以通过分辨率的二进伸缩，立即得到相邻子空间的正交基，因而也就得到了所有子空间中的正交基，进一步由（5）可知，由于已有 $\{\varphi(x-k)\}_{k\in Z}$为 V_0 的归一化正交基，则显然 $\{2^{\frac{1}{2}}\varphi(2x-k)\}_{k\in Z}$为 V_1的归一化正交基，更一般地讲，$\{2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^jx-k)\}_{j,k\in Z}$为空间 V_j 的归一化正交基，也就是说

$$V_j = span\{2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^jx-k)\}_{j,k\in Z}, \tag{10.7.2}$$

即多分辨分析中的子空间是尺度函数通过平移和伸缩产生的正交基的张成。所以，V_j 也称为尺度空间，j 称为尺度因子。

虽然每一个尺度空间都有了自己的正交基，但因为 $\{V_j\}_{j\in Z}$不是 $L^2(R)$ 的正交分解，不能指望把各个子空间的正交基简单地加在一起就成为 $L^2(R)$ 的正交基。但是，我们可以从所给条件出发来构造 $L^2(R)$ 的正交分解子空间序列。

因为 V_j 是 $L^2(R)$ 的闭子空间，而 $L^2(R)$ 是希尔伯特空间，从而可以定义投影算子 P_j：$L^2(R)\to V_j$，亦即

$$V_j = P_jL^2(R), \quad j\in Z。 \tag{10.7.3}$$

由于有 $V_j\subset V_{j+1}$，即 $P_{j+1}-P_j$ 也是 $L^2(R)$ 上的投影算子，若用 W_j 记该算子值域，则有

$$W_j = (P_{j+1}-P_j)L^2(R), \quad j\in Z。 \tag{10.7.4}$$

且 W_j 是 V_j和 V_{j+1}中的正交补，可记作

$$V_{j+1} = W_j \oplus V_j, \quad j\in Z。 \tag{10.8.5}$$

W_j 是 $L^2(R)$ 的闭子空间，它具有以下重要性质

（1）$\{W_j\}_{j\in Z}$两两正交

（2）W_j 是 L^2（R）的正交分解，即

$$L^2(R) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j \tag{10.7.6}$$

（3）若 $u(x)\in W_j \Leftrightarrow u(2x)\in W_{j+1}$

所以，一旦有了任一子空间 W_j 的正交基，就可得到所有子空间的正交基，从而也就得到了 $L^2(R)$ 的正交基。

由于 $\varphi(x)\in V_0\subset V_1$，而 $\{2^{\frac{1}{2}}\varphi(2x-k)\}_{k\in Z}$是 V_1 的归一化正交基，则有

$$\varphi(x) = \sum_{k\in Z} C_k\varphi(2x-k), \tag{10.7.7}$$

且称为双尺度方程，由多分辨分析理论可知，根据 $\varphi(x)$ 的性质和双尺度方程可以求得小波函数 $\psi(x)$，由它生成的序列

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^jx-k), \quad j,k\in Z, \tag{10.8.8}$$

是子空间 W_j 的归一化正交基，即

$$W_j = span\{\psi_{j,k}\}_{k\in Z}。 \tag{10.7.9}$$

由于 $\{w_j\}_{j\in Z}$是 L^2（R）的正交分解，故序列（10.7.8）是 $L^2(R)$ 的归一化正交

基，我们称（10.7.8）为 $L^2(R)$ 的小波正交基，W_j 为小波空间。

从需要角度看，小波函数 $\psi(x)$ 最好是具有较好的局域性和光滑性。由于 $\psi(x)$ 是通过 $\varphi(x)$ 构造出来的，故其性质在很大程度上取决于 $\varphi(x)$ 的局域性和光滑性，通常 $\varphi(x)$ 为一个低通平滑函数。

在多分辨分析中，$L^2(R)$ 被分解为一系列尺度空间和小波空间，而且相邻子空间之间有二进分辨率的差别，这就意味着一个函数在不同子空间中的投影，可以表示为不同分辨率的基函数展开。

设 $f(x)\in L^2(R)$，根据投影定义 $P_jL^2(R)=V_j$ 可知，$P_jf(x)$ 为 V_j 中的函数，若记作 $f_j(x)$，则有

$$P_jf(x)=f_j(x)\in V_j。\tag{10.7.10}$$

若定义 D_j 为 $L^2(R)$ 到 W_j 的投影，即 $W_j=D_jL^2(R)$，则 $D_jf(x)$ 为 W_j 中的函数，记作 $g_j(x)$，则有

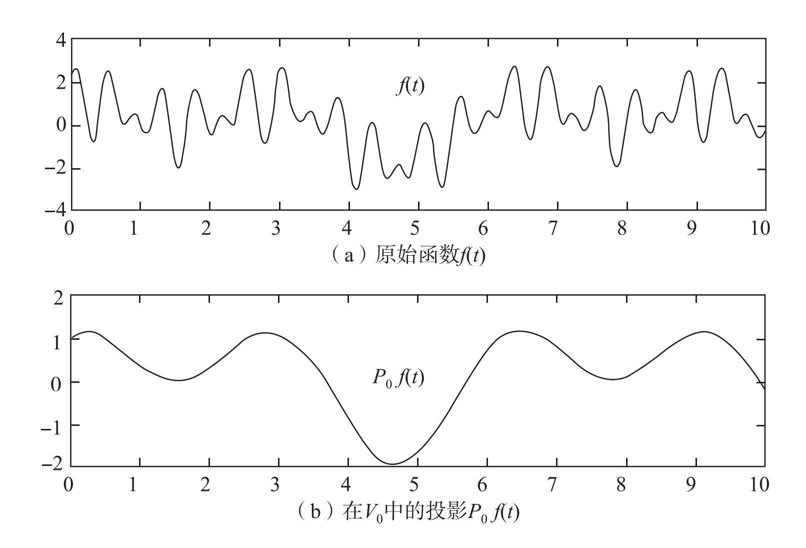
$$D_jf(x)=g_j(x)\in W_j。\tag{10.7.11}$$

根据尺度空间和小波空间之间的关系（10.8.5）可知

$$f_{j+1}(x)=f_j(x)+g_j(x),\tag{10.7.12}$$

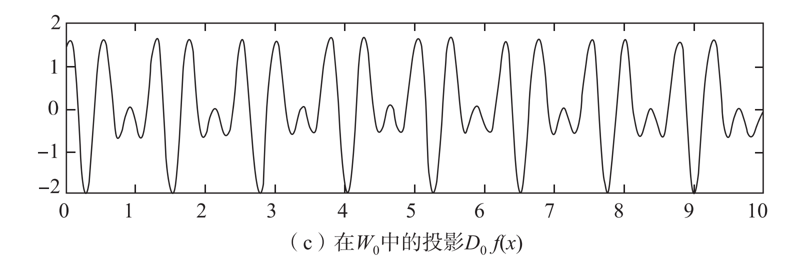
而且 f_i 和 g_j 相互正交。

对式（10.7.12）可以解释为，$g_j(x)$ 是 $f_{j+1}(x)$ 与 $f_j(x)$ 之差，而 f_{j+1} 和 f_j 为在两个不同分辨空间中的投影。由于尺度函数的低通特性，在 V_j 上投影主要是函数的轮廓概貌，或称平滑逼近，而小波空间的投影为其细节信息。如果把 f_{j+1} 看作是原始函数，$f_j(x)$ 看作它的一个投影，则 $g_j(x)$ 就是投影与原函数之间差异的精细部分。这种情况有如图 10－15 给出的示意。



（a）原始函数 $f(t)$

（b）在 V_0 中的投影 $P_0f(t)$



（c）在W_0中的投影$D_0 f(x)$

图 10－15　函数的分解图形（a）原始函数$f(t)$，（b）V_0 中的投影 $P_0 f(t)$，（c）W_0 中的投影 $D_0 f(t)$

如果把过程（10.7.12）继续下去就可得到

$$f_{j+1}(x) = g_j(x) + g_{j-1}(x) + g_{j-2}(x) + \cdots\cdots + g_k(x) + f_k(x), \tag{10.7.13}$$

这是函数的一种多级正交分解，$f_k(x)$ 是$f_{k+1}(x)$ 的概貌，$g_k(x)$，$k=j$，$j-1$，…是各级精细差异，随着 k 的降低，被舍去的误差越来越精微，亦即对函数的逼近越来越精确。从另一个角度看，也就是对函数的分析越来越精细，是一种多分解率分析。

10.7.2　常用正交小波基

到现在为止已经构造出多种小波正交基，但用于电磁场计算的只有少数几种，其中主要的是 Haar 小波基和 Battle-Lemarie 小波基等。

Haar 小波基的尺度函数 $\varphi(x)$ 一般用 $h(x)$ 表示，其定义为

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0 & \text{其他。} \end{cases} \tag{10.7.14}$$

它就是特征函数 $x_{(0,1)}(x)$，小波母函数 $\psi(x)$ 为

$$\psi(x) = \varphi(2x) - \varphi(2x-1) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x < \dfrac{1}{2}, \\ -1, & \dfrac{1}{2} \leqslant x < 1, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases} \tag{10.7.15}$$

由 $\psi(x)$ 生成的小波基为

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$$
$$= \begin{cases} 2^{j/2}, & \dfrac{k}{2^j} \leqslant x < \dfrac{2k+1}{2^{j+1}}, \\ -2^{j/2}, & \dfrac{2k+1}{2^{j+1}} \leqslant x < \dfrac{k+1}{2^j}, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases} \tag{10.7.16}$$

Haar 小波的尺度函数和母小波函数的图形由图 10－16 给出，这类函数的优点是有限的支撑集，缺点是不连续。

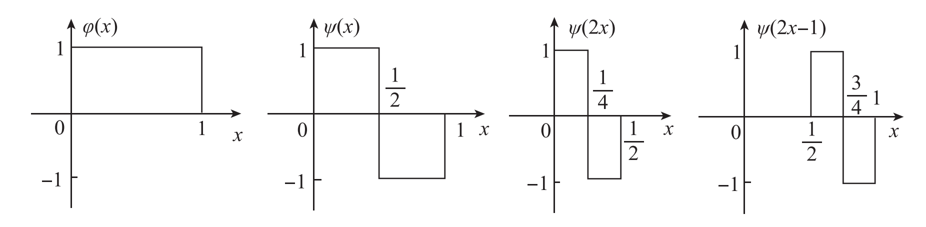


图 10－16　Haar 尺度函数和小波函数

Battle-Lemarie 小波基是以 B-样条函数为基础，利用多分辨分析构造出来的另一种正交小波基。样条函数是一类分段光滑又在各段交接处具有一定光滑度的函数。在小波分析中用得最多的是基数 B-样条函数，因为它具有最小可能的支撑集长度。

m 阶 B-样条是 Haar 尺度函数或特征函数与其自身 m 次卷积运算所得的函数，记作 $N_m(x)$，其头三阶的形式为

$$N_1(x) = x_{[0,1)}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x < 1, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases} \tag{10.7.17}$$

$$\begin{aligned} N_2(x) &= N_1(x) * N_1(x) = \int_0^1 N_1(\tau) N_1(x-\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1, \\ 2-x, & 1 \leqslant x < 2, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases} \end{aligned} \tag{10.7.18}$$

$$\begin{aligned} N_3(x) &= N_2(x) * N_1(x) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & 0 \leqslant x < 1, \\ \frac{3}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2, & 1 \leqslant x < 2, \\ \frac{1}{2}(x-3)^2, & 2 \leqslant x < 3, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases} \end{aligned} \tag{10.7.19}$$

显然，由 $N_1(x)$ 构造的小波基就是 Haar 正交小波。由 $N_2(x)$ 不能直接构成正交多分辨分析，需要通过正交化方法而构造所需的尺度函数，该函数可表示为

$$\varphi(x) = \sqrt{3}\sum_k \mathrm{c_n}\,\varphi(x-k), \tag{10.7.20}$$

其中 c_n 为 $\left(1 + 2cos^2\frac{\xi}{2}\right)^{-1/2}$ 的傅里叶系数，而小波母函数则表示为

$$\psi(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_k (\mathrm{d}_{k+1} - 2\mathrm{d}_k + \mathrm{d}_{k-1}) N_2(2x-k), \tag{10.7.21}$$

其中 d_k 为 $\left[\left(1 - sin^2\frac{\xi}{4}\right)\Big/\left(1 + cos^2\frac{\xi}{2}\right)\left(1 + cos^2\frac{\xi}{4}\right)\right]^{1/2}$ 的傅里叶系数。

由于正交化过程变坏了紧支撑性，$\varphi(x)$ 不是紧支撑的。

类似地，基于三阶样条函数构造多分辨分析也需要正交化方法，相应的尺度函数$\varphi(x)$和小波母函数 $\psi(x)$ 也是非紧支撑的，由它们所产生的小波基称为三次 B-样条 Battle-Lemarie 正交小波基，尺度函数和小波函数的傅里叶变换为

$$\hat{\varphi}(\omega) = \left[\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\right]^4\left[1 - \frac{4}{3}\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right) + \frac{2}{5}\sin^4\left(\frac{\omega}{2}\right) - \frac{4}{315}\sin^6\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]^{-1/2},$$

$$\hat{\psi} = e^{i\omega/2}\frac{\hat{\varphi}(\omega + 2\pi)}{\hat{\varphi}(\omega/2 + 2\pi)}\cdot\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)。\tag{10.7.22}$$

图 10－17 和 10－18 分别给出了三次 B-样条 Battle－Lemarie 小波尺度函数和小波函数及其傅里叶变换。

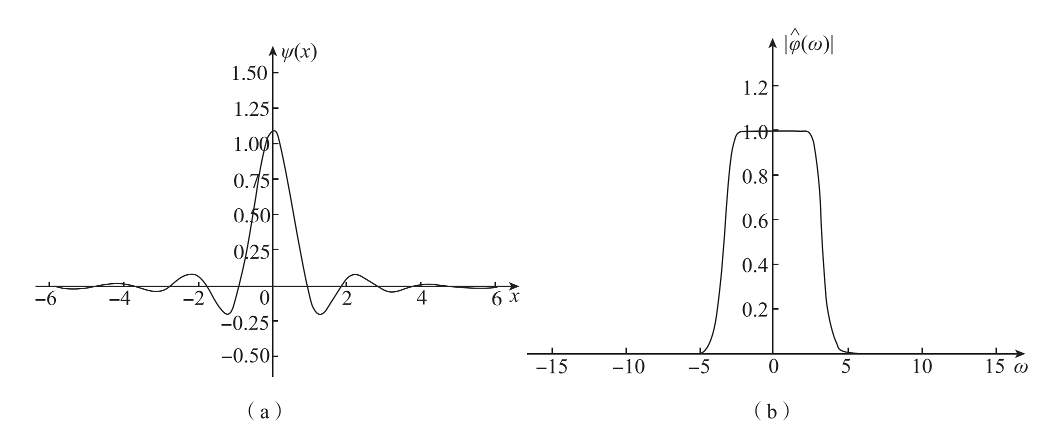


图 10－17　三次 B-样条 Battle-Lemarie 小波基尺度函数

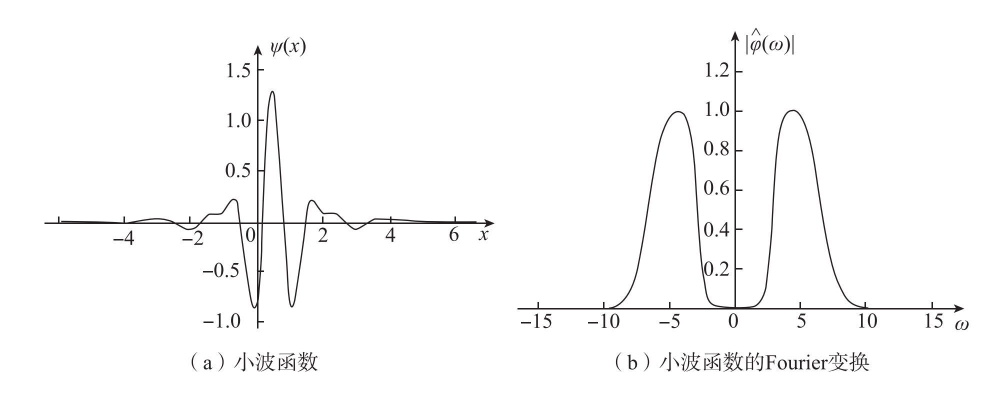


图 10－18　三次 B-样条 Battle-Lemarie 小波基小波母函数

三阶 B-样条 Battle-Lemarie 小波基的优点是其连续性，缺点是非紧支撑的，支撑集扩展到整个实轴，所幸的是它是迅速衰减的，宜于近似处理。

还有一种常用的小波基称为 Baubechies 正交小波基，它具有紧支撑集，遗憾的是它不能表示成闭的解析形式，这里不再具体讨论。

10.7.3　基于 Haar 小波基的时域多分辨分析法

在 20 世纪九十年代，一种用于电磁场计算的时域多分解分析（Multiresolution Time Domain，MRTD）法被提了出来，将电磁场用多分辨分析的尺度基函数和小波基函数展开，并用伽辽金法对麦克斯韦方程进行离散，构成一种既与时域有限差分法有关又具有更深刻意义的全新时域方法。时域多分辨分析法给出了新的理论构形，将时域有限差分法与其他电磁场的分析方法联系起来，从而使复杂的电磁场问题对计算机存储空间和 CPU 时间的要求大大降低。这是因为与传统的时域有限差分法相比，在相同的精度水平上，时域多分辨分析法所用的网格可以更大，只在需要的区域选用更高的分辨率。事实上，传统的时域有限差分法只不过是时域多分辨分析法的一种特殊情况。基于小波基函数的场量的展开系数由权函数在每个网格点进行计算。通过在每个初始网格点利用更高阶的展开基函数而达到高分辨率。在每个网格点的展开系数与其邻近网格点的系数有关，但该系数在不需要对场进行高分辨率描述的区域中足够小，完全可以忽略。因此，时域多分辨分析法提供了一种分区进行不同分辨率计算的自适应方法。

为了突出显示时域多分辨分析法的特点，我们采用逐步深入的方法叙述基于 Haar 小波基的分析过程，作为第一步只选用其尺度基函数作为场的展开函数，时间离散函数用 $h(t)$ 表示，为了简单，先以均匀无耗各向同性媒质中一维平面波作为分析的对象，其场方程为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}E_z(x,t) &= \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x}H_y(x,t),\\ \frac{\partial}{\partial t}E_y(x,t) &= \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}E_z(x,t)。\end{aligned}\tag{10.7.23}$$

空间和时间的展开基函数由 $\varphi(x)$ 和 $h(t)$ 的平移形成，并表示为

$$\left.\begin{aligned}\varphi_m^0(x) &= \varphi^0\left(\frac{x}{\Delta x}-m\right),\\ h_k(t) &= h\left(\frac{t}{\Delta t}-k\right),\end{aligned}\right. \quad m,k\in Z。\tag{10.7.24}$$

按照 MRTD 的习惯表示方法，把场量按上述基函数展开为

$$\begin{aligned}E_z(x,t) &= \sum_{k,m}E_{k+\frac{1}{2},m}^{\varphi^0}h_{k+\frac{1}{2}}(t)\varphi_m^0(x),\\ H_y(x,t) &= \sum_{k,m}H_{k,m+\frac{1}{2}}^{\varphi^0}h_k(t)\varphi_{m+\frac{1}{2}}^0(x),\end{aligned}\tag{10.7.25}$$

其中角标 φ^0 表示对零阶尺度函数的展开系数。

把展开式（10.7.25）代入式（10.7.23）的第一式，并用伽辽金法即可得到

$$\iint_{-\infty}^{\infty}\sum_{k_1m}\left[E_{k+\frac{1}{2},m}^{\varphi^0}\varphi_m^0(x)\frac{\partial}{\partial t}h_{k+\frac{1}{2}}(t)\right]h_{k'}(t)\varphi_{m'}^0(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\iiint_{-\infty}^{\infty}\Big[\sum_{k,m} H^{\varphi^0}_{k,m+\frac{1}{2}} h_k(t)\frac{\partial}{\partial x}\varphi^0_{m+\frac{1}{2}}(x)\Big] h_{k'}(t)\varphi^0_{m'}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t。\tag{10.7.26}$$

容易证明以下积分关系

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_k(t)h_l(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau-k)h(\tau-l)\Delta t\mathrm{d}\tau = \Delta t\delta_{k,l},\tag{10.7.27}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_k(t)\frac{\partial}{\partial t}h_{k+\frac{1}{2}}(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} h\Big(\frac{t}{\Delta t}-k\Big)\frac{\partial}{\partial t}h\Big(\frac{t}{\Delta t}-\Big(k'+\frac{1}{2}\Big)\Big)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h\Big(\frac{t}{\Delta t}-k\Big)\frac{\partial}{\partial t}\Big[u\Big(\frac{t}{\Delta t}-\Big(k'+\frac{1}{2}\Big)+\frac{1}{2}\Big)-u\Big(\frac{t}{\Delta t}-\Big(k'+\frac{1}{2}\Big)-\frac{1}{2}\Big)\Big]\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h\Big(\frac{t}{\Delta t}-k\Big)\frac{1}{\Delta t}\Big[\delta\Big(\frac{t}{\Delta t}-k'\Big)-\delta\Big(\frac{t}{\Delta t}-(k'+1)\Big)\Big]\mathrm{d}t。$$

$$= \delta_{k,k'} - \delta_{k,k'+1}\tag{10.7.28}$$

由于已设定 $\varphi(x)$ 与 $h(t)$ 有相同的形式，故 $\varphi^0_m(x)$ 也具有与 $h_k(t)$ 相同的性质。这样一来，式（10.7.26）就变成

$$\Delta x\sum_k E^{\varphi^0}_{k+\frac{1}{2},m}(\delta_{k',k}-\delta_{k',k+1}) = \frac{\Delta t}{\varepsilon}H^{\varphi^0}_{k,m+\frac{1}{2}}(\delta_{m',m}-\delta_{m',m+1}),$$

从而进一步可得

$$E^{\varphi^0}_{k+\frac{1}{2},m} = E^{\varphi^0}_{k-\frac{1}{2},m} + \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta x}(H^{\varphi^0}_{k,m+\frac{1}{2}} - H^{\varphi^0}_{k,m-\frac{1}{2}})。\tag{10.7.29}$$

类似地，把（10.7.25）代入式（10.7.23）的第二式，并选用 $k_{k'+\frac{1}{2}}$和 $\varphi^0_{m'+\frac{1}{2}}(x)$ 作为权函数，就又可以得到

$$H^{\varphi^0}_{k+1,m+\frac{1}{2}} = H^{\varphi^0}_{k,m+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\mu\Delta x}(E^{\varphi^0}_{k+\frac{1}{2},m+1} - E^{\varphi^0}_{k+\frac{1}{2},m})。\tag{10.7.30}$$

所得式（10.7.29）和（10.7.30）构成一个计算各网格点展开系数的时间步进关系。

为了对比，我们把方程（10.7.23）在一维 Yee 氏网格中按传统的 FDTD 式展开就得到

$$E_z^{k+\frac{1}{2}}(m) = E_z^{k-\frac{1}{2}}(m) + \frac{\Delta t}{\varepsilon\Delta x}\Big[H_y^k\Big(m+\frac{1}{2}\Big)-H_y^k\Big(m-\frac{1}{2}\Big)\Big],\tag{10.7.31}$$

$$H_y^{k+1}\Big(m+\frac{1}{2}\Big) = H_y^k\Big(m+\frac{1}{2}\Big)+\frac{\Delta t}{\mu\Delta x}[E_z^{k+\frac{1}{2}}(m+1) - E^{k+\frac{1}{2}}(m)]。\tag{10.7.32}$$

由此可以看出，只用 $\varphi^0_m(x)$ 作为展开函数的 MRTD 与 FDTD 有完全相同的差分格式，因此可以认为 FDTD 是 MRTD 的一种特殊情况，MRTD 具有更广泛的意义和形式。应该指出的是，在 FDTD 中直接计算的是场量本身，而 MRTD 中计算的是场的展开系数。

MRTD 的优点主要表现在展开基函数中加入小波基函数 $\psi^j_m(x)$，先考虑零阶的情况，并取 Haar 小波为

$$\psi_m^0(x) = \psi\left(\frac{x}{\Delta x} - m\right), \tag{10.7.33}$$

场的展开形式为

$$E_z(x,t) = \sum_{k,m}[E_{k,m}^{\varphi^0} h_k(t)\varphi_m^0(x) + E_{k,m}^{\psi^0} h_k(t)\psi_m^0(x)],$$
$$H_y(x,t) = \sum_{k,m}[H_{k,m}^{\varphi^0} h_{k+\frac{1}{2}}(t)\varphi_{m+\frac{1}{2}}^0(x) + H_{k,m}^{\psi^0} h_{k+\frac{1}{2}}(t)\psi_{m+\frac{1}{2}}^0(x)]。 \tag{10.7.34}$$

把该表达式代入方程（10.8.23）后再用伽辽金法，考虑到尺度基函数和小波基函数的正交性和上面所获得的关系便可得到展开系数的计算格式

$$E_{k+1,m}^{\varphi^0} = E_{k,m}^{\varphi^0} + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x}[H_{k,m}^{\varphi^0} - H_{k,m}^{\psi^0} - H_{k,m-1}^{\varphi^0} + H_{k,m-1}^{\psi^0}],$$
$$E_{k+1,m}^{\psi^0} = E_{k,m}^{\psi^0} + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x}[H_{k,m}^{\varphi^0} + 3H_{k,m}^{\psi^0} - H_{k,m-1}^{\varphi^0} + H_{k,m-1}^{\psi^0}],$$
$$H_{k,m}^{\varphi^0} = H_{k-1,m}^{\varphi^0} + \frac{\Delta t}{\mu \Delta x}[E_{k,m+1}^{\varphi^0} + E_{k,m+1}^{\psi^0} - E_{k,m}^{\varphi^0} - E_{k,m}^{\psi^0}],$$
$$H_{k,m}^{\psi^0} = H_{k-1,m}^{\psi^0} + \frac{\Delta t}{\mu \Delta x}[-E_{k,m+1}^{\varphi^0} - E_{k,m+1}^{\psi^0} + E_{k,m}^{\varphi^0} - 3E_{k,m}^{\psi^0}]。 \tag{10.7.35}$$

由于小波基函数的特点，使得按式（10.7.35）的计算比按式（10.7.29）和（10.7.30）的计算更加精细。如果要求更高还可以增加高阶尺度基函数和高阶小波基函数。

以上原理可推广到二维和三维的情况，只是基函数的组合可以有更多的选择。如果计算的要求更精细，则需要的基函数的阶数越高，随之展开系数也要增加，当然计算复杂度也就随之而提高。

10.7.4 基于 Battle-Lemarie 小波基的时域多分辨分析法

和上面的做法一样，只是把 Haar 基换成三次 B-样条 Battle – Lemarie 小波，首先也只考虑用尺度基函数展开的情况。针对不同的坐标变量都有自己的尺度基函数，一般地可把零阶尺度基函数表示成

$$\varphi_r^0(s) = \varphi^0\left(\frac{s}{\Delta s} - r\right),$$
$$s = x,y,z, \quad r = l,m,n。 \tag{10.7.36}$$

现在我们把它用于无耗无源均匀各向同性媒质空间中电磁场满足的麦克斯韦旋度方程在直坐标中的六个分量方程，其中电场和磁场六个分量的展开式分别为

$$E_x(\vec{r},t) = \sum_{k,l,m,n} E_{k,l+\frac{1}{2},m,n}^{\varphi_x} h_k(t)\varphi_{l+\frac{1}{2}}(x)\varphi_m(y)\varphi_n(z),$$
$$E_y(\vec{r},t) = \sum_{k,l,m,n} E_{k,m,l+\frac{1}{2},n}^{\varphi_y} h_k(t)\varphi_l(x)\varphi_{m+\frac{1}{2}}(y)\varphi_n(z), \tag{10.7.37}$$
$$E_z(\vec{r},t) = \sum_{k,l,m,n} E_{k,l,m,n+\frac{1}{2}}^{\varphi_z} h_k(t)\varphi_l(x)\varphi_m(y)\varphi_{n+\frac{1}{2}}(z),$$

$$
\begin{aligned}
H_x(\vec{r},t) &= \sum_{k,l,m,n} H^{\varphi_x}_{k+\frac{1}{2},l,m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} h_{k+\frac{1}{2}}(t)\varphi_l(x)\varphi_{m+\frac{1}{2}}(y)\varphi_{n+\frac{1}{2}}(z), \\
H_y(\vec{r},t) &= \sum_{k,l,m,n} H^{\varphi_y}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m,n+\frac{1}{2}} h_{k+\frac{1}{2}}(t)\varphi_{l+\frac{1}{2}}(x)\varphi_m(y)\varphi_{n+\frac{1}{2}}(z), \\
H_z(\vec{r},t) &= \sum_{k,l,m,n} H^{\varphi_x}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n} h_{k+\frac{1}{2}}(t)\varphi_{l+\frac{1}{2}}(x)\varphi_{m+\frac{1}{2}}(y)\varphi_n(z),
\end{aligned}
\tag{10.7.38}
$$

其中 $h_k(t)$ 仍如式（10.7.24）所示，把以上表示代入麦克斯韦方程的分量形式并用伽辽金法，就可获得相应的六个展开系数的离散化代数步进运算格式。在施行伽辽金法时需要以下积分。

考虑到 $\varphi_r(s)$ 的正交性，显然有

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(x)\varphi_{m'}(x)\mathrm{d}x = \Delta x \delta_{m,m'} \tag{10.7.39}
$$

另一种重要积分是

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(x)\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{m'+\frac{1}{2}}(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(\omega)e^{\mathrm{i}\omega m-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}\hat{\varphi}(\omega)e^{\mathrm{i}\omega'\left(m'+\frac{1}{2}\right)}e^{-\mathrm{i}\omega' x}\mathrm{d}\omega'\right]\mathrm{d}x \\
&= \iiint_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}e^{-\mathrm{i}x(\omega+\omega')}\right]\left[\frac{-\mathrm{i}\omega}{2\pi}\hat{\varphi}(\omega')\hat{\varphi}(\omega)e^{\mathrm{i}\omega m+\mathrm{i}\omega\left(m'+\frac{1}{2}\right)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\omega' \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{i}\omega)\hat{\varphi}(\omega)e^{\mathrm{i}\omega m}\hat{\varphi}(-\omega)e^{-\mathrm{i}\omega\left(m'+\frac{1}{2}\right)}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\omega\,|\hat{\varphi}_m(\omega)|^2\sin\left[\omega\left(m'-m+\frac{1}{2}\right)\right]\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

以上结果又可以表示成

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_m(x)\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{m'+\frac{1}{2}}(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=-\infty}^{\infty}a(i)\delta_{m+i,m'}, \tag{10.7.40}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
a(0) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}|\hat{\varphi}(\omega)|^2\omega\sin\frac{\omega}{2}\mathrm{d}\omega, \\
a(1) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}|\hat{\varphi}(\omega)|^2\omega\sin\frac{3}{2}\omega\mathrm{d}\omega, \\
a(2) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}|\hat{\varphi}(\omega)|^2\omega\sin\frac{5}{2}\omega\mathrm{d}\omega, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

系数 $a(i)$ 的前九项的值列于表 10－2。

由表可以看出，系数 $a(i)$ 的值随着 i 的增大其绝对值迅速减小，当 $i>8$ 时其值已经足够小，这时包含 $a(i)$ 项的作用已可以忽略。因此，式（10.7.40）中的和号中的 i 可取有限值。此外，还有 $a(i)$ 的对称性 $a(-1-i)=-a(i)$。

表 10－2　系数 $a(i)$ 前九项的值

i	$a(i)$	i	$a(i)$
0	1. 2918462	5	－0. 0081892
1	－0. 1560761	6	0. 0043788
2	0. 0596391	7	－0. 0023433
3	－0. 0293099	8	0. 0012542
4	0. 0153716		

对于分量方程之一

$$\varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t}=\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z},\tag{10.7.41}$$

根据以上所得结果其离散化过程会遇到以下积分

$$\begin{aligned}&\iiiint_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial E_x}{\partial t}h_{k'+\frac{1}{2}}(t)\varphi_{l'+\frac{1}{2}}(x)\varphi_{m'}(y)\varphi_{n'}(z)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\sum_{k',l',m',n'=-\infty}^{\infty}E^{\varphi_x}_{k',l'+\frac{1}{2},m',n'}\delta_{l,l'}\delta_{m,m'}\delta_{n,n'}(\delta_{k+1,k'}-\delta_{k,k'})\Delta x\Delta y\Delta z\\&=(E^{\varphi_x}_{k+1,l+\frac{1}{2},m,n}-E^{\varphi_x}_{k,l+\frac{1}{2},m,n})\Delta x\Delta y\Delta z,\end{aligned}\tag{10.7.42}$$

$$\begin{aligned}&\iiiint_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial H_z}{\partial y}h_{k'+\frac{1}{2}}(t)\varphi_{l'+\frac{1}{2}}(x)\varphi_{m'}(y)\varphi_{n'}(z)\,\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\sum_{k',l',m',n'=\infty}^{\infty}H^{\varphi_z}_{k'+\frac{1}{2},l'+\frac{1}{2},m'+\frac{1}{2},n'}\delta_{l,l'}\delta_{n,n'}\delta_{k,k'}\sum_{i=-9}^{8}a(i)\delta_{m+i,m'}\Delta x\Delta z\Delta t\\&=\sum_{i=-9}^{8}a(i)H^{\varphi_z}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m+i+\frac{1}{2},n}\Delta x\Delta z\Delta t。\end{aligned}\tag{10.7.43}$$

对 $\partial H_y/\partial z$ 一项也做如上类似的积分计算，结果就会把式（10. 7. 41）变成

$$\begin{aligned}&\frac{\varepsilon}{\Delta t}(E^{\varphi_x}_{k+1,l+\frac{1}{2},m,n}-E^{\varphi_x}_{k,l+\frac{1}{2},m,n})\\&=\frac{1}{\Delta y}\sum_{i=-9}^{\infty}a(i)H^{\varphi_z}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m+i+\frac{1}{2},n}-\frac{1}{\Delta z}\sum_{i=-9}^{\infty}a(i)H^{\varphi_y}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m,n+i+\frac{1}{2}}\end{aligned}\tag{10.7.44}$$

用完全类似的方法可以导出其他场分量的计算格式。可以看出，这仍是一个可按步进方法计算的时域算法。

根据多分辨分析原理可知，只用尺度基函数展开的算法还不能充分发挥 MRTD 法所应具有的优越性，还需要增加小波基函数的作用。

为了表达方便，这里不考虑一般情况，而是只在一个坐标方向上加上零阶小波的作用。假设小波基函数只加在 y 轴上，则 6 个场分量的展开可取以下形式

$$E_x(\vec{r},t) = \sum_{k,l,m,n}\left[E^{\varphi_x}_{k,l+\frac{1}{2},m,n}\varphi_m(y) + E^{\psi_x}_{k,l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n}\psi_{m+\frac{1}{2}}(y)\right]\cdot h_k(t)\varphi_{l+\frac{1}{2}}(x)\varphi_n(z),$$

$$E_y(\vec{r},t) = \sum_{k,l,m,n}\left[E^{\varphi_y}_{k,l,m+\frac{1}{2},n}\varphi_m(y) + E^{\psi_y}_{k,l,m,n}\psi_m(y)\right]\cdot h_k(t)\varphi_l(x)\varphi_n(z),$$

$$E_z(\vec{r},t) = \sum_{k,l,m,n}\left[E^{\varphi_x}_{k,l,m,n+\frac{1}{2}}\varphi_m(y) + E^{\psi_x}_{k,l,m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\psi_{m+\frac{1}{2}}(y)\right]\cdot h_k(t)\varphi_l(x)\varphi_{n+\frac{1}{2}}(z),$$

$$(10.7.45)$$

$$H_x(\vec{r},t) = \sum_{k,l,m,n}\left[H^{\varphi_x}_{k+\frac{1}{2},l,m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\varphi_{m+\frac{1}{2}}(y) + H^{\psi_x}_{k+\frac{1}{2},l,m,n+\frac{1}{2}}\psi_{m+\frac{1}{2}}(y)\right]\cdot h_{k+\frac{1}{2}}(t)\varphi_l(x)\varphi_{n+\frac{1}{2}}(z),$$

$$H_y(\vec{r},t) = \sum_{k,l,m,n}\left[H^{\varphi_y}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m,n+\frac{1}{2}}\varphi_m(y) + H^{\psi_y}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}\psi_{m+\frac{1}{2}}(y)\right]\cdot h_{k+\frac{1}{2}}\varphi_{l+\frac{1}{2}}(x)\varphi_{n+\frac{1}{2}}(z),$$

$$H_z(\vec{r},t) = \sum_{k,l,m,n}\left[H^{\varphi_z}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n}\varphi_{m+\frac{1}{2}}(y) + H^{\psi_z}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m,n}\psi_m(y)\right]\cdot h_{k+\frac{1}{2}}(t)\varphi_{l+\frac{1}{2}}(x)\varphi_n(z),$$

$$(10.7.46)$$

其中 E^{ψ_s}和 H^{ψ_s}，$s=x$，y，z，为小波基函数的展开系数，$\psi(y)$ 为三次 B-样条 Battle-Lemarie 小波母函数，由其生成的零阶小波基函数表示为

$$\psi_{m+\frac{1}{2}}(y) = \psi^0\left(\frac{y}{\Delta y} - m\right) \tag{10.7.47}$$

小波基函数和尺度基函数的正交关系为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_m(x)\psi_m(x)\mathrm{d}x = \Delta x\delta_{m,m'}$$

$$\int\varphi_m(x)\psi_{m'+\frac{1}{2}}(x)\mathrm{d}x = 0$$

此外，在后续的过程中还要用到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_m(x)\frac{\partial\psi_{m'+\frac{1}{2}}(x)}{\partial x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}|\hat{\psi}(\omega)|^2\omega\sin\omega\left(m'+\frac{1}{2}-m\right)\mathrm{d}\omega$$
$$\approx\sum_{i=-9}^{8}b(i)\delta_{m+i,m'},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_m(x)\frac{\partial\psi_{m'+\frac{1}{2}}(x)}{\partial x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\hat{\varphi}(\omega)|\hat{\psi}(\omega)|\omega\sin\omega(m'+1-m)\mathrm{d}\omega$$
$$\approx\sum_{i=-9}^{8}c(i)\delta_{m+i,m'+1},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_m(x)\frac{\partial\varphi_{m'}(x)}{\partial x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\hat{\varphi}(\omega)|\hat{\psi}(\omega)|\omega\sin\omega(m'-m)\mathrm{d}\omega$$
$$\approx\sum_{i=-9}^{8}c(i)\delta_{m+i,m'},$$

其中系数 $b(i)$ 和 $c(i)$ 前十项的值列于表 10－3，同样可以看出随着 i 的增大其值迅速减小的程度。根据这一情况，在上面的和号中近似地只取了前几项。当 $i<0$ 时，$b(i)$和 $c(i)$ 的值可根据对称性关系 $b(-1-i)=-b(i)$，$c(-i)=-c(i)$ 得到。

表 10－3　系数 $b(i)$ 和 $c(i)$ 前十项的值

i	$b(i)$	$c(i)$
1	2. 4735388	0. 0000000
2	0. 9562282	－0. 0465973
3	0. 1660587	0. 0545394
4	0. 0939244	－0. 0369996
5	0. 0631413	0. 0205795
6	0. 134936	－0. 0111530
7	－0. 0028589	0. 0059769
8	0. 0027788	－0. 0032026
9	－0. 0011295	0. 0017141
10	—	－0. 0009177

再考虑到前面得到的关于 $\varphi_m(x)$ 的性质（10. 7. 39）和（10. 7. 40），按照伽辽金法的程序就可得到

$$\iiiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial E_x}{\partial t}\varphi_{l'+\frac{1}{2}}(x)\varphi_{m'}(y)\varphi_{n'}(z)h_{k'+\frac{1}{2}}(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$
$$=(E^{\varphi_x}_{k+1,l+\frac{1}{2},m,n}-E^{\varphi_x}_{k,l+\frac{1}{2},m,n})\Delta x\Delta y\Delta z,$$
$$\iiiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial E_x}{\partial t}\varphi_{l'+\frac{1}{2}}(x)\psi_{m'+\frac{1}{2}}(y)\varphi_{n'}(z)h_{k'+\frac{1}{2}}(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$
$$=(E^{\psi_x}_{k+1,l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n}-E^{\psi_x}_{k,l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n})\Delta x\Delta y\Delta z, \tag{10.7.48}$$
$$\iiiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial H_z}{\partial y}\varphi_{l'+\frac{1}{2}}\varphi_{m'}(y)\varphi_{n'}(z)h_{k'+\frac{1}{2}}(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$
$$=(\sum_{i=-9}^{8}a(i)H^{\varphi_z}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m+i+\frac{1}{2},n}+\sum_{i=-9}^{8}c(i)H^{\psi_z}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m+i,n})\Delta x\Delta z\Delta t,$$
$$\iiiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial H_z}{\partial y}\varphi_{l'+\frac{1}{2}}(x)\psi_{m'+\frac{1}{2}}(y)\varphi_{n'}(z)h_{k'+\frac{1}{2}}(t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$
$$=[\sum_{i=-9}^{8}c(i)H^{\varphi_z}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m+i+\frac{1}{2},n}+\sum_{i=-9}^{8}b(i)H^{\psi_z}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m+i+1,n})\Delta x\Delta z\Delta t。 \tag{10.7.49}$$

对$\dfrac{\partial H_y}{\mathrm{d}z}$也可作类似的处理。至此，把以上结果代入方程（10. 7. 41）又可得到

$$\frac{\varepsilon}{\Delta t}(E^{\varphi_x}_{k+1,l+\frac{1}{2},m,n}-E^{\varphi_x}_{k,l+\frac{1}{2},m,n})=\frac{1}{\Delta y}\sum_{i=-9}^{8}a(i)H^{\varphi_z}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m+i+\frac{1}{2},n}$$

$$+\frac{1}{\Delta y}\sum_{i=-9}^{8}c(i)H^{\psi_z}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m+i,n}-\frac{1}{\Delta z}\sum_{i=-9}^{8}a(i)H^{\varphi_y}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m,n+i+\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\varepsilon}{\Delta t}\left(E^{\psi_x}_{k+1,l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n}-E^{\psi_x}_{k,l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n}\right)=\frac{1}{\Delta y}\sum_{i=-9}^{8}c(i)H^{\varphi_z}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m+i+\frac{1}{2},n}$$

$$+\frac{1}{\Delta y}\sum_{i=-9}^{8}b(i)H^{\psi_z}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m+i+1,n}-\frac{1}{\Delta z}\sum_{i=-9}^{8}c(i)H^{\psi_y}_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2},n+i+\frac{1}{2}}\text{。}\quad(10.7.50)$$

对于其他分量的方程可按同样的方式获得类似于（10.7.50）形式的方程，这样就获得了全部电磁场的步进式时域计算格式，各展开系数计算出来后代回到展开方程就可求得计算域每一网格点每一时间步的电磁场。

10.7.5 数值稳定性和数值色散分析

和 FDTD 法一样，上面所导出的 MRTD 计算格式也是显式的，故也存在稳定性问题。因此，必须弄清其稳定性条件，以作为时间步选择的依据。

下面的分析将以 Battle-Lemarie 小波基 MRTD 为例，所导出的结果对其他基函数的 MRTD 也有参考价值。具体的分析对象也选 FDTD 法分析过的 TM^z 场方程（10.6.9）。如果只采用尺度基函数展开，但用于 x 和 y 两个坐标，则展开形式可参考式（10.7.37）和（10.7.38），只是现在是二维问题，参考上面对三维问题的导出方法，很容易导出相应于场方程（10.6.9）的基于三次 B-样条 Battle-Lemarie 尺度基函数的计算格式，其形式为

$$\frac{H^{\varphi_x}_{k+\frac{1}{2},l,m-\frac{1}{2}}-H^{\varphi_x}_{k-\frac{1}{2},l,m-\frac{1}{2}}}{\Delta t}=-\frac{1}{\mu\Delta y}\sum_{i=-n}^{n-1}a(i)E^{\varphi_z}_{k,l,m+i},$$

$$\frac{H^{\varphi_y}_{k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2},m}-H^{\varphi_y}_{k-\frac{1}{2},l-\frac{1}{2},m}}{\Delta t}=\frac{1}{\mu\Delta x}\sum_{i=-n}^{n-1}a(i)E^{\varphi_z}_{k,l+i,m},$$

$$\frac{E^{\varphi_z}_{k+1,l,m}-E^{\varphi_z}_{k,l,m}}{\Delta t}=\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{\Delta x}\sum_{i=-n}^{n-1}a(i)H^{\varphi_y}_{k+\frac{1}{2},l+i-\frac{1}{2},m}-\frac{1}{\Delta y}\sum_{i=-n}^{n-1}a(i)H^{\varphi_z}_{k+\frac{1}{2},l,m+i-\frac{1}{2}}\right]\text{。}$$

(10.7.51)

由以上方程构成的时间本征值方程为

$$\frac{H^{\varphi_x}_{k+\frac{1}{2},l,m-\frac{1}{2}}-H^{\varphi_x}_{k-\frac{1}{2},l,m-\frac{1}{2}}}{\Delta t}=\lambda H^{\varphi_x}_{k,l,m-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{H^{\varphi_y}_{k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2},m}-H^{\varphi_y}_{k-\frac{1}{2},l-\frac{1}{2},m}}{\Delta t}=\lambda H^{\varphi_y}_{k,l-\frac{1}{2},m},\quad(10.7.52)$$

$$\frac{E^{\varphi_z}_{k+1,l,m}-E^{\varphi_z}_{k,l,m}}{\Delta t}=\lambda E^{\varphi_z}_{k+\frac{1}{2},l,m}\text{。}$$

对比发现，这些方程与 FDTD 稳定性分析中所得时间本征值方程（10.6.11）完全一样，故可知 λ 须满足的稳定性条件也是

$$Re(\lambda)=0,$$

$$-\frac{2}{\Delta t}\leqslant Im(\lambda)\leqslant\frac{2}{\Delta t}\text{。}\quad(10.7.53)$$

由于方程（10.7.52）中的展开系数与场量相对应，与平面波谱相对应也可以表示成

$$E_{l,m}^{\varphi_z} = E_0^z e^{-i(k_x l\Delta x + k_y m\Delta y)},$$

$$H_{l,m-\frac{1}{2}}^{\varphi_x} = H_0^x e^{-i\left(k_x l\Delta x + k_y\left(m-\frac{1}{2}\right)\Delta y\right)},$$

$$H_{l-\frac{1}{2},m}^{\varphi_y} = H_0^y e^{-i\left(k_x\left(l-\frac{1}{2}\right)\Delta x + k_y m\Delta y\right)}。$$

把这些表示代入式（10.7.52）又可得到

$$\lambda^2 = \frac{4}{\varepsilon\mu}\left[\frac{1}{(\Delta x)^2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} a(i)\sin\left(k_x\left(i+\frac{1}{2}\right)\Delta x\right)\right)^2 + \frac{1}{(\Delta y)^2}\left(\sum_{i=0}^{n-1} a(i)\sin\left(k_y\left(i+\frac{1}{2}\right)\Delta y\right)\right)^2\right]。\quad (10.7.54)$$

显然，这里的 λ 为纯虚数，且对任意的 k_x 和 k_y 都应该有

$$|Im(\lambda)| \leqslant 2v\left(\sum_{i=0}^{n-1} |a(i)|\right)\sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}}。\quad (10.7.55)$$

综合 λ 应满足的以上条件可知

$$\Delta t \leqslant \frac{1}{v\left(\sum_{i=0}^{n-1} |a(i)|\right)\sqrt{\frac{1}{(\nabla x)^2} + \frac{1}{(\nabla y)^2}}}。\quad (10.7.56)$$

可见，这一条件与 FDTD 的稳定性条件的差异主要决定于因子 δ，其值为

$$\delta = \sum_{i=0}^{n-1} |a(i)|。$$

这一因子略大于 1，也就预示着 MRTD 与 FDTD 的稳定特性比较接近。

关于 MRTD 的色散关系也可以用分析 FDTD 色散特性的方法进行，尤其是只用尺度基函数展开时，其形式为

$$\left[\frac{1}{v\Delta t}\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)\right]^2 = \left[\frac{1}{\Delta x}\sum_{i=0}^{n-1} |a(i)| \sin\left(k_x\left(i+\frac{1}{2}\right)\Delta x\right)\right]^2 + \left[\frac{1}{\Delta y}\sum_{i=0}^{n-1} |a(i)| \sin\left(k_y\left(i+\frac{1}{2}\right)\Delta y\right)\right]^2。\quad (10.7.57)$$

具体分析表明，MRTD 比 FDTD 在数值色散方面要优越很多。

参 考 文 献

[1] Stratton J A. Electromagnetic Theory. New York：McGraw－Hill，1941

[2] Tricomi F G. Integral Equations. New York：Wiley，1957

[3] Collin R E. Field Theory of Guided Waves. New York：McGraw－Hill，1960

[4] Brilliouin L. Wave Propagation and Group Velocity. New York：Academic Press，1960

[5] Harrington R F. Time－Harmonic Electromagnetic Fields. New York ：McGraw－Hill，1961

[6] 郭敦仁．数学物理方法．北京：人民教育出版社，1965

[7] Lewin L. The use of singular integral equations in the solutions of waveguide problems. Advanced in Microwaves，1966：211 －284

[8] Harrington R F. Field Computation by Moment Methods. New York：Macmillan，1968

[9] Nornsby J S，Gopinath A. Numerical analysis of a dielectric loaded waveguide with a microstrip line － finite difference method. IEEE Trans.，Microwave Theory Tech.，1969，17：684 －690

[10] Nornsby J S，Gopinath A. Fourier analysis of a loaded waveguide with a microstrip. Electron Lett.，1969，5：265 －267

[11] Denlinger E J. Frequency dependent for microstrip transmission lines. IEEE Trans. Microwave Theory Tech.，1971，19：30 －39

[12] Mittra R，Itoh T. New technique for the analysis of the dispersion characteristics of microstrip lines. IEEE Trans. Microwave Theory Tech.，1971，19：47 －56

[13] Itoh T，Mittra R. Spectral domain approach for calculating dispersion characteristics of microstrip lines. IEEE Trans. Microwave Theory Tech.，1973，21：496 －498

[14] Knorr J B，Tufekioglu A. Spectral domain calculation of microstrip characteristic impedance. IEEE Trans. Microwave Tech.，1975，23：725 －728

[15] Yamashita E，Atsuki K. Analysis of microstrip － like transmission lines by nouniform discretization of integral equations. IEEE Trans. Microwave Theory Tech.，1976，24：195 －200

[16] Felsen L B. Transient Electromagnetic Fields. New York：Springer Verlag，1976

[17] Gupta K C，Garg R，Bahl I J. Microstrip Line and Slot Lines. London：Artech House，1979

[18] 任朗．天线理论基础．北京：人民邮电出版社，1980

[19] 王长清．奇异积分方程在微波问题中的应用．无线电电子学汇刊，1981，3 －4：105 －149

[20] 斯廷逊．电磁学中的数学．北京：国防工业出版社，1982

[21] 王长清．屏蔽微带线的色散特性．无线电电子学汇刊，1982，2：29 －43

[22] 王长清，岳凤花．屏蔽微带线的色散特性和高次模的计算．无线电电子学汇刊，1983，4：33 －44

[23] 王长清，史美琪．对称屏蔽耦合微带线的色散特性和高次模．无线电电子学汇刊，1983，3：60 －69

[24] 王长清．屏蔽耦合微带线的混合模分析．无线电电子学汇刊，1983，4：45 －55

[25] 黄席椿，论波速．北京：高等教育出版社，1985

[26] 章文勋．电磁场工程中的泛函方法．上海：上海科学技术出版社，1985

［27］ Sarkar T K. A Note on the choice weighting function in the method of moments. IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 1985, 33 (4)：436 -441

［28］ 王长清，岳凤花．屏蔽微带线及耦合微带线的色散特性和高次模．通信学报，1986，7 (1)：44 -51

［29］ Morita N，Kumagai N，Mautz JR. Integral Equation Method for Electromagnetics. Boston：Artech House, 1987

［30］ Kretch B E，Collin R E. Microstrip dispersion including anisotropic substrates. IEEE Trans. Microwave Theory Tech. , 1987, 35：710 -718

［31］ 彭仲秋．瞬态电磁场．北京：高等教育出版社，1989

［32］ Itoh T. Numerical Techniques for Microwave and Milimeter Wave Passive Structures. New York：Wiley，1989

［33］ 连汉雄．电磁场理论的数学方法．北京：北京理工大学出版社，1990

［34］Chew W C. Waves and Fields in Inhomogeneous Media. New York：Van Nostrand Reinhold, 1990

［35］ 汪文秉．瞬态电磁场．西安：西安交通大学出版社，1991

［36］ Van Bladel J. Singular Electromagnetic Fields and Sources. New York：IEEE Press, 1991

［37］ 杨弃疾．电磁场理论．上册．北京：高等教育出版社，1992

［38］ Dudley D G. Mathematical Foundation for Electromagnetic Theory. New York：IEEE Press, 1994

［39］ 王长清，祝西里．电磁场计算中的时域有限差分法．北京：北京大学出版社，1994

［40］ 张志健，刘宏，宋文淼．我国电磁理论研究的现状及发展展望．电子科学学刊，1994，16 (4)：395 -401

［41］ 方大纲．电磁理论中的谱域方法．合肥：安徽教育出版社，1995

［42］ Taflove A. Computational Electromagnetics：The Finite - Difference Time - Domain Method. Norwood：Artech House, 1995

［43］ 戴振铎，鲁述．电磁理论中的并矢格林函数．武汉：武汉大学出版社，1996

［44］ Mrozowski M. Guided Electromagnetic Waves. New Jersey：Wiley，1997

［45］ Peterson A F，Ray S L，Mittra R. Computational Methods for Electromagnetics. New York：IEEE Press，1998

［46］ Hanson G W，Yakovlev A B. An analysis of leaky - wave dispersion phenomena in the vicinity of cutoff using complex frequency plane singularties. Radio Science, 1998, 33 (4)：803 -820

［47］ Taflove A. Advances in Computational Electromagnetics：the Finite - Difference Time - Domain Method. Norwood：Artech House, 1998

［48］ 文柯一．电磁理论的新进展．北京：国防工业出版社，1999

［49］ 宋文淼．矢量偏微分算子．北京：科学出版社，1999

［50］ Rao S M. Time Domain Electromagnetics. New York：Academic Press, 1999

［51］ Hanson G W，Yakavlev A B. Investigation of mode interaction on planar dielectric waveguide with loss and gain. Radio Science, 1999, 34 (6)：1349 -1359

［52］ Kong J A. Electromagnetic Wave Theory. Massachusetts：EWW Publishing, 2000

［53］ 王长清．近代解析应用数学基础．西安：西安电子科技大学出版社，2001

［54］ 陈秉乾，舒幼生，胡望雨．电磁学专题研究．北京：高等教育出版社，2001

[55] Rethwell E J, Cloud M J. Electromagnetics. London: CRC Press, 2001
[56] Chew W C, Jin J M, Michielssen E, et al, Fast and Efficient Algorithm in Computational Electromagnetic. London: Artch House, 2001
[57] Hansen G W, Yakovlev A B. Operator Theory for electromagnetics. Berlin: Springer, 2002
[58] Jin J M. The Finite Element Method in Electromagnetics. Second Edition. New York: Wiley, 2002
[59] 盛新庆. 计算电磁学要论. 北京：科学出版社，2004
[60] Daubchies I. 小波十讲. 李建平，杨万年译. 北京：国防工业出版社，2004
[61] 葛德彪，阎玉波. 电磁波时域有限差分法. 第二版. 西安：西安电子科技大学出版社，2005
[62] 余文华，苏涛，Mittra R，等. 并行时域有限差分法. 北京：中国传媒大学出版社，2005
[63] 王长清. 现代计算电磁学基础. 北京：北京大学出版社，2005
[64] 鲁述，徐鹏根. 电磁场边值问题解析方法. 武汉：武汉大学出版社，2005
[65] Chen Z, Ney M M. The method of weighted residuals: a general approach to deriving time and frequency domain numerical methods. IEEE Antennas and Propagation Magazine, 2009, 51(1): 51－70
[66] Jin J M. Theory and Computation of Electromagnetic Fields. New York: IEEE Press, 2010
[67] 王长清，祝西里. 瞬变电磁场——理论和计算. 北京：北京大学出版社，2011
[68] 王长清，祝西里. 电磁场计算中的时域有限差分法. 第二版. 北京：北京大学出版社，2014

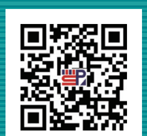
《现代物理基础丛书》已出版书目

（按出版时间排序）

1. 现代声学理论基础　马大猷　著　2004.03
2. 物理学家用微分几何（第二版）　侯伯元，侯伯宇　著　2004.08
3. 数学物理方程及其近似方法　程建春　编著　2004.08
4. 计算物理学　马文淦　编著　2005.05
5. 相互作用的规范理论（第二版）　戴元本　著　2005.07
6. 理论力学　张建树，等　编著　2005.08
7. 微分几何入门与广义相对论（上册・第二版）　梁灿彬，周彬　著　2006.01
8. 物理学中的群论（第二版）　马中骐　著　2006.02
9. 辐射和光场的量子统计　曹昌祺　著　2006.03
10. 实验物理中的概率和统计（第二版）　朱永生　著　2006.04
11. 声学理论与工程应用　朱海潮，等　编著　2006.05
12. 高等原子分子物理学（第二版）　徐克尊　著　2006.08
13. 大气声学（第二版）　杨训仁，陈宇　著　2007.06
14. 输运理论（第二版）　黄祖洽　著　2008.01
15. 量子统计力学（第二版）　张先蔚　编著　2008.02
16. 凝聚态物理的格林函数理论　王怀玉　著　2008.05
17. 激光光散射谱学　张明生　著　2008.05
18. 量子非阿贝尔规范场论　曹昌祺　著　2008.07
19. 狭义相对论（第二版）　刘辽，等　编著　2008.07
20. 经典黑洞与量子黑洞　王永久　著　2008.08
21. 路径积分与量子物理导引　侯伯元，等　著　2008.09
22. 量子光学导论　谭维翰　著　2009.01
23. 全息干涉计量——原理和方法　熊秉衡，李俊昌　编著　2009.01
24. 实验数据多元统计分析　朱永生　编著　2009.02
25. 微分几何入门与广义相对论（中册・第二版）　梁灿彬，周彬　著　2009.03
26. 中子引发轻核反应的统计理论　张竞上　著　2009.03
27. 工程电磁理论　张善杰　著　2009.08
28. 微分几何入门与广义相对论（下册・第二版）　梁灿彬，周彬　著　2009.08
29. 经典电动力学　曹昌祺　著　2009.08
30. 经典宇宙和量子宇宙　王永久　著　2010.04
31. 高等结构动力学（第二版）　李东旭　著　2010.09
32. 粉末衍射法测定晶体结构（第二版・上、下册）　梁敬魁　编著　2011.03
33. 量子计算与量子信息原理　Giuliano Benenti 等　著
——第一卷：基本概念　王文阁，李保文　译　2011.03

34. 近代晶体学（第二版） 张克从 著 2011.05
35. 引力理论（上、下册） 王永久 著 2011.06
36. 低温等离子体 B. M. 弗尔曼，И. M. 扎什京 编著
——等离子体的产生、工艺、问题及前景 邱励俭 译 2011.06
37. 量子物理新进展 梁九卿，韦联福 著 2011.08
38. 电磁波理论 葛德彪，魏兵 著 2011.08
39. 激光光谱学 W. 戴姆特瑞德 著
——第 1 卷：基础理论 姬扬 译 2012.02
40. 激光光谱学 W. 戴姆特瑞德 著
——第 2 卷：实验技术 姬扬 译 2012.03
41. 量子光学导论（第二版） 谭维翰 著 2012.05
42. 中子衍射技术及其应用 姜传海，杨传铮 编著 2012.06
43. 凝聚态、电磁学和引力中的多值场论 H. 克莱纳特 著
姜颖 译 2012.06
44. 反常统计动力学导论 包景东 著 2012.06
45. 实验数据分析（上册） 朱永生 著 2012.06
46. 实验数据分析（下册） 朱永生 著 2012.06
47. 有机固体物理 解士杰，等 著 2012.09
48. 磁性物理 金汉民 著 2013.01
49. 自旋电子学 翟宏如，等 编著 2013.01
50. 同步辐射光源及其应用（上册） 麦振洪，等 著 2013.03
51. 同步辐射光源及其应用（下册） 麦振洪，等 著 2013.03
52. 高等量子力学 汪克林 著 2013.03
53. 量子多体理论与运动模式动力学 王顺金 著 2013.03
54. 薄膜生长（第二版） 吴自勤，等 著 2013.03
55. 物理学中的数学物理方法 王怀玉 著 2013.03
56. 物理学前沿——问题与基础 王顺金 著 2013.06
57. 弯曲时空量子场论与量子宇宙学 刘辽，黄超光 著 2013.10
58. 经典电动力学 张锡珍，张焕乔 著 2013.10
59. 内应力衍射分析 姜传海，杨传铮 编著 2013.11
60. 宇宙学基本原理 龚云贵 著 2013.11
61. B 介子物理学 肖振军 著 2013.11
62. 量子场论与重整化导论 石康杰，等 编著 2014.06
63. 粒子物理导论 杜东生，杨茂志 著 2015.01
64. 固体量子场论 史俊杰，等 著 2015.03
65. 物理学中的群论（第三版）——有限群篇 马中骐 著 2015.03
66. 中子引发轻核反应的统计理论（第二版） 张竞上 著 2015.03
67. 自旋玻璃与消息传递 周海军 著 2015.06
68. 粒子物理学导论 肖振军，吕才典 著 2015.07
69. 量子系统的辛算法 丁培柱 编著 2015.07
70. 原子分子光电离物理及实验 汪正民 著 2015.08

(O-6802.31)



科学出版社互联网入口
科学数理分社
电话：(010) 64017957
Email：qianjun@mail.sciencep.com
销售分类建议：高等物理

www.sciencep.com



定 价：138.00 元